Sommarmatte – del 1

Matematiska Vetenskaper

15 augusti 2017

INNEHÅLL

1 ARITMETIK OCH ALGEBRA **1**

1.1 Räkning med naturliga tal och heltal . . . 1
1.2 Bråkräkning . . . 10
1.3 Potenser med heltalsexponent . . . 16
1.4 Reella tal . . . 18
1.5 Absolutbelopp . . . 24
1.6 Kvadratrötter . . . 25
1.7 Potenser med rationell exponent . . . 30
1.8 Algebraiska omskrivningar . . . 34

2 EKVATIONER **43**

2.1 Förstagradsekvationer . . . 46
2.2 Andragradsekvationer . . . 47
2.3 Ekvationer som leder till andragradsekvationer . . . 52
2.4 Linjära ekvationssystem . . . 55
2.5 Polynom, ekvationer av högre grad, faktorsatsen, polynomdivision . . . 59

3 GEOMETRI **64**

3.1 Euklidisk geometri . . . 64
3.2 Analytisk geometri . . . 74
3.3 Trigonometri . . . 84

4 FUNKTIONER **98**

4.1 Funktionsbegreppet, grafbegreppet, inverser . . . 98
4.2 Polynom . . . 105
4.3 Rationella funktioner . . . 107
4.4 Absolutbelopp . . . 109
4.5 Potensfunktioner . . . 111
4.6 Exponentialfunktioner, logaritmer . . . 113
4.7 Trigonometriska funktioner . . . 118

FACIT **124**

SAKREGISTER **138**

1 Aritmetik och algebra

I detta kapitel skall vi först arbeta med grundläggande aritmetik, alltså de fyra räknesätten, för olika typer av tal. I den senare delen av kapitlet behandlas hantering av algebraiska uttryck.

Vi rekommenderar att du inte använder räknare eller formelsamling då du löser uppgifterna. De kunskaper du får genom att dels räkna själv och tänka på vilka räkneregler du använder, och dels lära dig en del fakta istället för att förlita dig på formelsamlingen, är oerhört värdefulla för dina fortsatta studier. I många matematikintensiva utbildningar förväntas du klara dig utan både formelsamling och räknare.

1.1 Räkning med naturliga tal och heltal

De **naturliga talen** är talen $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. (De tre avslutande punkterna i listan indikerar att mönstret fortsätter utan slut.) De **negativa heltalen** är $-1, -2, -3, -4, \ldots$. Ibland skriver man negativa tal med en parentes: $(-1), (-2), (-3), (-4), \ldots$.

De naturliga talen och de negativa talen bildar tillsammans **heltalen**

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots.$$

Ett viktigt ord i det matematiska språket är begreppet **mängd**. I normalsvenska betyder ordet *ett stort antal* eller *en mätbar ansamling*. I matematik är en mängd en samling objekt, **element**. Så har t.ex. **mängden av de naturliga talen** varje naturligt tal som element. Talet 13 är ett element i mängden, liksom varje annat naturligt tal. Mängden av alla naturliga tal betecknas ofta $\mathbb{N}$. Med symboler skriver vi att 13 är ett naturligt tal som $13 \in \mathbb{N}$. Det faktum att -1 inte är ett naturligt tal skrivs $-1 \notin \mathbb{N}$.

På samma sätt talar man om mängden av alla heltal $\mathbb{Z}$, mängden av alla negativa heltal $\mathbb{Z}_-$ och mängden av alla positiva heltal $\mathbb{Z}_+$. Talet 0 är varken positivt eller negativt.

Om varje element i en mängd A också är element i en annan mängd B så säger vi att A är en **delmängd** till B vilket skrivs $A \subset B$. Vi har t.ex. att $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, eftersom varje naturligt tal även är ett heltal..

1.1.1 Naturliga tal

Två naturliga tal kan **adderas**, vilket av alla uppfattas som närmast självklart. Det faktum att termerna kan byta plats med varandra utan att resultatet ändras, dvs. att operationen addition är **kommutativ**, ($a+b=b+a$ för alla naturliga tal a och b), är också något så självklart att man sällan eller aldrig reflekterar över det. Operationen är bara definierad för par av tal. Vid addition av fler än två tal måste man därför i princip markera den ordning additionerna skall utföras i med parenteser, så

$$3+(6+13)=3+19=22 \text{ och } (3+6)+13=9+13=22.$$

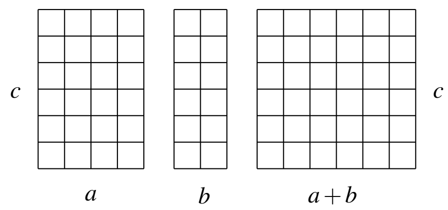
Vi vet dock att det, precis som i exemplet ovan, inte spelar någon roll hur vi sätter parenteserna. Summan av talen 3, 6 och 13 är 22 i vilken ordning vi än räknar. Allmänt gäller att $a+(b+c)=(a+b)+c$ för alla naturliga tal a, b och c, och vi säger att additionen är **associativ**. Om inga parenteser skrivits ut gäller **läsriktningsprioritet**, dvs. additionerna utförs från vänster till höger. Uttrycket $3+6+13+5$ tolkas alltså som $((3+6)+13)+5$.

Talen som adderas kallas **termer** och resultatet av additionen kallas **summa**.

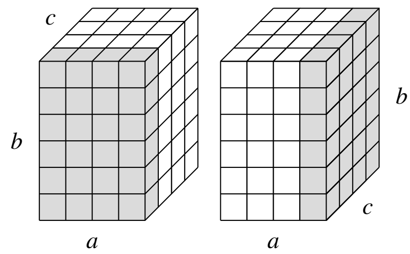
Multiplikation av naturliga tal är upprepad addition, så t.ex.

$$6 \cdot 7 = 7+7+7+7+7+7 = 42.$$

Även multiplikation är som bekant kommutativ, dvs. $a \cdot b = b \cdot a$ för alla naturliga tal a och b. Detta är dock inte lika uppenbart[1] som för addition. Ett sätt att se det på är att föreställa sig en inrutad rektangel med a rutor i ena riktningen och b rutor i den andra. Det totala antalet rutor t är oberoende av ordningen i vilken man räknar dem, och man för att $t = a \cdot b$, alternativt $t = b \cdot a$, beroende på vilken sida man utgår ifrån. Multiplikationen är också associativ, dvs. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, för alla naturliga tal a, b och c. Ett rätblock med sidorna a, b och c kan användas för att inse detta. Talen som multipliceras kallas **faktorer** och resultatet av multiplikationen kallas **produkt**.



Figur 1: $ca+cb = c(a+b)$



Figur 2: $(ab)c$=$a(bc)$

Sammantaget behöver man varken bry sig om ordning eller parenteser när man bara har en av operationerna addition eller multiplikation. Då både addition och multiplikation är inblandade, som i beräkningen av $3+4 \cdot 7$, kommer prioritetsregeln **multiplikation före addition** in, så att $3+4 \cdot 7 = 3+28 = 31$. Här gäller alltså inte läsriktningsprioritet. Vill vi att additionen skall utföras först måste vi markera det med parenteser: $(3+4) \cdot 7 = 7 \cdot 7 = 49$. Denna uträkning kan också göras med **distribution** som $(3+4) \cdot 7 = 3 \cdot 7 + 4 \cdot 7 = 21 + 28 = 49$. Allmänt gäller vid addition följt av multiplikation den **distributiva lagen**:

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,$$

för alla naturliga tal a, b och c. Detta övertygar man sig om genom att ta två rektanglar som består av $a \cdot c$ respektive $b \cdot c$ rutor och lägga dem bredvid varandra.

Om $a, b \in \mathbb{N}$ så säger vi att a är **större än** b, vi skriver $a > b$, om det finns $c \in \mathbb{N},\ c \neq 0$, sådant att $a = b + c$. Vi säger att b är **mindre än** a och skriver $b < a$, om $a > b$. Detta stämmer överens med den intuitiva uppfattningen om jämförelse mellan tal ("a är större än b om a är lika med b plus lite till"). Vi säger att a är **större än eller lika med** b, $a \geq b$, om $a > b$ eller $a = b$, dvs. om det finns $c \in \mathbb{N}$ sådant att $a = b + c$. (Notera att $a \geq a$, medan $a \not> a$, dvs. a är större än eller lika med a, men a är inte större än a.) För $a \geq b$ definierar vi **subtraktion** av a med b, $a - b = c$, där c är samma som ovan, dvs.

$$a - b = c, \text{ om } a = b + c.$$

[1] Att 5 påsar med 3 kolor i varje och 3 påsar med 5 kolor i varje är lika mycket härligt godis är inte uppenbart för ett litet barn.

I fallet $a < b$ finns inget $c \in \mathbb{N}$ sådant att $a = b + c$. Subtraktion i det fallet kräver att man lämnar de naturliga talen. Frågan diskuteras i nästa avsnitt.

Division är i någon mening den motsatta operationen till multiplikation, dvs. eftersom $6 \cdot 7 = 42$ så är $42/7 = 6$. I det här avsnittet handlar det endast om division av naturliga tal. Multiplikation av naturliga tal är som vi nämnde tidigare samma som upprepad addition och division är därför upprepad subtraktion. Vi får alltså $42/7 = 6$ eftersom $42 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 = 0$. (De gamla mekaniska räknemaskinerna byggde helt på denna princip.) Förutom vanligt bråkstreck använder vi i texten ibland $\div$ som divisionstecken[2]. Antalet gånger man kan utföra subtraktionen kallas **kvot**. Om man så småningom, som i exemplet ovan, kommer till 0, säger man att divisionen går jämnt ut. Om divisionen inte går jämnt ut får man en **rest**, dvs. ett tal som inte är 0, men som är för litet fär att man ska kunna subtrahera vidare. T.ex. får vi

$$45 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 = 3,$$

dvs. $45/7 = 6 + 3/7$.

Vid division av 45 med 7 får man alltså kvoten 6 och resten 3.

Att man vid division av n med m får kvot q och rest r, är samma sak som att n kan skrivas som $n = mq + r$, där resten r är ett naturligt tal mindre än m, dvs. $0 \leq r < m$. I exemplet ovan har vi att $45 = 7 \cdot 6 + 3$.

Det är värdefullt att kunna utföra så kallad **lång division** av naturliga tal för hand, inte minst för att underlätta polynomdivision längre fram. Algoritmen man använder är alltid densamma, men uppställningen kan variera, t.ex. "liggande stolen" eller "trappan". Vilken man väljer är helt oviktigt. Här nedan används "liggande stolen". Schematiskt ser den ut så här:

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{\text{Kvot}} \\ \hline \text{Täljare} & \text{Nämnare} \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Exempel. Vi önskar beräkna $8476 \div 23$.

För att det skall vara enklare att följa kalkylerna redovisas varje steg i en ny "stol". En förklaring ges efter exemplet.

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{} \\ \hline 8476 & 23 \\ \cline{2-2} \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{300} \\ \hline 8476 & 23 \\ \cline{2-2} -6900 & \\ \hline 1576 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{360} \\ \hline 8476 & 23 \\ \cline{2-2} -6900 & \\ \hline 1576 & \\ -1380 & \\ \hline 196 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{368 \longleftarrow \text{kvot}} \\ \hline 8476 & 23 \\ \cline{2-2} -6900 & \\ \hline 1576 & \\ -1380 & \\ \hline 196 & \\ -184 & \\ \hline \multicolumn{2}{l}{12 \longleftarrow \text{rest}} \end{array}$$

Vi ser här att $8476 \div 23 = 368$ med rest 12, dvs. $8476 \div 23 = 368 + 12 \div 23$, eller, som vi är mer vana vid att skriva,

$$\frac{8476}{23} = 368 + \frac{12}{23}.$$

[2]Det finns många tecken som används för att beteckna division, $\div$, : , /, eller ett vanligt bråkstreck.

Vi kan också skriva om resultatet utan något divisionstecken som $8476 = 23 \cdot 368 + 12$.

$\square$

Om du tycker att algoritmen är svårbegriplig eller krånglig kan du kanske ha hjälp av följande förklaring:

Det är väldigt opraktiskt att subtrahera talet 23 från talet 8476 mer än 300 gånger. Därför effektiviserar man genom att först räkna ut hur många hundra gånger 23 går i 8476. Eftersom $84 \div 23 = 3$ med rest 15 går 23 minst 300 gånger i 8476, men inte 400 gånger. Vi kan därmed skriva hundratalet 300 i kvoten och subtrahera $300 \cdot 23$ från 8476.

Vi har att $84 - 3 \cdot 23 = 15$ och $8476 - 300 \cdot 23 = 1500 + 76 = 1576$.

I tredje stolen får vi $157 \div 23 = 6$ med rest 19. Alltså går 23 minst 60 gånger i 1576, men inte 70 gånger. Vi får $157 - 6 \cdot 23 = 19$ och $1576 - 60 \cdot 23 = 190 + 6 = 196$. Vi kan nu lägga till 60 i kvoten.

Slutligen får vi $196 \div 23 = 8$ med rest 12. Alltså är $196 = 8 \cdot 23 + 12$ och kvotens entalssiffra är 8. Kalkylerna ovan kan sammanföras som

$$\begin{aligned} 8476 &= 300 \cdot 23 + 1576 = 300 \cdot 23 + 60 \cdot 23 + 196 = 360 \cdot 23 + 196 \\ &= 360 \cdot 23 + 8 \cdot 23 + 12 = 368 \cdot 23 + 12. \end{aligned}$$

Alltså $8476 \div 23 = 368$ med rest 12, vilket är samma sak som att $8476/23 = 368 + 12/23$.

Fallet då divisionen $a \div b$ går jämnt ut, alltså fallet $r = 0$, är speciellt intressant. I detta fall är $a = b \cdot c$ där c också är ett naturligt tal. Talet a är alltså produkten av de två faktorerna b och c. Det finns många synonymer för detta. Om divisionen $a \div b$ går jämnt ut så säger man att

- a är **delbart med** b, eller
- a **delas av** b, eller
- b **delar** a, eller
- b är **divisor till** a, eller
- b är **delare till** a, eller
- b är en **faktor i** a, eller
- a är en **multipel av** b.

T.ex. har vi att $8464 \div 23 = 368$ med rest 0. Detta innebär att $8464 \div 23 = 368$ så med andra ord är 8464 **delbart med** 23 och 23 en **faktor i** 8464.

Eftersom $a = 1 \cdot a$, så har a alltid delarna a och 1 (1 är med andra ord delare till alla tal). Om b är delare till a där $b \neq 1$ och $b \neq a$ så kallas b **äkta delare** till a.

Tal som är större än 1 och som saknar äkta delare kallas **primtal**. Tal som har äkta delare kallas **sammansatta tal**. Talet 1 är en enhet och kallas varken primtal eller sammansatt tal.

Alla tal som är delbara med två kallas **jämna**, övriga naturliga tal kallas **udda**. Att ett tal n är jämnt betyder att det ger rest 0 vid division med 2, dvs. $n = 2k$ för något naturligt tal k. Att n är udda betyder att det ger rest 1 vid division med 2 (den enda möjliga resten förutom 0), dvs. $n = 2k+1$ för något naturligt tal k.

De fem minsta primtalen är 2, 3, 5, 7 och 11. Alla jämna tal större än 2 har ju 2 som en äkta delare, så primtal större än 2 måste därför vara udda tal.

Talet 15 kan skrivas som produkt av primtalen 3 och 5, $15 = 3 \cdot 5$, och 15 har alltså 3 och 5 som äkta delare. I denna produkt kan faktorernas ordning varieras, dvs. $15 = 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$. Bortsett från det är faktoruppdelningen unik. För att övertyga oss om detta i det konkreta fallet kan vi resonera som följer: Om $15 = a \cdot b$, där a och b är naturliga tal större än 1, så är både a och b mindre än 15. Nu kan vi antingen testa alla möjliga produkter av tal mellan 1 och 15, eller också reducera antalet försök genom att inse att $4 \cdot 4 > 15$ och att minst ett av talen a och b därför måste vara mindre än 4. Vi ser då lätt att enda möjligheten att skriva 15 som produkt av primtal, om vi bortser från ordningen, är $15 = 3 \cdot 5$.

Resonemanget ovan om möjliga faktorer gäller generellt: Om talet c inte är ett primtal så har c en primtalsfaktor $p,\ 1 < p \leq \sqrt{c}$. Det är alltså relativt enkelt att avgöra om ett visst tal är ett primtal under förutsättning att talet inte är särskilt stort. Tag som exempel talet 97. Om 97 inte är ett primtal så har det en primtalsfaktor p som uppfyller

$$p \leq \sqrt{97} < \sqrt{100} = 10.$$

Det räcker då att konstatera att 97 inte finns i någon av ”multiplikationstabellerna” för primtal mindre än 10 för att dra slutsatsen att 97 är ett primtal.

För stora tal är det däremot tidsödande att avgöra om talet är ett primtal eller ej på detta sätt, till och med om det är ett datorprogram som genomför undersökningen. Det finns dock mer sofistikerade och snabbare sätt att undersöka riktigt stora tal om man har tillgång till en dator.

Det faktum att 15 bara kunde faktoriseras i primtalsfaktorer på ett enda sätt gäller generellt. Redan under antiken bevisade Euklides i Elementa (bok 9) följande centrala sats om uppdelning i primtalsfaktorer.

Aritmetikens fundamentalsats: Varje naturligt tal som är större än 1 kan skrivas som en produkt av primtal. Bortsett från ordningsföljden är primtalsfaktorerna entydigt bestämda. (Här utvidgar vi begreppet produkt något och kallar även ett ensamt primtal för en produkt av primtal.)

Som exempel på hur man kommer fram till en primtalsfaktorisering ska vi skriva talet 8464 som en produkt av primtalsfaktorer. Vi vet redan att $8464 = 23 \cdot 368$, men här agerar vi som om vi inte visste det. Talet är jämnt, så vi kan skriva $8464 = 2 \cdot 4232$. Nu ska 4232 faktoriseras; det är också ett jämnt tal. Vi fort sätter bryta ut tvåor så länge det går och får $8464 = 2 \cdot 4232 = 2 \cdot 2 \cdot 2116 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1058 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 529$. Talet 529 är udda, så vi får nu leta efter primtalsfaktorer större än två. Undesökning visar att 529 inte är delbart med vare sig $3, 5, 7, 11, 13, 17$ eller 19, men väl med 23, $529 = 23 \cdot 23$, och vi får slutligen

$$8464 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 23 \cdot 23 = 2^4 \cdot 23^2,$$

en produkt av primtal. (Här använder vi potenser med heltalsexponenter som ett kort skriv sätt för upprepad multiplikation av ett tal med sig självt, $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$. Potensräkning diskuteras ingående senare i kursen.)

Ett bevis för att varje tal kan skrivas som en produkt av primtal bygger på att ett tal som inte är ett primtal kan skrivas som produkt av två mindre tal. Antingen är dessa primtal, eller så kan de skrivas som produkt av ännu mindre tal, vilka i sin tur antingen är primtal eller kan skrivas som produkt av ännu mindre tal o.s.v.. Processen är ändlig, eftersom mängden av naturliga tal, skilda från noll, har ett minsta element, nämligen 1. Vi avstår här från att visa att faktorerna är entydigt bestämda, vilket är betydligt knivigare.

En annan av Euklides viktiga satser är:

Det finns oändligt många primtal.

Bevis. Antag motsatsen, dvs. antag att det bara finns ändligt många primtal,

$$p_1, p_2, \ldots, p_n.$$

Bilda produkten M av alla dessa och lägg till 1. Enligt aritmetikens fundamentalsats måste då $M + 1 = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$ vara en produkt av primtal, men det är inte möjligt eftersom talet ger rest 1 vid division med vilket primtal p_k som helst. Motsägelsen visar att vårt antagande om att primtalen är ändligt många är felaktigt, alltså finns det oändligt många primtal. $\square$

En lista över alla primtal skulle alltså bli oändligt lång, men man kan naturligtvis ge en ändlig lista över alla primtal upp till ett visst tal. Denna lista kan sedan användas vid primtalsfaktorisering av större tal. Vill man på ett systematiskt sätt plocka fram alla primtal upp till ett givet tal kan man använda **Erathostenes primtalssåll** från ca 230 före vår tid. Detta beskrivs i många läroböcker och kan säkert hittas på Internet. Idén är att utgå från alla naturliga tal från 2 till och med den önskade övre gränsen. Successivt stryker man alla äkta multipler av primtalen med början från 2, sedan 3, 5 o.s.v.. Det minsta överhoppade talet som är större än de hittills funna primtalen måste vara nästa primtal i listan. Då man strukit multiplerna av 2, 3 och 5 är minsta överhoppade talet 7, därefter 11 o.s.v..

1.1.2 Negativa tal

De naturliga talen och additionen av sådana är direkt sammankopplade med antalsräkning och därmed något som även mycket små barn förstår. Eftersom de övriga räknesätten för naturliga tal bygger på addition, så finns det en lättbegriplig tolkning också för dessa. Namnet "naturliga" speglar just det sätt på vilket vi uppfattar talen i $\mathbb{N}$ och deras egenskaper. Då det gäller negativa heltal är situationen lite annorlunda, även om också dessa har naturliga tolkningar. Vi är sedan barnsben vana vid minusgrader på vintern och vet att om det är fem grader varmt ($+5^\circ$) och temperaturen sjunker tio grader, så blir det fem grader kallt (-5°). Ett annat begrepp som ofta dyker upp i vardagslivet är "skuld", om man är skyldig någon 100 kronor behöver man en hundralapp för att nollställa sin ekonomi. Medan begreppet naturliga tal är ett av de begrepp som ligger i grunden för all matematik och som inte definieras, måste man definiera de negativa heltalen med hjälp av de naturliga talen. De naturliga talen och de negativa heltalen bildar tillsammans mängden av alla heltal, $\mathbb{Z}$. Man definierar sedan de fyra räknesätten inom den nya talmängden och visar att de har samma egenskaper som räknesätten för naturliga tal (med den väsentliga skillnaden att det i $\mathbb{Z}$ gör att subtrahera vilket tal som helst från vilket tal som helst utan att lämna mängden). Vi kommer här dock att nöja oss med den intuitiva uppfattningen om negativa tal illustrerad ovan och repetera hur man räknar med negativa tal utan att ge formella definitioner och bevis.

Vi utgår alltså från att vi, givet det naturliga talet n, har en uppfattning om vad $(-n)$ är, samt att vi vet hur man adderar och subtraherar i $\mathbb{N}$.

Om $a, b \in \mathbb{N}$, så gäller

- $-(-a) = a$
- $(-a) + b = b - a$ för $b \geq a$
- $(-a) + b = -(a - b)$ för $b < a$
- $(-a) + b = b + (-a)$
- $(-a) + (-b) = -(a + b)$
- $(-a) - b = (-a) + (-b)$
- $a - (-b) = a + b$
- $(-a) - (-b) = (-a) + b$

Exempel.

$$\begin{aligned} 3 + (-7) &= -(7-3) = -4 \\ (-3) + 7 &= 7 - 3 = 4 \\ (-3) + (-7) &= -(7+3) = -10. \end{aligned}$$

□

Multiplikation definieras som följer

$$\begin{aligned} (-a) \cdot b &= b \cdot (-a) = -(a \cdot b), \\ (-a) \cdot (-b) &= a \cdot b, \end{aligned}$$

för alla naturliga tal a och b. Den andra likheten ovan är den kända regeln “minus minus är plus”. Detta är en definition och alltså inget som kan härledas. Dock är det så att det inte är slumpen som avgör hur man väljer att definiera en operation. Multiplikation av heltal definieras på ett sätt som garanterar att räknereglerna för naturliga tal fortsätter gälla i $\mathbb{Z}$. Man kan ändå ge en intuitiv förklaring: om man tolkar minustecknet som byte av sida med avseende på 0 på tallinjen, så måste två successiva byten innebära att man hamnar på samma sida nollan som man utgick från. Likaså, om man säljer en skuldsedel resulterar det i att man får intäkter.

Exempel.

$$\begin{aligned} 4\cdot(-7) &= -(4\cdot 7) = -28 \\ (-4)\cdot(-7) &= 4\cdot 7 = 28. \end{aligned}$$

□

För att illustrera hur man går tillväga när man bevisar att de önskade räknereglerna fortfarande gäller visar vi att en trippel av negativa tal uppfyller den distributiva lagen. Vi har nämligen för alla naturliga tal a, b och c att

$$(-a)\cdot((-b)+(-c)) = (-a)\cdot(-(b+c)) = a\cdot(b+c),$$

och

$$(-a)\cdot(-b)+(-a)\cdot(-c) = (a\cdot b)+(a\cdot c) = a\cdot(b+c),$$

där vi i sista likheten utnyttjar den distributiva lagen för naturliga tal. Därmed har vi visat

$$(-a)\cdot((-b)+(-c)) = (-a)\cdot(-b)+(-a)\cdot(-c),$$

som är den distributiva lagen för en trippel negativa tal.

Delbarhet fungerar på samma sätt i $\mathbb{Z}$ som i $\mathbb{N}$. Tal som är delbara med 2 kallas jämna och har formen $n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$, tal som inte är delbara med 2 kallas udda och kan skrivas som $n = 2k \pm 1,\ k \in \mathbb{Z}$ (± 1 betyder att man kan välja mellan $+1$ och -1).

Olikheten $a > b$ för $a, b \in \mathbb{Z}$ definieras på samma sätt som för naturliga a, b, dvs. $a > b$ om det finns ett positivt tal c sådant att $a = b + c$. övriga olikheter definieras analogt.

1.1.3 Räkneregler

I början av kapitlet diskuterades räknereglerna för naturliga tal. Vi utvidgade sedan talområdet till att även omfatta negativa tal. Utvidgningen gjordes på ett sådant sätt att såväl priorits- som räknereglerna fortsatte att gälla. Nedan sammanfattas de prioritetsregler och räkneregler som behandlats i kapitlet. Observera att om a är ett heltal så kan talet $(-a)$ vara negativt (om a är positivt) eller positivt (om a är negativt).

Prioriteringsordning

1. Operation inom parenteser
2. Multiplikation och division
3. Addition och subtraktion
4. Vid lika prioritet gäller läsriktningsprioritet

RÄKNEREGLER FÖR HELTAL

För alla heltal a, b och c gäller det att

- $a+b=b+a$ **kommutativitet**
- $a+(b+c)=(a+b)+c$ **associativitet**
- $a+0=a$ **identitet**
- $a \cdot b=b \cdot a$ **kommutativitet**
- $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot(b \cdot c)$ **associativitet**
- $a \cdot 1=a$ **identitet**
- $(a+b) \cdot c=a \cdot c+b \cdot c$ **distributivitet**
- $a+(-a)=0$
- $a+(-b)=a-b$
- $-(-a)=a$ **minus minus är plus**
- $a \cdot(-b)=-(a \cdot b)$
- $(-a) \cdot(-b)=a \cdot b$ **minus minus är plus**
- $a-(b-c)=a-b+c$ **minus minus är plus**
- $a-(b+c)=a-b-c$

Övningar

1.1.1 Bestäm kvot och rest vid divisionerna nedan. Ange svaret på formen $n=m \cdot q+r$.

a. $7956 \div 21$
b. $7497 \div 21$
c. Är något av talen 7956 eller 7497 delbart med 21?

1.1.2 Skriv talen nedan som produkt av primtal.

a. 495
b. 47502
c. 249

1.1.3 Beräkna

a. $7-(-2) \cdot(3-9) \cdot((2+(-5)-8) \cdot(-3-(-5))-4)$
b. $(-4-2) \cdot((-6-(-9))-((6-(-7)+3) \cdot((-2)-3)+(-1) \cdot(7-(-4))))$

1.1.4 Skriv om följande uttryck utan parenteser.

a. $a-(-b) \cdot(a+1)-b \cdot(-a+1)$
b. $((-a) \cdot(-b)+a \cdot(b-2 \cdot(-a))) \cdot(-1+b)$

1.1.5 Ordna talen i listorna nedan i stigande ordning.

a. $5, 11, -2, 4$

b. $-a, b, -c, d$, där $a = 19, b = -20, c = -18, d = -100$

1.2 Bråkräkning

När man inför de negativa talen så får uttrycket $a - b$ med $a < b$ mening som ett (negativt) tal. På samma sätt ger man genom att införa **rationella tal** eller **bråktal** mening åt $a \div b$ som ett tal även då resten inte är 0. Både de rationella talen och de fyra räknesätten för dessa definieras på ett sätt som garanterar att räknereglerna som listats tidigare fortfarande gäller.

1.2.1 De rationella talen

Rationella tal eller **bråktal** skrivs p/q, där p och q är heltal och $q \neq 0$. Mängden av alla rationella tal betecknas med $\mathbb{Q}$. Utan att ge en formell definition kan vi säga att p/q är det tal som multiplicerat med q ger p. Därmed kan ett heltal p identifieras med det rationella talet $p/1$. Det betyder att alla heltal kan uppfattas som rationella tal. Mängden av alla heltal, $\mathbb{Z}$, är alltså en delmängd till mängden av alla rationella tal, dvs. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Talet 0 kan skrivas som $0/q$ för godtycklig nämnare $q \neq 0$. Allmänt gäller att $p/q = 0$ om och endast om $p = 0$. Observera att villkoret $q \neq 0$ fortfarande måste vara uppfyllt!

Ett rationellt tal kan alltid skrivas på (oändligt) många olika sätt, för om $s \neq 0$ är ett heltal så är

$$\frac{p}{q} = \frac{s \cdot p}{s \cdot q}.$$

För att övertyga sig om det ska man inse att om man multiplicerar talet till vänster med högerledets nämnare, så får man precis högerledets täljare:

$$s \cdot q \cdot \frac{p}{q} = s\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = s \cdot p.$$

(Här har vi använt den associativa lagen för en produkt av två heltal och ett rationellt tal.) Man säger att bråktalet p/q **förlängts** med (faktorn) $s \neq 0$ till $(s \cdot p)/(s \cdot q)$, eller att $(s \cdot p)/(s \cdot q)$ **förkortats** med s till p/q. Till exempel är $7/11$ och $14/22$ lika eftersom

$$\frac{7}{11} = \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 11} = \frac{14}{22}.$$

I allmänhet försöker man ange bråktal på enklaste formen så att täljaren p och nämnaren q inte har någon gemensam faktor utom ± 1 (sådana tal p och q kallas **relativt prima**). Man säger då att talet är skrivet på **enklaste bråkform**. Ett systematiskt sätt att hitta den enklaste bråkformen är att primtalsfaktorisera täljare och nämnare och förkorta med alla gemensamma primtalsfaktorer. Vi har t.ex. att

$$\frac{84}{30} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 7}{5} = \frac{14}{5}.$$

Man kan förlänga/förkorta med negativa faktorer också och speciellt kan man alltid se till att nämnaren är positiv:

$$\frac{-7}{-11} = \frac{(-1) \cdot 7}{(-1) \cdot 11} = \frac{7}{11} \quad \text{och} \quad \frac{7}{-11} = \frac{(-1) \cdot 7}{(-1) \cdot (-11)} = \frac{-7}{11}.$$

1.2.2 Räkning med rationella tal

Addition (och subtraktion) av bråktal med samma nämnare ges av addition (respektive subtraktion) av täljarna med samma nämnare:

$$\frac{11}{13}+\frac{5}{13}=\frac{11+5}{13}=\frac{16}{13} \quad \text{och} \quad \frac{11}{13}-\frac{5}{13}=\frac{11-5}{13}=\frac{6}{13}.$$

I allmänhet måste termerna skrivas om så att de får samma nämnare innan man kan addera eller subtrahera bråken. **Korsvis förlängning** av de två nämnarna fungerar alltid:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{d\cdot a}{d\cdot b}+\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{d\cdot a+b\cdot c}{d\cdot b}.$$

Det är dock en god vana att inte förlänga med mer än nödvändigt, eftersom det är jobbigare att räkna med stora tal och risken att räkna fel ökar. Då man arbetar med rationella funktioner, se avsnitt 4.3, blir detta extra viktigt. För att förlänga med så lite som möjligt letar man upp den den **minsta gemensamma nämnaren**, dvs. den minsta gemensamma multipeln av nämnarna. Ett systematiskt sätt att göra detta är att primtalsfaktorisera nämnarna och leta upp den minsta produkt av primtal som innehåller alla faktorer för nämnarna. Om vi t.ex. vill räkna ut

$$\frac{7}{12}+\frac{37}{30},$$

där båda talen är på enklaste bråkform, så använder vi att $12=2^2\cdot 3$ och $30=2\cdot 3\cdot 5$. De primtal som ingår är alltså 2 (med potensen 2), 3 och 5. Den minsta möjliga gemensamma nämnaren är alltså $2^2\cdot 3\cdot 5=60$. För att få denna nämnare så får vi förlänga med 5 respektive 2:

$$\frac{7}{12}+\frac{37}{30}=\frac{5\cdot 7}{5\cdot 12}+\frac{2\cdot 37}{2\cdot 30}=\frac{35}{60}+\frac{74}{60}=\frac{109}{60}.$$

Om man slaviskt följer den allmänna principen med korsvis multiplikation får man istället

$$\frac{7}{12}+\frac{37}{30}=\frac{30\cdot 7}{30\cdot 12}+\frac{12\cdot 37}{12\cdot 30}=\frac{210}{360}+\frac{444}{360}=\frac{654}{360}=\frac{109}{60},$$

vilket ger jobbigare räkningar.

Oavsett hur man väljer att utföra beräkningarna ska man i svaret alltid ange resultatets enklaste bråkform.

Subtraktion av bråktal görs på motsvarande sätt som addition:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{d\cdot a-b\cdot c}{d\cdot b},$$

Här, som för addition, bör man hitta den minsta gemensamma nämnaren

$$\frac{7}{12}-\frac{39}{15}=\frac{5\cdot 7}{5\cdot 12}-\frac{4\cdot 39}{4\cdot 15}=\frac{35}{60}-\frac{156}{60}=\frac{35-156}{60}=\frac{-121}{60}=-\frac{121}{60}.$$

Här hade vi $12=2^2\cdot 3$ och $15=3\cdot 5$, och minsta gemensamma nämnaren var alltså åter $2^2\cdot 3\cdot 5=60$.

Multiplikation av rationella tal ska definieras så att räknelagarna för heltalsmultiplikation fortfarande gäller. Det betyder att multiplikation med heltal skall motsvara upprepad addition. Alltså gäller exempelvis att

$$n \cdot \frac{c}{d} = \underbrace{\frac{c}{d} + \frac{c}{d} + \cdots + \frac{c}{d}}_{n \text{ termer}} = \frac{n \cdot c}{d}.$$

Vidare skall multiplikation vara associativ. Alltså gäller

$$\frac{c}{d} = 1 \cdot \frac{c}{d} = \frac{n}{n} \cdot \frac{c}{d} = \left(n \cdot \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{c}{d} = n \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{c}{d}\right).$$

Detta är möjligt endast om

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{n \cdot d}.$$

Sammantaget ger detta

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = a \cdot \frac{c}{b \cdot d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Vi fick alltså att den enda rimliga definitionen för multiplikation av rationella tal är

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Division av rationella tal ges av

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Detta motiveras av att kvoten

$$\frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d}$$

måste vara ett tal A sådant att

$$A \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

och vi ser att $A = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$ är det tal som uppfyller kravet, eftersom

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{d}{c} \cdot \frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b}.$$

Bråket q/p kallas ibland för det inverterade bråket till p/q (här förutsätts att $p, q \neq 0$). Vi skulle då kunna säga att man dividerar ett bråk med ett annat genom att multiplicera det första med det inverterade till det andra.

Vid närmare eftertanke är detta intuitivt självklart. Om man har en tolvbitarstårta och alla ska få en bit var så räcker den till tolv personer, men om man bara ger en halv bit till var och en så kan dubbelt så många få, alltså

$$\frac{12}{\frac{1}{2}} = 12 \cdot 2 = 24.$$

I kapitel 1.1.1 då vi räknade med enbart heltal skulle vi sagt att $13 \div 4$ ger kvoten 3 och resten 1, medan vi nu kallar $\frac{13}{4}$ kvot. Då handlade det om heltalsdivision som speglar t.ex. en fördelning: *om tretton ägg skall fördelas på kartonger som rymmer fyra ägg vardera så får man tre fulla kartonger och ett ägg över.* I detta kapitel handlar det om division för rationella tal. Alla rationella tal kan divideras, kvoten är alltid ett rationellt tal.

Ibland kan användningen av bråkstreck som divisionssymbol bli anledning till felläsning/feltolkning:

Vi har att

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b \cdot c}$$

men

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \div \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{b}$$

Därför är det viktigt att veta vad som avses då man använder ”dubbelbråk”. Att uttrycken ovan inte är samma sak, syns lätt i tryckt text, men inte lika lätt i handskriven text. Speciellt viktigt är det att skriva likhetstecknet på rätt nivå.

Tänk också på att ett dubbelbråk ofta innehåller ”osynliga parenteser”, vilket illustreras i nästa exempel.

Exempel. Vi skall skriva $\frac{\frac{1}{7} - \frac{3}{11}}{\frac{2}{63} + \frac{11}{18}}$ som ett bråktal på enklaste bråkform.

Vi subtraherar i täljare och och adderar i nämnare och utför sedan divisionen vilket ger

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{7} - \frac{3}{11}}{\frac{2}{63} + \frac{11}{18}} &= \left(\frac{1}{7} - \frac{3}{11}\right) \div \left(\frac{2}{63} + \frac{11}{18}\right) \\
&= \left(\frac{1 \cdot 11}{7 \cdot 11} - \frac{3 \cdot 7}{11 \cdot 7}\right) \div \left(\frac{2 \cdot 2}{7 \cdot 9 \cdot 2} + \frac{11 \cdot 7}{2 \cdot 9 \cdot 7}\right) \\
&= \left(\frac{11 - 21}{11 \cdot 7}\right) \div \left(\frac{4 + 77}{2 \cdot 9 \cdot 7}\right) = \frac{-10 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 7}{11 \cdot 7 \cdot 81} = -\frac{20}{99},
\end{aligned}$$

efter förenkling. □

Man ska inte vara för snabb med att multiplicera ihop faktorerna i nämnaren. Om man behåller faktoriseringen ända till sista steget är det mycket lättare att se vad man eventuellt kan förkorta med för att få svaret på enklaste bråkform.

1.2.3 Räkneregler

De prioritets- och räkneregler som gällde för heltalen gäller även för rationella tal. Här sammanfattas de räkneregler som tillkommer för de rationella talen. Observera att nämnaren $d \cdot b$ kan vara onödigt stor och att man alltid bör hitta den minsta gemensamma nämnaren istället.

För alla rationella tal, a/b och c/d, där $a,\ b,\ c$ och d är heltal, gäller det att

- $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{d\cdot a}{d\cdot b}+\dfrac{b\cdot c}{b\cdot d}=\dfrac{d\cdot a+b\cdot c}{d\cdot b}$
- $\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}=\dfrac{d\cdot a-b\cdot c}{d\cdot b}$
- $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}$
- $\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}$

Sist i avsnittet ska vi titta närmare på likhet och olikheter mellan rationella tal.

Likheten $a/b=c/d$ äger rum om och endast om (dvs. precis när)

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}=1$$

alltså om och endast om $ad=bc$. Både uttrycket **om och endast om** och uttrycket **precis när** betyder att påståendena före och efter är ekvivalenta. Att två påståenden är ekvivalenta betyder att antingen så är båda påståenden sanna, eller så är båda påståendena falska. För ekvivalenta påståenden kan det alltså inte vara så att ena påståendet är sant medan det andra är falskt. Ekvivalens mellan påståenden skrivs ofta med en dubbelpil, $\Leftrightarrow$. Notera att det måste stå påståenden på båda sidor, ekvivalenspilen kan inte användas som likhetstecken.

Olikheter och räkneregler för olikheter diskuteras något i avsnittet om reella tal och mer ingående i kursens andra del. Här går vi händelserna i förväg för att komma till insikt om hur man jämför positiva rationella tal.

Antag att a,b,c,d är positiva heltal. Det är rimligt att ha samma definition för olikhet som tidigare, dvs. vi utgår från att

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}\ \text{ om och endast om }\ \frac{a}{b}-\frac{c}{d}>0.$$

Nu kan vi skriva de två bråktalen på gemensam nämnare, subtrahera, och får

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}>0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{ad-bc}{bd}>0.$$

“Minus minus är plus”-regeln säger att detta inträffar om och endast om täljaren och nämnaren har samma tecken. Eftersom $b,d>0$, har vi att $bd>0$ och får slutligen

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}>0 \quad\Leftrightarrow\quad ad-bc>0 \quad\Leftrightarrow\quad ad>bc.$$

Vi sammanfattar

För alla rationella tal, a/b och c/d, där $a,\ b,\ c$ och d är heltal, gäller det att

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{om och endast om} \quad ad = bc$$

Om dessutom $a,\ b,\ c$ och d är positiva heltal, gäller det att

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \quad \text{om och endast om} \quad ad > bc$$

Vi avslutar med att konstatera en av de rationella talens viktigaste egenskaper som skiljer dem från heltalen: givet två olika rationella tal finns alltid ett tredje rationellt tal mellan dem, dvs. om $r_1, r_2 \in \mathbb{Q},\ r_1 < r_2$, så finns $r \in \mathbb{Q}$ sådant att $r_1 < r < r_2$. Även om det låter abstrakt är det i själva verket oerhört lätt att visa, välj helt enkelt

$$r = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

(talet mittemellan de två givna). Man kanske har svårt att omedelbart inse konsekvenserna av detta faktum. En konsekvens är att det, givet ett rationellt tal, inte finns ett "nästa" rationellt tal. En annan är att man kan tala om gränsvärden av rationella talföljder på ett meningsfullt sätt.

Övningar

1.2.1 Skriv följande rationella tal på enklaste bråkform

a. $\frac{5040}{40320}$ b. $\frac{6182}{-616}$

c. $\frac{(-42)\cdot 308\cdot 230}{(-60)\cdot 121\cdot(-69)}$ d. $\frac{1}{4} + \frac{3}{5}$

e. $3 + \frac{1}{4} + \frac{17}{6} + \frac{35}{8}$ f. $\frac{49}{17} - \frac{1}{5} + \frac{5}{3} - 3$

1.2.2 Skriv följande rationella tal på enklaste bråkform

a. $\frac{1}{4} - \left(\frac{4}{3} - \frac{13}{6}\right)$

b. $\frac{9}{4} - \frac{16}{5} - \left(\frac{11}{21} - \frac{26}{7} + 4\right) + \left(\frac{16}{5} - \frac{22}{15}\right)$

1.2.3 Skriv följande rationella tal på enklaste bråkform

a. $\frac{1}{7} \div \frac{4}{7}$ b. $\frac{6}{11} \cdot \frac{11}{24} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{38}{17}$

c. $\frac{13}{6} \cdot \frac{15}{4} \div \frac{55}{12}$ d. $-\frac{34}{3} \cdot \frac{12}{5} \div \left(-\frac{17}{15}\right)$

e. $\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{20}\right) \div \left(\frac{9}{100} \cdot \frac{5}{19}\right)$ f. $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{20} \div \frac{9}{100} \cdot \frac{5}{19}$

g. $\left(\frac{77}{8} \div \frac{4}{3}\right) \div \left(\frac{24}{13} \div \frac{6}{11}\right)$ h. $\frac{77}{8} \div \frac{4}{3} \div \frac{24}{13} \div \frac{6}{11}$

1.2.4 Skriv följande rationella tal på enklaste bråkform.

a. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \div \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right)$ b. $\frac{\frac{23}{6} - \frac{23}{8}}{\frac{49}{11} - \frac{19}{6}}$

c. $\frac{\frac{13}{4} - \frac{31}{12}}{\frac{6}{5} - \frac{2}{7}} - \frac{\frac{13}{11} - \frac{8}{9}}{\frac{23}{99}} \cdot \frac{46}{41}$

1.2.5 Skriv talen a, b, c, d i avtagande ordning.

a. $a = 2/3,\ b = 5/6,\ c = 7/8,\ d = 4/5$

b. $a = -1/5,\ b = -2/11,\ c = -3/14,\ d = -5/19$

1.3 Potenser med heltalsexponent

1.3.1 Potenser

I detta avsnitt introduceras begreppet potens för rationella tal, och därmed naturligtvis för alla heltal. Exponenten är här heltal men längre fram (i avsnitt 1.7) kommer exponenten att vara ett rationellt tal och slutligen ett reellt tal. De räknelagar som presenteras i avsnittet är allmängiltiga, de gäller även med reella exponenter.

1.3.2 Potens med heltalsexponent

Potenser med heltalsexponenter definieras av

$$
\begin{aligned}
a^0 &= 1, \quad \text{för } a \neq 0,\\
a^1 &= a,\\
a^2 &= a \cdot a,\\
a^3 &= a \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a,\\
a^n &= a \cdot a^{n-1} = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ faktorer}}, \quad \text{då } n \text{ är ett positivt heltal,}\\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \quad \text{då } n \text{ är ett positivt heltal och } a \neq 0.
\end{aligned}
$$

I definitionen ovan kan n bara vara ett heltal medan a kan vara såväl ett heltal som ett rationellt tal.

Vid beräkning av potenser av negativa tal måste man vara extra uppmärksam. De beräknas naturligtvis på samma sätt som potenser av positiva tal, så t.ex.

$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81.$$

Man måste skriva parentes runt talet, eftersom $-3^4 = -81 \neq (-3)^4 = 81$.

Eftersom $(-1)^2 = 1$, så gäller att: $(-a)^1 = -a$, $(-a)^2 = a^2$, $(-a)^3 = -a^3 = -(a^3)$ och allmänt

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n & \text{om} \quad n \text{ är ett jämnt heltal} \\ -a^n & \text{om} \quad n \text{ är ett udda heltal.} \end{cases}$$

Definitionen av multiplikation för rationella tal:

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} = \frac{p \cdot p}{q \cdot q} = \frac{p^2}{q^2}$$

ger för potenser av rationella tal att

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p^n}{q^n}.$$

I detta fall är det nödvändigt att använda förtydligande parenteser, eftersom man annars får

$$\frac{p^n}{q} \quad \left(\neq \frac{p^n}{q^n}\right).$$

1.3.3 RÄKNEREGLER

Vi sammanfattar här de regler som gäller vid räkning med potenser. De kan härledas om man skriver ut vad de olika potenserna är. Exempelvis är

$$(2^3)^4 = (2\cdot2\cdot2)^4 = (2\cdot2\cdot2)\cdot(2\cdot2\cdot2)\cdot(2\cdot2\cdot2)\cdot(2\cdot2\cdot2) = 2^{3\cdot4} = 2^{12}.$$

För a, $b \neq 0$ och m, n heltal gäller det att

- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.
- $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Vid räkning med potenser gäller prioritetsregeln att **potenser beräknas före multiplikation och division** och även före addition eller subtraktion, så t.ex.

$$2\cdot3^2 = 2\cdot9 = 18 \text{ och } 2+3^2 = 2+9 = 11.$$

Som tidigare skall operation inom parenteser beräknas först så t.ex.

$$(2\cdot3)^2 = 6^2 = 36 \text{ och } (2+3)^2 = 5^2 = 25.$$

Vid upprepad potensberäkning, som i 2^{3^3}, gäller att exponenten beräknas först så vi får

$$2^{3^3} = 2^{(3^3)} = 2^{27} = 134217728 \text{ och } 2^{5+3} = 2^{(5+3)} = 2^8 = 256.$$

Också här ger parenteser förtur så $(2^3)^3 = 8^3 = 512$

En liten varning! Det finns ingen standardprioritet för upprepad potensberäkning på räknare. Vissa kalkylatorer har ”exponenten först” prioritet, andra har läsriktningsprioritet. Uttrycket 2^{3^3} kan bli antingen 134217728 eller 512 beroende på räknarfabrikatet och ibland till och med på modellen. Använd alltid parenteser för säkerhets skull.

Här sammanfattar vi de prioritetsregler som behandlats hittills.

PRIORITERINGSORDNING

1. Operation inom parenteser
2. Exponent
3. Potens
4. Multiplikation och division
5. Addition och subtraktion
6. Vid lika prioritet gäller läsriktningsprioritet

Övningar

1.3.1 Beräkna

a. 5^2 b. 2^5 c. $(-3)^4$ d. $(-4)^3$
e. 1^{100} f. 100^1 g. 3^0 h. $(-3)^0$

1.3.2 Skriv följande som ett bråktal på enklaste form, utan potenser.

a. 2^{-2} b. $(-3)^{-3}$ c. 1^{-5}

1.3.3 Skriv som potenser av 2

a. $1/64$ b. $16^3/2^{10}$ c. $128^3/32^5$

1.3.4 Skriv följande som ett tal på enklaste bråkform, utan potenser.

a. $\dfrac{2^5 \cdot 3^{-7} \cdot 105 \cdot (-7)^{-2}}{2^3 \cdot 3^{-5} \cdot 5}$ b. $\dfrac{\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)^{-1} \div \left(\frac{3}{10}\right)^{-3}}{56 \cdot 10^{-6}}$

1.4 Reella tal

Vår önskan att kunna subtrahera obehindrat ledde oss till definitionen av negativa tal (och därmed heltal), medan behovet av rationella tal (bråktal) bottnade i att vi ville kunna dividera obehindrat. Låt oss nu, givet $b \in \mathbb{Q},\ b \geq 0$, försöka hitta ett tal $a \in \mathbb{Q},\ a \geq 0$, sådant att $a^2 = b$. Det är lätt för vissa tal b, men inte för andra. För $b = 4$ får vi $a = 2$, för $b = 0$ får vi $a = 0$, $b = 1/9$ ger $a = 1/3$. Men, kan man lösa problemet för $b = 2$? Det visar sig att svaret är nej.

Det finns inget rationellt tal vars kvadrat är lika med 2.

Bevis. Antag motsatsen, dvs. antag att det finns ett rationellt tal r sådant att $r^2 = 2$. Talet r kan då skrivas på enklaste bråkform $r = p/q$, där p och q är relativt prima heltal, dvs. p och q har inga gemensamma delare andra än ± 1. Eftersom $p^2 = 2q^2$ måste p vara ett jämnt tal, $p = 2s$. Det medför att $4s^2 = 2q^2$, och alltså att $q^2 = 2s^2$. Därmed måste även q vara jämnt. Vi fick att p och q båda är delbara med 2, vilket strider mot att de är relativt prima. Motsägelsen beror på det felaktiga antagandet att det finns ett tal $r \in \mathbb{Q}$ sådant att $r^2 = 2$, alltså finns inget rationellt tal vars kvadrat är lika med 2. $\square$

Givet ett icke-negativt tal b, definieras **kvadratroten** ur b som det icke-negativa tal a, vars kvadrat är lika med b, dvs. $\sqrt{b} = a$ är samma sak som $a \geq 0,\ a^2 = b$. Satsen vi visade ovan säger att kvadratroten ur 2 inte finns så länge vi med tal menar rationella tal. Detta antyder att det är på sin plats att utföra ytterligare en utvidgning av begreppet tal – vi har kommit fram till de reella talen.

Det är mycket svårt att definiera vad som menas med ett reellt tal. Vi måste därför hålla oss till en relativt intuitiv och förenklad bild av begreppet. Den framställning vi valt att presentera här (om än något viftande) bygger på talens decimalutvecklingar.

Vi är vana vid att skriva alla tal i ett s.k. positionssystem med basen 10. Positionssystem betyder att en siffras värde beror på dels vilken denna siffra är, dels vad den har för plats (position) i talets framställning. Att ett naturligt tal n skrivs som $n = c_4c_3c_2c_1c_0$ i basen

10 betyder att $n = c_4 \cdot 10^4 + c_3 \cdot 10^3 + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0$, där $0 \leq c_k \leq 9$. (Observera att det inte handlar om en produkt.) På liknande sätt kan man skriva rationella tal, $r = n,d_1d_2$ är samma sak som $r = n + d_1 \cdot 10^{-1} + d_2 \cdot 10^{-2}$. I praktiken hittar man ett rationellt tals decimalutveckling genom att utföra divisionen i $r = p/q$. Talet n är kvoten vid heltalsdivisionen $p \div q$, $p = nq + r_1$; den första decimalen d_1 är kvoten vid heltalsdivisionen $10r_1 \div q$, $10r_1 = d_1q + r_2$, etc. Det är inte svårt att inse att alla rationella tals decimalutvecklingar antingen är ändliga, eller avslutas periodiskt. Decimalutvecklingen blir ändlig om man i något skede kommer fram till rest 0. Den blir oändlig med periodiskt avslut om man aldrig kommer fram till rest 0. Periodiciteten beror på att det endast finns $q - 1$ möjliga rester som inte är noll, så att man förr eller senare kommer fram till en rest som varit framme tidigare, varpå decimalerna upprepas. Det omvända är också sant, alla ändliga decimalutvecklingar och alla decimalutvecklingar med periodiskt avslut ger rationella tal.

Exempel. Talet $1/8$ har den ändliga decimalutvecklingen $0,125$. □

Exempel. Talet $5/6$ har den periodiska decimalutvecklingen $0,8333\ldots$. □

Exempel. Talet $29/17$ har decimalutvecklingen

$$1,70588235294117647058823529411764\ldots.$$

De avslutande punkterna innebär som vanligt att mönstret fortsätter oavbrutet. I det här fallet har sifferkombimationen som upprepas periodiskt längd 16. □

Exempel. Skriv talet $0,3535353535\ldots$ på enklaste bråkform p/q. Decimalutvecklingen till talet $0,3535353535\ldots$ består av sekvensen 35, som upprepar sig om och om igen. I det här fallet har sekvensen som upprepar sig längd 2. Om $r = 0,3535353535\ldots$, så är det precis samma sak som att säga att

$$\begin{aligned}
10^2 \cdot r &= 10^2 \cdot 0,3535353535\ldots \\
&= 35,35353535\ldots \\
&= 35 + 0,3535353535\ldots \\
&= 35 + r
\end{aligned}$$

Notera att vi valde att multiplicera med precis den 10-potens som gjorde att precis en kopia av den sekvens som upprepade sig hamnade före kommatecknet. Om vi tittar lite närmare på likheterna ovan, så ser vi att vi har visat att

$$100r = 35 + r$$

Eftersom att

$$100r = 35 + r \Leftrightarrow 99r = 35$$

ser vi att $r = 35/99$, vilket är den enklaste bråkformen eftersom talen 35 och 99 är relativt prima. □

Exempel. Skriv talet $1,23330330330\ldots$ på enklaste bråkform p/q.

Decimalutvecklingen till talet $1,23330330330\ldots$ övergår efter ett tag till sekvensen 330, som upprepar sig om och om igen. I det här fallet har sekvensen som upprepar sig längd 3. För att kunna använda oss av samma metod som i föregående uppgift börjar vi med att skriva om vårt tal som

$$1,23+0,01\cdot 0,330330330\ldots$$

Om vi sätter $r=0,330330330$ får vi nu med precis samma metod som i den tidigare uppgiften att $10^3r=330+r$ så att $r=330/999$. Eftersom att täljare och nämnare nu har den gemensamma nämnaren 3 kan vi dela med 3 i täljare och nämnare och får då $110/333$. Vi får nu att

$$1,23+0,01\cdot 0,330330330\ldots=1,23+0.01\cdot\frac{110}{333}=\frac{123}{100}+\frac{1}{100}\cdot\frac{110}{333}$$

Om vi förenklar uttrycket ovan får vi att

$$1,23330330330\ldots=\frac{41069}{33300}$$

$\square$

Med ett **reellt** tal menas ett tal r som ges av en **decimalutveckling**, ändlig eller oändlig. Mängden av alla reella tal betecknas $\mathbb{R}$. De rationella talen är också reella tal, mängden av alla rationella tal är en delmängd av mängden av alla reella tal. Vi har alltså att

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}.$$

Varje positivt reellt tal har en heltalsdel n, som är ett naturligt tal, och en decimaldel (bråkdel)

$$r=n,d_1d_2d_3d_4d_5\ldots,$$

där alla talen d_i är siffror i talsystemet med bas 10, dvs. naturliga tal mellan 0 och 9. Detta ska tolkas som att

$$r=n+\frac{d_1}{10}+\frac{d_2}{100}+\frac{d_3}{1000}+\frac{d_4}{10000}+\frac{d_5}{100000}+\cdots.$$

Till varje positivt reellt tal finns ett motsatt, negativt tal

$$-r=-n,d_1d_2d_3d_4d_5\ldots=-\left(n+\frac{d_1}{10}+\frac{d_2}{100}+\frac{d_3}{1000}+\frac{d_4}{10000}+\frac{d_5}{100000}+\cdots\right).$$

De decimalutvecklingar som är oändliga och som inte avslutas periodiskt sägs vara **irrationella tal**. Genom att bara ta med ändligt många decimaler får vi ett rationellt tal som approximerar det reella talet, t.ex.

$$3,1415927=\frac{31415927}{10000000}\approx\pi.$$

Ju fler decimaler vi tar med dess bättre approximation får vi.

Man skulle kunna tro att olika tal måste representeras av olika decimalutvecklingar. Så är det inte. Betrakta talet $r=0,9999\ldots$. Det måste vara ett rationellt tal, eftersom dess utveckling avslutas periodiskt. Vi resonerar som i det tidigare exemplet och får

$10r = 9 + r$, dvs. $r = 1$.[3] Två decimalutvecklingar representerar samma reella tal om deras differens är 0, dvs. om skillnaden mellan deras approximationer närmar sig 0 när man ökar antalet decimaler. Detta innebär att t.ex. $3,25300000\ldots = 3,25299999\ldots$.

Reella tal kan adderas, subtraheras, multipliceras och divideras, genom att man utför operationerna på deras rationella approximationer. Genom att ta med fler och fler decimaler får man en följd av rationella tal som närmar sig (har gränsvärdet) de reella talens summa, differens, produkt eller kvot. Alla räkneregler och prioritetsregler som gäller för rationella tal gäller även för reella. Ofta är det önskvärt att ha en så enkel nämnare som möjligt. Man förlänger därför med ett lämpligt tal så att nämnaren blir ett t.ex. ett positivt heltal (om det låter sig göras).

Exempel.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

□

En fördel är att det är svårt att avgöra hur stort talet $1/\sqrt{2}$ är, medan det är betydligt lättare att se att $\sqrt{2}/2 \approx 0,7$. Observera att $1/\pi$ inte kan modifieras på liknande sätt.

Exempel. Förenkla

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Vi har

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{3}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{6}\right) \cdot \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{6}.$$

□

För att åskådliggöra de reella talen använder man ofta punkter på tallinjen. De rationella talen ligger som det heter tätt på linjen, dvs. hur liten sträcka vi än tar kommer den alltid att innehålla rationella tal. Ändå fyller de inte ut linjen, vi insåg tidigare att det finns ett "hål" i punkten som motsvarar $\sqrt{2}$ som vi nu "fyllt igen" med ett reellt tal.

I praktiken räknar vi bara med rationella approximationer till de reella talen, eller med symboler, som $\sqrt{2}$ [4], som representerar specifika reella tal. Redan de gamla grekerna visste att det inte finns rationella tal x sådana att $x^2 = 2, 3, 5, 6$ m.fl., med andra ord att $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ m.fl. inte är rationella tal. Man kan numera visa att det däremot finns sådana reella tal.

1.4.1 Olikheter för reella tal

I likhet med heltalen och de rationella talen finns det tre typer av reella tal, de positiva, de negativa och talet 0. Detta gör det möjligt att definiera olikhet, större än och mindre än för reella tal.

[3] Det korrekta förfarandet vore att summera en oändlig geometrisk serie, i det här fallet

$$\frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots.$$

[4] Notera att $\sqrt{2}$ endast är en symbol, det är beteckningen för det icke-negativa reella tal vars kvadrat är 2.

Det reella talet a är **större än** talet b, skrivs $a > b$, om och endast om $a - b$ är positivt. Talet a är **mindre än** talet b, skrivs $a < b$, om och endast om $a - b$ är negativt.

För alla reella tal a och b finns därmed tre möjligheter: $a = b$, $a > b$ eller $a < b$.

I detta sammanhang har man ofta användning av en praktisk mängdbeskrivning. Säg till exempel att vi, av någon anledning, är intresserade av alla reella tal x som uppfyller villkoret $x < 5$. Ett praktiskt sätt att beskriva denna mängd av tal är

$$\{x \in \mathbb{R} : x < 5\},$$

som tolkas och utläses på följande sätt. De speciella parenteserna $\{$ och $\}$ är mängdparenteser, (vardagligt krullparenteser). De inramar beskrivningen av objekten i mängden. Det inledande $x \in \mathbb{R}$ innebär att alla objekt skall tillhöra mängden av alla reella tal, kort sagt att alla objekt är reella tal. Kolon ':' läses **sådana att**. Efter kolontecknet kommer villkoret som skall vara uppfyllt för att ett reellt tal x skall få vara med i mängden. I ord läser man alltså: *mängden av alla reella tal x sådana att x är mindre än* 5. Vi har att $-3 \in \{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$ och $12 \notin \{x \in \mathbb{R} : x < 5\}$. Talet -3 tillhör mängden medan talet 12 inte tillhör mängden.

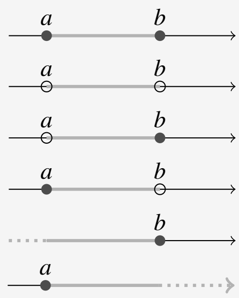
Mängden av alla positiva reella tal kan skrivas som $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, mängden av de negativa reella talen som $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ och av de **icke-negativa** reella talen som $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Mängdbeteckningen kommer vi också att använda för andra grundmängder än de reella talen. Man kan t.ex. skriva $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 5\}$ vilket betyder mängden av alla heltal vars kvadrat är mindre än 5, dvs. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Man inför de två s.k. **oändligheterna**, symbolerna $-\infty$ och ∞ som uppfyller $-\infty < x < \infty$ för alla reella tal x. Observera att oändligheterna inte är reella tal.

Vissa mängder, så kallade **intervall**, förekommer mycket ofta. Därför är det praktiskt att ha speciella beteckningar för sådana. Notera att grundmängden här alltid är de reella talen.

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\
[a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}
\end{aligned}$$



Lägg märke till att '(' respektive ')' betyder att ändpunkten *inte* är med och att '[' respektive ']' betyder att ändpunkten är med.

1.4.2 Räkneregler för olikheter

Också för olikheter gäller vissa räkneregler. De kan alla härledas från definitionen av olikhet. Vi ger här ett exempel på några regler och härledning.

Exempel. Vi skall bevisa att om a och b är reella tal sådana att $a < b$ så gäller det att $a + c < b + c$ för alla reella tal c.

Vi beräknar differensen $(b + c) - (a + c)$ och skall visa att denna är positiv om $a < b$. Men $(b + c) - (a + c) = b + c - a - c = b - a$, som är positiv eftersom $a < b$. Vi har därmed visat att $a + c < b + c$ om $a < b$. $\square$

Exempel. Vi skall bevisa att om a och b är reella tal sådana att $a < b$ och $c < 0$ så gäller det att $a \cdot c > b \cdot c$. (Det är den olikhetsregeln man i särklass oftast gör fel på.)

Vi beräknar differensen $a \cdot c - b \cdot c$ och skall visa att denna är positiv om $a < b$ och $c < 0$. Men $a \cdot c - b \cdot c = (a - b) \cdot c$. Eftersom $a < b$, dvs. $a - b < 0$, och $c < 0$ har vi att båda faktorerna i den sista produkten är negativa. Alltså är produkten $(a - b) \cdot c$ positiv, vilket innebär att $a \cdot c > b \cdot c$. $\square$

Vi återkommer till olikheter i del 2 av kursen.

För alla reella tal $a,\ b,\ c$ och d, gäller det att

- Om $a < b$ och $b < c$ så gäller $a < c$
- Om $a < b$ så gäller $a + c < b + c$
- Om $a < b$ och $c < d$ så gäller $a + c < b + d$
- Om $a < b$ och $0 < c$ så gäller $a \cdot c < b \cdot c$
- Om $a < b$ och $c < 0$ så gäller $a \cdot c > b \cdot c$
- Om $0 < a < b$ så gäller $a^2 < ab < b^2$
- Om $a < b < 0$ så gäller $a^2 > ab > b^2$
- Om $a, b > 0$ och $a^2 < b^2$ så gäller $a < b$
- Om $a, b < 0$ och $a^2 < b^2$ så gäller $a > b$

Övningar

1.4.1 Gäller det att

a. $2 \in \{x \in \mathbb{R} : x \leq 3\}$? b. $2 \leq 3$?

c. är det någon skillnad på utsagorna i (a) och (b) ovan?

1.4.2 Visa att räknereglerna för olikheter i avsnitt 1.4.2 gäller genom att använda metoden som presenteras i exemplet i samma avsnitt.

1.4.3 Ge exempel på reella tal a, b, c och d sådana att $a < b$ och $c < d$ men där $a - c < b - d$ inte gäller.

1.4.4 Skriv talen nedan på decimalform.

a. $\frac{17}{8}$ b. $\frac{7}{6}$ c. $-\frac{3}{14}$

1.4.5 Skriv talen nedan på enklaste bråkform.

a. $-2,33333\ldots$ b. $0,852852852\ldots$ c. $1,2399999\ldots$

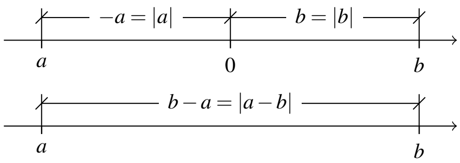
1.5 ABSOLUTBELOPP

I detta avsnitt introduceras ett viktigt begrepp, nämligen absolutbeloppet av ett reellt tal. Absolutbeloppet är i grund och botten ett avstånd, och därför alltid ett icke-negativt tal. Begreppet återkommer i avsnitt 4.4 då vi studerar funktioner samt i kursens andra del då vi studerar komplexa tal.

Om a är ett reellt tal så är **absolutbeloppet** av a

$$|a| = \begin{cases} a & \text{om} \quad a \geq 0, \\ -a & \text{om} \quad a < 0. \end{cases}$$

Tänk på att $-a$ är det motsatta talet till a. Om a är negativt så är $-a$ positivt, så t.ex. är $|-3| = -(-3) = 3$.



Figur 3: Olika avstånd

Av definitionen följer direkt att $|a| = |-a| \geq 0$ för alla reella tal a. **En geometrisk tolkning** av absolutbeloppet är att $|a|$ talar om hur långt från punkten 0 som punkten a ligger på tallinjen, dvs. $|a|$ är lika med avståndet mellan a och 0.

Om a och b är två reella tal så är $|a - b|$ avståndet mellan a och b på tallinjen. Vi har t.ex. att -7 och 3 ligger på avståndet 10 från varandra, eftersom $|-7 - 3| = |-10| = 10$.

Exempel. Vi söker de tal x som uppfyller $|3 - x| = 5$.

Vi söker de punkter på tallinjen, som ligger på avståndet 5 från 3. Det är två punkter, en till höger om 3, nämligen $3 + 5 = 8$, och en till vänster, $3 - 5 = -2$. □

Exempel. Vi söker de tal x som uppfyller $|3 - x| \leq 5$.

Nu söker vi de punkter på tallinjen, som ligger på avstånd högst 5 från 3. Det är alla punkter som ligger mellan 3 och $3 + 5 = 8$, eller mellan 3 och $3 - 5 = -2$, alltså alla punkter mellan -2 och 8, och vi får

$$\{x \in \mathbb{R} : |3-x| \leq 5\} = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \text{ och } x \leq 8\} = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 8\} = [-2, 8].$$

□

Tidigare definierades $\sqrt{x}$, för $x \geq 0$ som det (enda) icke-negativa tal vars kvadrat är x. Det betyder att $\sqrt{4} = 2$, och därmed att $\sqrt{2^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$. Generellt gäller att

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad \text{för alla reella tal} \quad a.$$

Övningar

1.5.1 Bestäm

a. $|7|$ b. $|-7|$ c. $|0|$

1.5.2 Bestäm alla reella tal x sådana att

a. $|x+1| = 1$ b. $|3-x| = 7,5$ c. $|x+4| = 0$
d. $|3-2x| = 5$ e. $|x-2| = -2$

1.5.3 Ange (utan beloppstecken) de x, som satisfierar

a. $|x-1| \leq 2$ b. $|x+3| < 5$ c. $|x+3| > 5$
d. $|x+2| \leq 0$ e. $2 < |x-2| \leq 3$ f. $|x+1| > 0$

1.6 Kvadratrötter

Vi har redan tidigare haft anledning att definiera och kommentera kvadratrötter. Här gör vi det något mer systematiskt. Vi återkommer till ämnet i kapitlet om funktioner.

1.6.1 Kvadratroten ur ett positivt reellt tal

Eftersom produkten av såväl två positiva tal, som två negativa tal, är positiv så gäller det att

$$x^2 = x \cdot x \geq 0 \text{ för alla reella tal } x.$$

Alltså har ekvationen $x^2 = b$ ingen reell lösning om $b < 0$. I avsnitt 1.4 behandlades svårigheterna med att avgöra huruvida en viss ekvation har lösningar i det talsystem man arbetar med. Där påpekades att ekvationen $x^2 = b$ alltid har en (dvs. minst en) reell lösning om $b > 0$. I själva verket har den alltid två, t.ex. har ekvationen $x^2 = 9$ lösningarna 3 och -3.

Med **kvadratroten** ur b, $\sqrt{b}$, där $b \geq 0$, menas det icke-negativa, reella tal, vars kvadrat är b.

Notera att $\sqrt{b} \geq 0$. Alltså är $\sqrt{9} = 3$ och inte -3 eller ± 3. Det gäller också att $\sqrt{0} = 0$. Enligt definitionen har vi alltså att $(\sqrt{b})^2 = b$. Men det gäller också att

$$\left(-\sqrt{b}\right)^2 = \left(-\sqrt{b}\right) \cdot \left(-\sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{b}\right)^2 = b.$$

Alltså gäller det att:

Ekvationen $x^2 = b$ har för $b > 0$ två olika **reella lösningar** (ibland även kallade **rötter**):

$$\sqrt{b} \text{ och } -\sqrt{b}$$

Man skriver ibland $x^2 = b \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{b}$, för $b \geq 0$. Med detta menas alltså att ekvationen har lösningarna $x_1 = \sqrt{b}$ och $x_2 = -\sqrt{b}$

Exempel. Ekvationen $x^2 = 9$ har således lösningarna (rötterna) $x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$, dvs. $x_1 = 3$ och $x_2 = -3$. $\square$

Exempel. Ekvationen $x^2 = 20$ har lösningarna (rötterna) $x_{1,2} = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5}$, eftersom direkt kontroll ger att $(2\sqrt{5})^2 = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 4(\sqrt{5})^2 = 4 \cdot 5 = 20$. $\square$

1.6.2 Räkneregler

Av definitionen av kvadratrot får vi följande räkneregler:

- $(\sqrt{a})^2 = a$ för $a \geq 0$.
- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ och $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, för $a \geq 0$ och $b > 0$.
- $\sqrt{a^2} = |a|$ för alla reella a, dvs.

$$\sqrt{a^2} = a \text{ om } a \geq 0 \text{ och } \sqrt{a^2} = -a \text{ om } a < 0.$$

- $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}$ för $b \geq 0$ och alla a, dvs.

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b} \text{ om } a \geq 0 \text{ och } \sqrt{a^2 \cdot b} = -a \cdot \sqrt{b} \text{ om } a < 0.$$

- $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$, om $a > 0$.
- $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ och $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$, $a \neq b$, $a,b > 0$.

Den första punkten följer direkt av definitionen av kvadratrot eftersom $\sqrt{a}$ är det icke-negativa tal vars kvadrat är a.

Punkt två kan bevisas genom att vi konstaterar att $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$ och att

$$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \cdot b.$$

Alltså är $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ enligt definitionen av kvadratrot.

På liknande sätt bevisas regeln för roten ur en kvot och de två efterföljande reglerna.

Den femte regeln följer av

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{\sqrt{a}}{a}.$$

Metoden som används i sista punkten kallas **förlängning med konjugatuttryck**. Uttrycken $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ och $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ kallas konjugerade, eller varandras **konjugat**. Om man multiplicerar de med varandra så får man (se avsnitt 1.8 för den s.k. konjugatregeln)

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - \sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{a}\sqrt{b} - (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b.$$

De två sista reglerna kan nu visas genom att man förlänger med konjugatet, så t.ex. för den första likheten har vi

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} \text{ för } a \neq b,\ a,b > 0.$$

Anmärkning. I allmänhet, alltså för de flesta tal a och b, är

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Till exempel ger $a = b = 1$ att $\sqrt{a+b} = \sqrt{2}$, medan $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 2$. På samma sätt är i allmänhet

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}.$$

Vi visar nu ett antal exempel på hur man kan använda räknereglerna.

Exempel. Ekvationen $4x^2 - 3 = 0$ får vi till $x^2 = 3/4$ genom att addera 3 till båda leden och sedan dividera dem med 4. Den har därmed lösningarna

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\square$

Exempel. Den tredje punkten implicerar att

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{3^2} = 3 = |-3|.$$

$\square$

Exempel. Den fjärde punkten handlar om att bryta ut ur eller multiplicera in faktorer i rotuttryck och vi har exempelvis att

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

och

$$-2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = -\left(2 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\sqrt{\frac{2^2 \cdot 3}{2}} = -\sqrt{6}.$$

$\square$

Exempel. Den fjärde punkten ger ibland möjlighet till förenkling om man har flera rötter sådana att talen under rottecknen har gemensamma faktorer. Här kommer ett exempel

$$\sqrt{3} + \sqrt{12} + \sqrt{27} + \sqrt{48} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 10\sqrt{3}.$$

$\square$

Exempel. Den näst sista punkten ger exempelvis att

$$\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{\left(\sqrt{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}\ (\approx 0{,}4).$$

$\square$

Exempel. Förlängning med konjugat (sista punkten) ger att man kan skriva om uttryck som

$$\frac{1}{5+\sqrt{6}}$$

på följande sätt

$$\frac{1}{5+\sqrt{6}}=\frac{5-\sqrt{6}}{(5+\sqrt{6})(5-\sqrt{6})}=\frac{5-\sqrt{6}}{5^2-(\sqrt{6})^2}=\frac{5-\sqrt{6}}{25-6}=\frac{5-\sqrt{6}}{19}$$

så att man får heltalsnämnare. $\square$

Exempel. Vi kan jämföra storleksordningen mellan tal som innehåller kvadratrötter utan att använda räknare. Låt oss jämföra talen $\sqrt{2}+1$ och $\sqrt{5}$. Eftersom vi inte vet vilket av dem som är störst, skriver vi frågetecken mellan dem. Vi använder räknereglerna för olikheter. Både vänster- och högerledet är positiva, alltså får vi samma olikhetstecken efter kvadrering

$$\sqrt{2}+1\ ?\ \sqrt{5} \quad\Leftrightarrow\quad (\sqrt{2}+1)^2\ ?\ (\sqrt{5})^2 \quad\Leftrightarrow\quad 2+2\sqrt{2}+1\ ?\ 5 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{2}\ ?\ 1.$$

Eftersom $\sqrt{2}>1$, gäller $\sqrt{2}+1>\sqrt{5}$. $\square$

Exempel. Här visar vi att

$$\frac{1}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}>1.$$

Enligt räknereglerna för olikheter kan vi förlänga med 3 och istället visa att

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}>3\cdot 1=3,$$

eftersom $3>0$. Vänsterledet kan nu skrivas om

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

Vi använder återigen räknereglerna för olikheter: $\sqrt{3}+\sqrt{2}>3 \Leftrightarrow (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2>9 \Leftrightarrow 3+2\sqrt{6}+2>9 \Leftrightarrow \sqrt{6}>2 \Leftrightarrow 6>4$, vilket är uppenbart, alltså är det sant att

$$\frac{1}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}>1.$$

$\square$

Övningar

1.6.1 Förenkla

a. $\sqrt{0,49}$	b. $\sqrt{90000}$
c. $\sqrt{6}\cdot\sqrt{75}$	d. $\sqrt{10}/\sqrt{125}$
e. $\sqrt{12}-\sqrt{3}$	f. $\sqrt{2}-\sqrt{4}+\sqrt{8}+\sqrt{16}-\sqrt{32}+\sqrt{64}$.

1.6.2 Lös ekvationen

a. $x^2-25=0$	b. $5-x^2=0$	c. $9x^2-4=0$
d. $16-6x^2=0$	e. $x^2=0$	

1.6.3 Skriv med heltalsnämnare

a. $2/\sqrt{6}$	b. $3/\sqrt{21}$	c. $1/(\sqrt{3}+\sqrt{2})$
d. $2/(\sqrt{11}-3)$	e. $1/(2-\sqrt{5})$	f. $(\sqrt{6}-\sqrt{3})/(\sqrt{6}+\sqrt{3})$

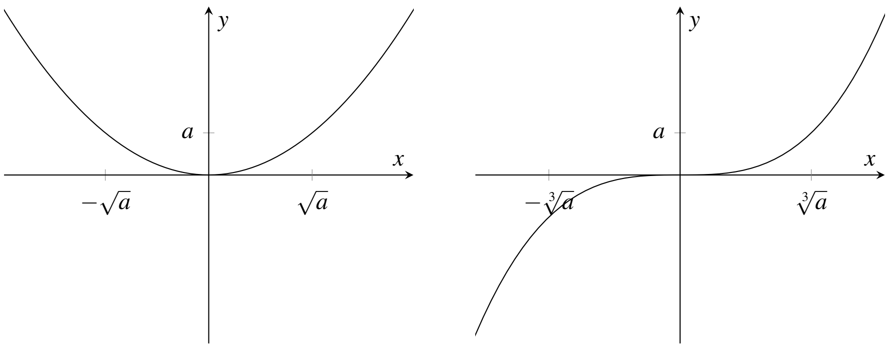
1.7 POTENSER MED RATIONELL EXPONENT

1.7.1 n-TE ROTEN UR REELLA TAL

Man kan visa att, om $b \geq 0$ och n är ett positivt heltal, så finns, i likhet med specialfallet $n = 2$, precis ett icke-negativt tal a sådant att $a^n = b$. Om n är ett jämnt tal så gäller också att $(-a)^n = b$. Om n är ett udda tal så gäller istället att $(-a)^n = -b$. Detta leder till följande definition av n-te roten ur ett icke-negativt tal.

Om n är ett positivt heltal och $b \geq 0$ är ett reellt tal, så menas med **n-te roten** ur b, $\sqrt[n]{b}$, det icke-negativa reella tal vars n-te potens är b, dvs. som uppfyller $(\sqrt[n]{b})^n = b$.

Om b är ett negativt tal och n är ett positivt, udda heltal så menas med $\sqrt[n]{b}$ det negativa reella tal vars n-te potens är b, dvs. som uppfyller $(\sqrt[n]{b})^n = b$.



Figur 4: Graferna till x^2 och x^3

Ekvationen $x^n = b$, där b reellt tal och n är ett positivt heltal, har då följande **reella lösningar (rötter)**:

1. $x = \sqrt[n]{b}$, om n är ett udda (positivt) heltal,
2. $x = \pm\sqrt[n]{b}$, om $b \geq 0$ och n är ett jämnt (positivt) heltal,
3. saknar reella rötter om n är jämnt och $b < 0$ (roten $\sqrt[n]{b}$ är i detta fall inte definierad).

För udda $n = 1, 3, 5, \ldots$ gäller att: $\sqrt[n]{-b} = -\sqrt[n]{b}$. Definitionen av $\sqrt[n]{b}$ gäller även för $n = 1$, vi har då att $\sqrt[1]{b} = b$ för alla reella tal b.

Exempel. Eftersom $2^4 = 16$ och $5^3 = 125$ så får vi

$$\sqrt[4]{16} = 2,\ \sqrt[3]{125} = 5 \text{ och } \sqrt[3]{-125} = -5.$$

direkt från definitionen. □

1.7.2 RÄKNEREGLER

Följande **räkneregler för n-te rötter** bevisas på samma sätt som motsvarande regler för kvadratroten.

RÄKNEREGLER FÖR n-TE RÖTTER

- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, för $a \geq 0$ om n är jämnt, för alla a om n är udda.
- $\sqrt[n]{a^n} = a$ för alla a om n är udda.
- $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ om n är jämnt.
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ och $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, för $a \geq 0$ och $b > 0$.

Exempel.

a. $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3}$

b. $\sqrt[3]{-81} = \sqrt[3]{-3^4} = \sqrt[3]{(-3)^3 \cdot 3} = -3\sqrt[3]{3}$

□

Precis som för kvadratrötter gäller i allmänhet

$$\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}.$$

1.7.3 POTENSER MED RATIONELL EXPONENT

I detta avsnitt definieras vad som menas med en **potens med rationell exponent**. Definitionen bygger både på potens med heltalsexponent (avsnitt 1.3) och på definitionen av n-te roten som gjordes i föregående avsnitt. Många av n-te rotens egenskaper är lättare att ta till sig efter en omskrivning som potens med rationell exponent. I slutet av avsnitt 1.7.4 "översätter" vi en viktig egenskap från potensspråk till rotspråk.

Om m/n, $(n > 0)$, är ett rationellt tal och $b > 0$ är ett reellt tal så ges $b^{\frac{m}{n}}$ av

$$b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}.$$

Speciellt gäller

$$b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}.$$

Om $m, n > 0$ gäller definitionen även för $b = 0$.

Speciellt är $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$. Exempelvis gäller för kvadratroten, att

$$\sqrt{b} = \sqrt[2]{b} = b^{\frac{1}{2}}.$$

Heltalet m kan skrivas som $m/1$. För att definitionen ovan ska vara lyckad måste $a^m = a^{\frac{m}{1}}$. Som tur är får vi $a^{\frac{m}{1}} = \sqrt[1]{a^m} = a^m$. Inte nog med det, eftersom

$$\frac{m}{n} = \frac{s \cdot m}{s \cdot n}$$

för alla $s \in \mathbb{Z}, s \neq 0$, vore det olyckligt om det skulle visa sig att resultatet är beroende av s. Så är det inte, för positiva reella tal b och $s, n > 0$ gäller att $b^{\frac{m}{n}} = b^{\frac{s \cdot m}{s \cdot n}}$. Istället för att ge ett generellt bevis illustrerar vi detta med ett exempel (exakt samma metod fungerar för allmänna m, n, s).

Exempel. För $b > 0$ gäller att $b^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{4}{6}}$.

Per definition har vi att

$$b^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{b^2},$$

medan

$$b^{\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{b^4}.$$

För att visa att båda talen är lika med varandra räcker det att visa att

$$\left(\sqrt[3]{b^2}\right)^6 = b^4$$

(det skulle betyda att $\sqrt[3]{b^2}$ är ett positivt tal vars sjätte potens är b^4, och alltså att $\sqrt[3]{b^2} = \sqrt[6]{b^4}$). Vi har

$$\left(\sqrt[3]{b^2}\right)^6 = \left(\left(\sqrt[3]{b^2}\right)^3\right)^2 = \left(b^2\right)^2 = b^4,$$

och därmed har vi visat att $b^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{4}{6}}$. □

För udda heltal n kunde vi definiera $\sqrt[n]{b}$ även för $b < 0$. Man använder därför ibland skrivsättet $b^{\frac{1}{n}}$ för udda n även då $b < 0$. Här krävs dock stor försiktighet, beroende på att rationella tal inte har en entydig framställning på formen p/q. Man måste komma ihåg att definitionen $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$ endast gäller för $b > 0$. Att det inte går att generellt definiera potens med rationell exponent för negativa tal framgår av följande exempel.

Exempel. Vi har att $(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -3$. Men vi har också att $1/3 = 2/6$. Om man skulle tillämpa definitionen av $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$ med $b = -27$ skulle man få

$$-3 = (-27)^{\frac{1}{3}} = (-27)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-27)^2} = \sqrt[6]{3^6} = 3,$$

en motsägelse. □

1.7.4 Räkneregler

Med hjälp av räknereglerna för n-te roten ur ett positivt tal och räknereglerna för potenser med heltalsexponent kan man visa att potensuttrycket $b^{\frac{m}{n}}$ med rationell exponent för $b > 0$ lyder samma **potenslagar** som potens med heltalsexponent (se avsnitt 1.3.3). Vi har alltså följande:

För alla positiva reella tal a och b och alla rationella tal x och y gäller det att

- $a^0 = 1$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $(ab)^x = a^x \cdot b^x$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
- $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

Potensregeln $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ med $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{m}$ (n och m är heltal, större än eller lika med 2) kan skrivas om till en räkneregel för n-te rötter:

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$, för alla $a > 0$ och alla $m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq 2$

Exempel. Här är några exempel på hur man tillämpar räknereglerna.

a. $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$ för $a \geq 0$.

b. $\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}} = (2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{18}} = \sqrt[18]{2}$

c. $\sqrt[12]{125} = \sqrt[12]{5^3} = (5^3)^{\frac{1}{12}} = 5^{\frac{3}{12}} = 5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$

d. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{8 \cdot 9} = \sqrt[6]{72}$

e. $\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2} - 2 + 2\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} - 2$

$\square$

Övningar

1.7.1 Förenkla

a. $27^{1/3}$
b. $4^{-0,5}$
c. $(\sqrt{8})^{2/3}$
d. $2^{1/3} \cdot 2^{-4/3}$
e. $3^{1/2}/9^{-3/4}$
f. $3^{-2/3}/(1/3)^{-4/3}$
g. $(0,0016)^{-0,25}$

1.7.2 Förenkla

a. $\sqrt[6]{9}$
b. $\sqrt[6]{8}$
c. $\sqrt[3]{-24}$
d. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}$
e. $\sqrt[5]{\sqrt{2}}$
f. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}$
g. $4/\sqrt[3]{16}$
h. $\sqrt[3]{81} - \sqrt[6]{9} + \sqrt{12} - \sqrt[6]{27} - \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$

1.7.3 Förenkla

a. $\sqrt[3]{3a^2} \cdot \sqrt[3]{9a}$
b. $\sqrt{x}/\sqrt[4]{x}$
c. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}$
d. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}}$
e. $\sqrt[4]{a^3}/\sqrt[3]{a}$
f. $\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$

1.8 ALGEBRAISKA OMSKRIVNINGAR

Syftet med algebraiska omskrivningar är att framställa algebraiska uttryck på den form som är lämpligast för det man sysslar med. Man talar ofta om ”förenkling”, men det gäller att komma ihåg att ordet ”enkelt” kan betyda olika saker i olika sammanhang.

Vid algebraiska omformningar utnyttjas alla de räkneregler som gäller vid räkning med reella tal, potenser, olikheter etc. Man bör därför vara synnerligen väl förtrogen med dessa.

När man skriver produkter med variabler inblandade utelämnar man ofta multiplikationssymbolen. Produkten $6 \cdot a$ skrivs $6a$, $a \cdot b \cdot c$ skrivs abc o.s.v.. Då man utelämnar multiplikationssymbolen måste man vara säker på att detta inte orsakar missuppfattning, abc skulle kunna vara en variabel istället för en produkt av tre variabler. Hur skall $2m + 10cm$ tolkas? Betyder det $210cm$ eller $2 \cdot m + 10 \cdot c \cdot m = 2 \cdot (1 + 5 \cdot c) \cdot m$? Det beror helt på sammanhanget. I detta kapitel skall abc tolkas som $a \cdot b \cdot c$ och $2m + 10cm$ betyder $2 \cdot m + 10 \cdot c \cdot m$. I tryckt text är konventionen att lutande stil betecknar enstaka variabler, så att flera lutande bokstäver i rad betecknar en produkt av motsvarande variabler. Enheter för meter, liter etc skrivs rakt, likaså bokstavskombinationer som är funktionsnamn eller liknande. T.ex. betecknar $\sin x$ funktionen sinus värde i punkten x, medan $sinx$ tolkas som $s \cdot i \cdot n \cdot x$; $2m + 10cm = 2 \cdot m + 10 \cdot c \cdot m$, medan 2 m+10 cm=210 cm.

Exempel. Här är några exempel på hur man med de vanliga räknereglerna kan förenkla algebraiska uttryck.

a.

$$\begin{aligned} 0m - 9y + 5y + 7m + 4y - m &= (10 + 7 - 1)m + (-9 + 5 + 4)y \\ &= 16m + 0 \cdot y = 16m \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} (m - (a - b - (c - m)) &= m - (a - b - c + m) \\ &= m - a + b + c - m = b + c - a \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} 3abc \cdot a^3bc^2 \cdot (-4b^2) &= 3 \cdot (-4) \cdot a \cdot a^3 \cdot b \cdot b \cdot b^2 \cdot c \cdot c^2 \\ &= -12a^4b^4c^3 \end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned} (3x^2y^3z)^4 &= 3^4 \cdot (x^2)^4 \cdot (y^3)^4 \cdot z^4 \\ &= 81x^8y^{12}z^4 \end{aligned}$$

e.

$$\begin{aligned} (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) &= 2x \cdot (4x^2 - 6x + 9) + 3 \cdot (4x^2 - 6x + 9) \\ &= 2x \cdot 4x^2 - 2x \cdot 6x + 2x \cdot 9 + 3 \cdot 4x^2 - 3 \cdot 6x + 3 \cdot 9 \\ &= 8x^3 - 12x^2 + 18x + 12x^2 - 18x + 27 \\ &= 8x^3 + 27 \end{aligned}$$

□

Vissa omskrivningar förekommer så ofta att man behöver kunna dem aktivt. Det räcker inte att veta att de finns och kunna slå upp dem i en formelsamling. För att kunna räkna ”med flyt” krävs en hel del utantillkunskap.

Följande viktiga identiteter behöver man kunna utantill:

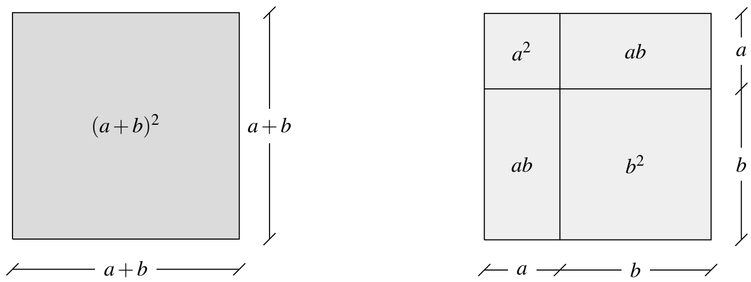
Kvadreringsreglerna: $\begin{cases} (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \\ (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 = (b-a)^2 \end{cases}$

Konjugatregeln: $a^2-b^2 = (a+b)(a-b) = (a-b)(a+b)$

Kuberingsreglerna: $\begin{cases} (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \end{cases}$

Faktoruppdelningarna: $\begin{cases} a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \\ a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) \end{cases}$

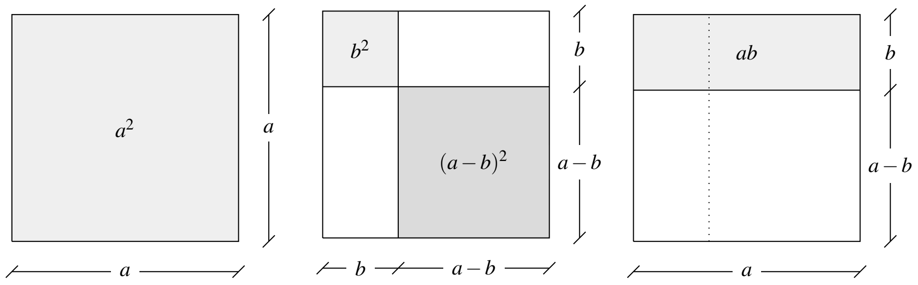
Vi ska nu också argumentera geometriskt för att kvadreringsregeln och konjugatreglerna stämmer. Vi börjar med den första av kvadreringsreglerna, och tar hjälp av följande bild:



Figur 5: Illustration till kvadreringsregeln $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

Eftersom att de två kvadraterna i figur 5 har samma sidlängd så har de samma area. Vi ska nu räkna ut den här arean A på två olika sätt. Om vi multiplicerar sidlängdena i den vänsta kvadraten ser vi att $A = (a+b)^2$. I figuren till höger räknar vi ut samma area genom att lägga ihop areorna för de fyra mindre rektanglarna som vi delat ipp den stora kvadraten i. Vi ser då att vi också har att $A = a^2+ab+ab+b^2$. Alltså är $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

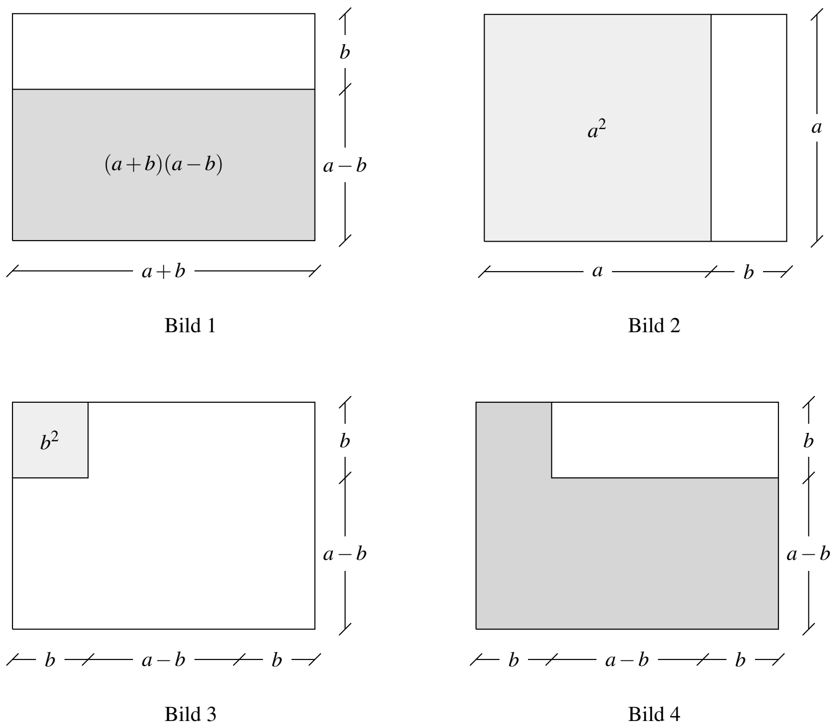
Vi visar nu ett geometriskt argument för den andra kvadreringsregeln, som säger att $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$. Till vår hjälp ska vi nu ta följande bild.



Figur 6: Illustration till kvadreringsregeln $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Precis som för den första kvadreringsregeln är arean A för de tre kvadraterna i figur 6 alla lika stora. Med hjälp av kvadraten längst till vänster ser vi att $A = a^2$. Med hjälp av de två andra figurerna kan vi dock se att vi kan bygga ihop samma area av de mindre rektanglarna. Ett sätt att göra det på är att lägga ihop kvadraten med area $(a-b)^2$ med de två(!) rektanglarna med area ab, och sedan dra bort en kvadrat med area b^2, eftersom att vi annars räknar den lilla kvadraten två gånger (en gång i varje rektangel med area ab. Om vi lägger ihop alla de areorna så har vi alltså kommit fram till att vi också måste ha att $A = (a-b)^2 + ab + ab - b^2$. Om vi lägger ihop de två uttrycken för A får vi att $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Sist men inte minst så ska vi visa att konjugatregeln gäller, dvs. att $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; och vi behöver nu fyra rektanglar.



Figur 7: Illustration till konjugatregeln $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Vi ska räkna ut arean A av det markerade området i bild 4 på två olika sätt. Om vi kombinerar areorna i bild 1 och bild 3 ovan, så ser vi att $A = (a+b)(a-b)+b^2$. Men om vi jämför bild 4 med bild 2 istället, så ser vi att de markerade områdena i de två bilderna har samma area. Det följer att vi måste ha att $A = a^2$, och vi får därför att $(a+b)(a-b)+b^2 = a^2$, vilket ju är samma sak som att $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Exempel. Här följer först tre exempel på hur man kan använda reglerna för att utveckla en potens (dvs. "öppna parenteserna") och sedan tre exempel på det omvända då man faktoriserar ett uttryck (framställer det som produkt av enklare uttryck).

a.

$$\begin{aligned}(3a+4b)^2 &= \text{[kvadreringsregeln]}\\ &= (3a)^2 + 2\cdot 3a\cdot 4b + (4b)^2\\ &= 9a^2 + 24ab + 16b^2\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}(3+x^2)(x^2-3) &= (x^2+3)(x^2-3)\\ &= \text{[konjugatregeln]}\\ &= (x^2)^2 - 3^2 = x^4 - 9\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}(x-2y)^3 &= \text{[kuberingsregeln]}\\ &= x^3 - 3\cdot x^2\cdot 2y + 3\cdot x\cdot (2y)^2 - (2y)^3\\ &= x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3\end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned}4x^2 - 9a^4 &= (2x)^2 - (3a^2)^2\\ &= \text{[konjugatregeln]}\\ &= (2x+3a^2)(2x-3a^2)\end{aligned}$$

e.

$$\begin{aligned}12x^4 - 2x^5 - 18x^3 &= \text{[alla gemensamma faktorer brytes ut]}\\ &= 2x^3\cdot(6x - x^2 - 9)\\ &= -2x^3(x^2 - 6x + 9)\\ &= \text{[kvadreringsregeln]}\\ &= -2x^3\cdot(x-3)^2\end{aligned}$$

f.

$$\begin{aligned}x^4 + 8xy^6 &= x\cdot(x^3 + 8y^6)\\ &= x\cdot\left(x^3 + (2y^2)^3\right)\\ &= [\text{ enligt formeln för } (a^3+b^3)]\\ &= x\cdot(x+2y^2)(x^2 - x\cdot 2y^2 + (2y^2)^2)\\ &= x\cdot(x+2y^2)(x^2 - 2xy^2 + 4y^4)\end{aligned}$$

$\square$

Exempel. Här är ett par numeriska exempel på hur man kan använda räknereglerna. I de två första beräknas kvadraten av ett tal med enkla räkningar.

a. $23^2 = (20+3)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + 3^2 = 400 + 120 + 9 = 529$

b. $29^2 = (30-1)^2 = 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 1 + 1^2 = 841$

c. $37^2 - 33^2 = (37-33) \cdot (37+33) = 4 \cdot 70 = 280$ $\square$

OBS: Uttrycket $a^2 + b^2$ (liksom $a^2 + ab + b^2$ och $a^2 - ab + b^2$) kan ej faktoruppdelas (med reella tal).

En generalisering av formeln för $a^3 - b^3$ är **allmänna konjugatregeln**.

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \cdots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

som visas genom att utveckla högra ledet.

1.8.1 Pascals triangel och $(a+b)^n$

Koefficienterna i utvecklingen av $(a+b)^n$ kan bestämmas med hjälp av **Pascals triangel**:

$$\begin{array}{r ccccccccccc c}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & & \\
1 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
\ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \text{o.s.v.}
\end{array}$$

Raden med $n = 3$ ger kuberingsregeln

$$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + 1 \cdot b^3$$

och raden med $n = 5$ innebär att

$$(a+b)^5 = 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4 \cdot b + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a \cdot b^4 + 1 \cdot b^5$$

Ett tal i triangeln fås genom addition av de två tal, som står närmast snett ovanför[5]. För att inse att detta ger koefficienterna i utvecklingen kan vi titta på $(a+b)^4$. Vi har att $(a+b)^4 = (a+b) \cdot (a+b)^3$. Men $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Alltså är

$$(a+b)^4 = a \cdot (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + b \cdot (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3).$$

[5] Det finns även en allmän formel för koefficienterna i utvecklingen $(a+b)^n$. Det vore olyckligt att behöva skriva upp 999 rader i Pascals triangel för att ta reda på en koefficient man behöver i tusende raden.

Man får en term a^3b ur båda produkterna, dels $b \cdot a^3$, dels $a \cdot 3a^2b$. Koefficienten för a^3b är alltså summan av koefficienterna för a^3 och a^2b.

Exempel. Här är tre ytterligare exempel på hur man använder Pascals triangel.

a.
$$\begin{aligned}(a-b)^4 &= (a+(-b))^4 \\ &= a^4 + 4a^3(-b) + 6a^2(-b)^2 + 4a(-b)^3 + (-b)^4 \\ &= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

b.
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

c.
$$(2a+b)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2b + 3(2a)b^2 + b^3 = 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$$ □

1.8.2 Rationella uttryck

Ett uttryck kallas rationellt om det är en kvot mellan två algebraiska summor av termer som i sin tur är produkter och heltalspotenser med positiv exponent av variabler, eventuellt med reella tal som koefficienter. Räkning med rationella uttryck följer samma räkneregler som räkning med rationella tal. Vid addition är det lämpligt att förlänga med ”så lite som möjligt”. Man bestämmer i så fall minsta gemensamma nämnare i stället för att ”multiplicera korsvis” på liknande sätt som vi gjorde för rationella tal. För att bestämma minsta gemensamma nämnare behöver man faktoruppdela de olika termernas nämnare. Primtalen här motsvaras av algebraiska uttryck som inte går att faktorisera reellt. I detta avsnitt arbetar vi med hjälp av kvadrerings-, kuberings- eller konjugatreglerna. Senare kommer vi även ta hjälp av faktorsatsen och polynomdivision.

Exempel. Här är ett antal exempel på omskrivningar av rationella uttryck. Notera att höger- och vänsterledet inte alltid är definierade för samma variabelvärden.

a. En användbar regel är

$$\frac{b-a}{c} = \frac{-(a-b)}{c} = -\left(\frac{a-b}{c}\right),$$

som ger att

$$\frac{b-a}{a^2-b^2} = -\left(\frac{a-b}{a^2-b^2}\right) = -\left(\frac{a-b}{(a-b)(a+b)}\right) = -\left(\frac{1}{a+b}\right)$$

b.
$$\frac{30x^4y^7}{12xy^{10}} = \frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot x^{4-1}}{2\cdot 2\cdot 3\cdot y^{10-7}} = \frac{5x^3}{2y^3} = \frac{5}{2}\cdot x^3\cdot y^{-3}$$

c.
$$\frac{x-y}{xy-x^2} = \frac{x-y}{x(y-x)} = -\left(\frac{y-x}{x(y-x)}\right) = -\frac{1}{x}$$

d.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)\div\left(\frac{1}{b}-\frac{b}{a^2}\right) &= \frac{(a^2+b^2+2ab)}{ab}\div\frac{(a^2-b^2)}{a^2b} \\
&= \frac{(a^2+b^2+2ab)\cdot a^2b}{ab\cdot(a^2-b^2)} \\
&= \frac{(a+b)^2\cdot a}{(a+b)(a-b)} \\
&= \frac{(a+b)a}{a-b}
\end{aligned}
$$

e.

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{2x-2}-\frac{1}{3x}+\frac{3x+1}{1-x^2} &= \text{[faktoruppdela nämnarna]} \\
&= \frac{5}{2(x-1)}-\frac{1}{3x}-\frac{3x+1}{(x+1)(x-1)} \\
&= \text{[minsta gemensamma nämnare är } 2\cdot 3\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x-1)\text{]} \\
&= \frac{5\cdot 3x(x+1)}{2(x-1)\cdot 3x(x+1)}-\frac{1\cdot 2(x+1)(x-1)}{3x\cdot 2(x+1)(x-1)}-\frac{(3x+1)\cdot 2\cdot 3x}{(x+1)(x-1)\cdot 2\cdot 3x} \\
&= \frac{(15x^2+15x)-(2x^2-2)-(18x^2+6x)}{2\cdot 3\cdot x(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{-5x^2+9x+2}{6x(x^2-1)} \\
&= -\left(\frac{5x^2-9x-2}{6(x^3-x)}\right)
\end{aligned}
$$

□

1.8.3 Uttryck som innehåller rötter

Vid omskrivning av rotuttryck kan man givetvis använda alla de räkneregler som gäller för reella tal. Det man speciellt skall tänka på är att $(\sqrt{a})^2 = a$ om $a \geq 0$, och att $\sqrt{a^2} = |a|$ för alla reella a.

Exempel. Här är två exempel på förenklingar av rationella rotuttryck

a.

$$\frac{3-c}{\sqrt{c-3}} = -\frac{c-3}{\sqrt{c-3}} = -\frac{\left(\sqrt{c-3}\,\right)^2}{\sqrt{c-3}} = -\sqrt{c-3} \text{ om } c>3.$$

Observera att uttrycket $\sqrt{c-3}$ är definierat om $c-3 \geq 0$, dvs. om $c \geq 3$, men $1/\sqrt{c-3}$ är definierat endast om $c > 3$.

b.

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sqrt{a^2+a^3}} &= \frac{a}{\sqrt{a^2(1+a)}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{1+a}} \\ &= \frac{a}{|a|\sqrt{1+a}} \\ &= \begin{cases} 1/\sqrt{1+a} \text{ om } a>0, \\ -1/\sqrt{1+a} \text{ om } -1<a<0. \end{cases}\end{aligned}$$

OBS: Var uppmärksam på tecknet vid inmultiplicering i och utbrytning ur rotuttryck!

□

Övningar

1.8.1 Förenkla

a. $10t-14u+7v-t-8v+14u-8v-u$
b. $70a+20c+33x+c-x-28a-40a-9c+41x$

1.8.2 Förenkla

a. $m+2p-(m+p-r)$
b. $3c-(2a+c-5b)-(2b-2a)$
c. $7a-2b-[(3a-c)-(2b-3c)]$

1.8.3 Förenkla

a. $2xz^7\cdot 10xz$
b. $a^2b^4c\cdot(-3ac^2)\cdot 9abc$
c. $-2p^2qr\cdot pq^7s^2\cdot(-7qr^3)$

1.8.4 Förenkla

a. $(3x^2y)^3$
b. $(4ab^2c^3)^2(-2a^2b)^3$
c. $(a^2)^p\cdot(a^pb^{3p})^2\cdot b^p$

1.8.5 Omforma (genom att multiplicera ihop parenteserna)

a. $(2x-y)(x+2y)$
b. $(2x-y)(x+2y)(x-y)$
c. $(a+x)(a^4-a^3x+a^2x^2-ax^3+x^4)$
d. $(x^2-2x+3)(2-3x-2x^2)$

1.8.6 Utveckla

a. $(3a-4b)^2$
b. $(a^3+2b^2)^2$
c. $(m^4+4)^2+(m^4-4)^2$

1.8.7 Förenkla

a. $(6-x)(x+6)$
b. $(a^2+y)(a^2-y)$
c. $(x^3+3)(x^3-3)(x^6+9)$

1.8.8 Utveckla

a. $(y+3x)^3$
b. $(3x+2y^2)^3$
c. $(x^4-6x)^3$

1.8.9 Uppdela i faktorer

a. $x^2 - a^4$

b. $9x^4 - 25x^2$

c. $18x + 81 + x^2$

d. $x^4y + 4x^2y^3 - 4x^3y^2$

e. $x^4 - x$

f. $3a^3 + 81b^3$

g. $x^2 - x^6$

h. $54x^2y^7 - 16x^5y$

1.8.10 Utveckla

a. $(x-1)^5$

b. $(1-y)^7$

c. $(2x+a^2)^5$

d. $(xy^2 - 3z)^6$

1.8.11 Förenkla

a. $(6a^7b^3c)/(16ab^3c^3)$

b. $(32x^ny^p)/(36x^{n+1}y^{p-1})$

c. $(2ay+y^2)/(2ay)$

d. $(12x^2y^2 + 20xy^2 - 8x^2y)/(4xy)$

1.8.12 Förenkla

a. $(2a+2b)/(b^2-a^2)$

b. $(x^2-4x^4)/(4x^2-4x+1)$

c. $(x-y)^3/(y-x)^5$

d. $(b^8-9)/(b^8-6b^4+9)$

e. $(a^3-b^3)/(b-a)^2$

f. $(a^3+1)/(a-a^2+a^3)$

g. $(x^4-16)/((x+2)(x^3-8))$

1.8.13 Förkorta (om möjligt)

a. $(a^3+b^3)/(a+b)$

b. $(a^4-b^4)/(a-b)$

c. $(a^4+b^4)/(a+b)$

d. $(a^5-b^5)/(b-a)$

1.8.14 Förenkla

a. $\left(\frac{x}{y^2} - \frac{y^2}{x}\right) \div \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}\right)$

b. $\left(1 - \frac{1}{x^4}\right) \div \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)$

c. $\left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right) \div \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{2}{1} + \frac{x-y}{x+y}\right)$

d. $\left(\frac{1/a}{b} - \frac{1/b}{a} + \frac{1}{2b/a} + \frac{2}{a/b}\right) \div \left(\frac{a^2+4b^2}{ab}\right)$

1.8.15 Skriv som ett bråk (på så enkel form som möligt)

a. $1/(x-3) + 1/(x+3) - 2/x$

b. $1 + 1/(2x) + 1/(x^2-4x)$

c. $1/(x^2+x) + 1/(1-x^2)$

d. $1/(x^3-8) + 1/(2x^2-8) + 1/(8-4x)$

1.8.16 Förenkla och avgör för vilka värden på c som följande uttryck är definierade

a. $\sqrt{c^2+4c+4}$

b. $c/\sqrt{c^2}$

c. $(\sqrt{c})^2/c$

d. $(c^2-9c)/\sqrt{9-c}$

e. $c/\sqrt{c^3-2c^2}$

f. $\sqrt{c^3+2c^2}/c$

2 EKVATIONER

Vi börjar med att diskutera vad en ekvation är och vad det är för generella regler som gäller vid ekvationslösning. Vi tittar också på hur ekvationer kan dyka upp på ett naturligt sätt vid problemlösning. Lösningsmetoder för några typer av ekvationer kommer i de följande avsnitten.

En ekvation är helt enkelt en likhet som (i regel) innehåller en eller eventuellt flera obekanta variabler. Vi tar några enkla exempel.

Exempel. Likheten $21-x=x-3$ är en ekvation med en obekant x. Om det är en enda obekant i ekvationen så brukar man ofta av tradition använda bokstaven x, men det går lika bra med vilken bokstav (symbol) som helst. Likheten $g^2-g=1$ är en ekvation med en obekant som heter g.

Likheten $3x+2y=31$ är en ekvation som innehåller två obekanta x och y.

Likheten $8=5+3$ är en ekvation som inte innehåller några obekanta utan enbart tre mycket bekanta heltal. □

Det är inte ovanligt att begreppen ekvation, formel och funktion blandas ihop. En ekvation beskriver ett samband. Detta samband kan vara uppfyllt för alla tillåtna variabelvärden, i så fall talar man om en **identitet**. I annat fall är man ofta intresserad av de specifika variabelvärden för vilka sambandet uppfylls, dvs. man är intresserad av att **lösa ekvationen**. En formel är ett uttryck som oftast innehåller symboler (variabler) och i vilket man kan sätta in olika variabelvärden. Funktionsbegreppet diskuteras ingående senare i kursen. Här kan vi nöja oss med att säga att en funktion kan ges av en formel, men behöver inte göra det, och att en ekvation ofta har formen $f=g$, där f och g är funktioner.

Nedan listar vi några ord som på ett naturligt sätt hör samman med begreppen ekvation, formel och funktion:

- **ekvation** – sätta in, obekant, lösa, lösa ut, lösning, lösningsmängd, rot, falsk rot, ekvivalenta
- **formel** – variabel, sätta in
- **funktion** – sätta in, variabel, värde, funktionsvärde, beräkna, nollställe, graf.

Givet en ekvation med en obekant x säger vi att talet a är **en lösning** till ekvationen om ekvationen omvandlas till en sann likhet mellan tal då vi sätter in $x=a$. Att **lösa** en ekvation innebär att bestämma dess lösningsmängd, dvs. hitta alla dess lösningar, eller motivera att lösning saknas om så skulle vara fallet. Ofta är man intresserad av alla lösningar inom en viss talmängd, t.ex. alla reella lösningar, alla positiva lösningar, alla heltalslösningar etc. Om inget annat sägs letar vi efter reella lösningar.

Exempel. Talet 12 är lösning till ekvationen $21-x=x-3$, eftersom $21-12=12-3=9$.

Talet 2 är lösning till ekvationen $2x^4-x^3-2x^2-2x-12=0$, därför att $2\cdot 2^4-2^3-2\cdot 2^2-2\cdot 2-12=32-8-8-4-12=0$. Genom att konstatera detta har vi dock inte löst ekvationen, eftersom den har fler lösningar. Vi har inte ens löst ekvationen i $\mathbb{R}$ då det finns en reell lösning till, nämligen $-3/2$. Däremot är 2 den enda lösningen i $\mathbb{Z}$.

Talet $a\pi$ är en lösning till ekvationen $\sin x = 0$ om och endast om (precis när) $a \in \mathbb{Z}$.

Ekvationen $x^2 + 2 = 0$ saknar reella lösningar, eftersom $x^2 \geq 0$ för alla reella x.

Ekvationen $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ är en identitet, dvs. dess lösningsmängd är hela $\mathbb{R}$.
□

När man inte har metoder för att lösa en ekvation får man nöja sig med att visa att det finns (alternativt inte finns) lösningar, att det finns ett visst antal lösningar, att de har vissa egenskaper etc. Ibland visar sig detta vara tillräckligt, t.ex. kan det räcka med att veta att en ekvation har en enda lösning och att denna är positiv, utan att man är så intresserad av exakt vad lösningen är. En sak som man ofta gör är att lokalisera lösningarna, dvs. bestämma relativt små intervall som innehåller varsin lösning. Vid behov kan man sedan använda numeriska metoder för att få närmevärden.

Givet en ekvation med två obekanta x, y säger vi att talparet (a, b) är **en lösning** till ekvationen om ekvationen omvandlas till en sann likhet mellan tal då vi sätter in $x = a,\ y = b$. Att **lösa** en ekvation innebär återigen att hitta alla lösningar, eller motivera att lösning saknas om så skulle vara fallet.

Exempel. Talparet $(1, 14)$ är en lösning till ekvationen $3x + 2y = 31$, eftersom $3 \cdot 1 + 2 \cdot 14 = 3 + 28 = 31$. Ekvationen har oändligt många lösningar, talparet (x, y), där

$$x = a,\ \ y = \frac{31 - 3a}{2}$$

är en lösning för alla reella a. Om vi låter x stå kvar som variabelnamn och skriver

$$y = \frac{31 - 3x}{2},$$

säger man att man **löst ut** y **i termer av** x, eller med hjälp av x. □

Två ekvationer kallas **ekvivalenta** om de har exakt samma lösningsmängd.

Exempel. Ekvationerna $x - 1 = 0$ och $(x-1)^2 = 0$ är ekvivalenta, eftersom båda har en enda lösning, $x = 1$. □

Exempel. Ekvationerna $x^2 = -1$ och $\sin x = 2$ är ekvivalenta i $\mathbb{R}$, eftersom båda saknar reella lösningar. □

Exempel. Ekvationerna $x(x-1) = x$ och $x - 1 = 1$ är inte ekvivalenta. Den andra har som enda lösning $x = 2$, medan den första har lösningarna $x_1 = 0,\ x_2 = 2$. □

Exempel. Ekvationerna $x - 1 = 1$ och $(x-1)^2 = 1$ är inte ekvivalenta. Den första har lösningsmängden $\{2\}$, medan den andra har lösningsmängden $x_1 = 0,\ x_2 = 2$. □

I ett av exemplen visade det sig att man tappar en rot vid förkortning med x. Det sista exemplet visar att en ekvation som fås ur en annan medelst kvadrering inte nödvändigtvis är ekvivalent med den givna. I den kvadrerade ekvationen dök en s.k. **falsk rot** upp.

Det är mycket viktigt att känna till vilka operationer man får utföra över en ekvation så att dess lösningsmängd bevaras, och minst lika viktigt att veta vilka operationer som kan leda till förlust av lösningar, alternativt uppkomst av falska lösningar.

Operationer som alltid leder till en ekvation ekvivalent med den givna är:

- addering av samma tal/uttryck till båda sidor av likheten;
- multiplikation/division av båda leden med ett tal/uttryck skilt från 0;
- förenkling av de två sidorna av likheten var för sig.

Vanliga operationer som kan leda till förlust av lösningar, alternativt uppkomst av falska lösningar, är:

- förlängning/förkortning med uttryck som skulle kunna vara lika med 0;
- kvadrering av båda leden.

Ett sätt att gardera sig mot falska lösningar är att sätta in de kandidater till lösningar man fått i den ursprungliga ekvationen och helt enkelt kontrollera att den verkligen omvandlas till en sann likhet. Det är svårare att gardera sig mot förlust av lösningar. Vi återkommer till ämnet i senare avsnitt.

Vad ska man då ha ekvationer till? En ekvation använder man alltså till att beskriva ett samband. Ofta innehåller den någonting som är obekant och i många fall är målet just att bestämma vad denna obekanta storlek är. I andra fall beskriver ekvationen något objekt, så t.ex. är $y = 2x + 3$ ekvationen för en rät linje, dvs. punkterna med koordinater lösningarna (x, y) till denna utgör en linje. Vi tar en titt på några exempel på problem som kan lösa med hjälp av ekvationer

Exempel. Kal har en storasyster som heter Ada. Skillnaden på dem i ålder är lika många år som Kal fyllde för 3 år sedan. Ada är 21 år gammal. Hur gammal är Kal?

Vi betecknar Kals nuvarande ålder med x. Skillnaden mellan deras ålder är då $21 - x$ och för 3 år sedan fyllde Kal $x - 3$. En ekvation som beskriver sambandet är alltså $21 - x = x - 3$. □

Exempel. Vi söker nu ett tal med den "magiska" egenskapen att om man ifrån kvadraten av talet subtraherar talet själv så får man exakt 1. Vilket är talet?

Vi betecknar det okända talet med g. Subtrahera talet själv ifrån kvadraten av talet är $g^2 - g$ och detta skulle bli 1. Alltså får vi ekvationen $g^2 - g = 1$. □

Exempel. Beda är i godisaffären för att köpa lördagsgodis. Hon köper 3 likadana chokladkakor och 2 likadana tablettaskar. Hon betalar 31 kronor. Hur mycket kostar chokladkakorna respektive tablettaskarna per styck?

Vi betecknar priset på chokladkakan med x och priset på en tablettask med y. Det totala priset på Bedas lördagsgodis blir då $3x + 2y$. Hon betalade 31 kronor så vi får alltså ekvationen $3x + 2y = 31$. □

2.1 FÖRSTAGRADSEKVATIONER

Vi ska nu titta på hur man löser så kallade **linjära ekvationer**.

Man säger att en ekvation är **linjär** om de obekanta endast förekommer som förstagradstermer, dvs. om det enda man gjort med de obekanta är att man multiplicerat dem med tal och sedan adderat eller subtraherat de olika termerna med varandra och med tal. Linjära ekvationer kallas också för **förstagradsekvationer**.

Exempel. Ekvationen $21 - x = x - 3$ är linjär för den enda obekanta variabeln x har bara adderats och subtraherats med tal. Samma sak gäller för $3x + 2y = 31$ där de två obekanta bara multiplicerats med tal.

Däremot är ekvationen $g^2 - g = 1$ inte linjär då den obekanta variabeln g här har multiplicerats med sig själv. Inte heller ekvationen $xy = 1$ är linjär då man här multiplicerat de två obekanta med varandra. □

Linjära ekvationer är det enklaste som finns att lösa. Vi börjar med att titta på linjära ekvationer med en obekant som vi (av tradition) kallar x. Strategin är enkel: samla alla termer som innehåller x på en sida och alla tal på den andra.

Exempel. Vi löser ekvationen $21 - x = x - 3$:

$$21 - x = x - 3 \Leftrightarrow (21 - x) + x = (x - 3) + x \Leftrightarrow 21 = 2x - 3 \Leftrightarrow$$

$$21 + 3 = (2x - 3) + 3 \Leftrightarrow 24 = 2x \Leftrightarrow \frac{24}{2} = \frac{2x}{2} \Leftrightarrow 12 = x.$$

Här betyder dubbelpilen $\Leftrightarrow$ att ekvationerna är ekvivalenta, dvs. har exakt samma lösningsmängd. Vi ser alltså att den givna ekvationen har en enda lösning, nämligen $x = 12$. (Därmed vet vi alltså att Kal ifrån exemplet i förra avsnittet är 12 år gammal.)

Vi löser nu ekvationen $21 + x = x - 3$:

$$21 + x = x - 3 \Leftrightarrow (21 + x) - x = (x - 3) - x \Leftrightarrow 21 = -3.$$

Här försvann x och kvar fick vi bara orimligheten $21 = -3$. Inget x i världen kan få den likheten att gälla, alltså saknar ekvationen lösning.

Avslutningsvis löser vi ekvationen $12 - (x - 3) = 15 - x$:

$$12 - (x - 3) = 15 - x \Leftrightarrow 12 - x + 3 = 15 - x \Leftrightarrow 15 - x = 15 - x \Leftrightarrow 15 = 15.$$

Denna sista likhet gäller uppenbarligen alltid, så till denna ekvation är vilket reellt tal x som helst en lösning. Den har alltså oändligt många lösningar. □

Vi såg i exemplet ovan att en linjär ekvation med 1 obekant kunde ha 1, 0 eller oändligt många lösningar. Vi ska visa att detta faktiskt är de enda möjligheterna som finns. En linjär ekvation med en obekant kan alltid förenklas till formen $ax = b$. Om $a \neq 0$ är det enda talet som satisfierar ekvationen $x = a/b$, dvs. ekvationen har som det heter **unik** lösning. Om $a = 0$ och $b = 0$ så är varje reellt tal lösning till ekvationen, eftersom $0 \cdot x = 0$ för alla reella x. I det fallet har ekvationen oändligt många lösningar. Den sista möjligheten är att $a = 0$, men $b \neq 0$. I det fallet finns ingen lösning, eftersom $ax = 0 \cdot x = 0 \neq b$ för alla reella x.

Vi ska nu titta på en linjär ekvation med fler än en obekant. Här blir strategin att välja ut en av variablerna att lösa ut (få ensam på ena sidan) på samma sätt som vi gjorde med x ovan.

Exempel. Vi löser ekvationen $3x+2y=31$ genom att lösa ut y:

$$3x+2y=31 \Leftrightarrow (3x+2y)-3x=31-3x \Leftrightarrow 2y=31-3x \Leftrightarrow y=\frac{31-3x}{2}.$$

Här ser vi att för varje x vi väljer så får vi precis ett y nämligen $y=(31-3x)/2$. Vi får alltså oändligt många lösningar. Två av dessa är $x=5, y=8$ och $x=6, y=13/2$. (Vi påminner om att talparet $x=5, y=8$ är en lösning.)

Denna ekvation var ju den vi fick i förra avsnittet då Beda köpte ett antal chokladkakor och tablettaskar. Vi ser nu när vi löser ekvationen att det inte finns en unik lösning och därför räcker inte informationen till för att räkna ut vad godiset kostar per styck. $\square$

Om man har en linjär ekvation med fler än en obekant så får man alltid oändligt många lösningar (eller ingen lösning alls om alla obekanta försvinner vid förenkling).

Övningar

2.1.1 Lös följande ekvationer.

a. $3(2-x)=-(1+2x)$ b. $3(5-3x)-2(4-x)=10$
c. $3(5-3x)-2(4-x)=7-7x$ d. $3(5-3x)-2(4-x)=6-7x$
e. $\frac{2}{3}x-\frac{5}{6}=0$ f. $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+2\right)=\frac{2}{3}$

2.1.2 Lös ut y i följande ekvationer.

a. $3(2-x)=-(1+y)$ b. $3(5-3y)-2(4-x)=10+2y$

2.2 Andragradsekvationer

En andragradsterm är en term i vilken den/de obekanta multiplicerats med varandra och med tal så att det sammanlagda gradtalet är två, t.ex. är $2x^2$, $3xy$, z^2 andragradstermer, medan xy^2, x^2y^2 inte är det. En ekvation i vilken den/de obekanta förekommer endast som första- och andragradstermer kallas en **andragradsekvation**. I det här avsnittet ska vi arbeta med andragradsekvationer med en obekant.

Även andragradsekvationer förenklas genom att man adderar eller subtraherar samma tal till båda sidor av ekvationen, multiplicerar eller dividerar båda leden med tal ($\neq 0$), eller gör omskrivningar. Syftet med förenklingarna och omskrivningarna är att få en ekvation som man klarar av att lösa och som är ekvivalent med den givna.

De enda andragradsekvationerna man kan lösa direkt är de som hör till den enklaste typen, $x^2=d$ där d är ett positivt tal. Vi har ju att $\sqrt{d}$ är det positiva tal vars kvadrat är d, $(\sqrt{d})^2=d$ om $d>0$. Eftersom det också gäller att $(-\sqrt{d})^2=d$ så har ekvationen de två lösningarna $\sqrt{d}$ och $-\sqrt{d}$. Att det inte kan finnas fler lösningarna återkommer vi till lite längre fram. T.ex. har ekvationen $x^2=9$ de två lösningarna $x_1=\sqrt{9}=3$ och $x_2=-3$. Om d skulle vara lika med 0, får vi endast lösningen $x=0$.

Exempel. Förhållandet mellan de två sidorna i en rektangel är 2:3. Om kortsidan är 10 m är alltså långsidan 15 m. Vi skall bestämma sidlängderna då arean är 54 m^2.

Om kortsidan är $2a$ m så är långsidan $3a$ m och arean $6a^2$ m^2. Alltså skall a vara lösning till $6a^2 = 54$. Division med 6 ger $a^2 = 9$ vars lösningar är 3 och -3. Endast positiva lösningen kan vara relevant så rektangelsidorna är 6 respektive 9 m. □

Vi klarar nu också av att lösa andragradsekvationer av typen $(x-s)^2 = d$ där d är ett positivt tal. Här är $x-s$ ett tal vars kvadrat är d. Då är $x-s=\sqrt{d}$ eller $x-s=-\sqrt{d}$. Lösningarna till $(x-s)^2 = d$ är således

$$x_1 = s+\sqrt{d} \text{ och } x_2 = s-\sqrt{d}.$$

Exempel. Ekvationen $(x-2)^2 = 9$ har de två lösningarna som ges av $x-2=\sqrt{9}=3$ och $x-2=-\sqrt{9}=-3$. Alltså är $x_1 = 5$ och $x_2 = -1$. □

Exempel. Långsidan i en rektangel är 6 meter längre än kortsidan. Bestäm sidlängderna då arean är 55 m^2.

Antag att kortsidan är x m. Då är långsidan $x+6$ m och arean $x(x+6)$ m^2. Vi söker således en lösning till ekvationen $x(x+6) = 55$. Utveckling ger

$$x(x+6) = 55 \Leftrightarrow x^2+6x = 55.$$

Genom att addera 9 till vänsterledet x^2+6x blir uttrycket en jämn kvadrat

$$x^2+6x+9 = x^2+2\cdot 3x+3^2 = (x+3)^2.$$

Vi adderar därför 9 till båda sidor av ekvationen och får

$$\begin{aligned} x(x+6) = 55 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2+6x = 55 \Leftrightarrow x^2+6x+9 = 55+9 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 64 \\ &\Leftrightarrow \quad x+3 = 8 \text{ eller } x+3 = -8 \Leftrightarrow x = 5 \text{ eller } x = -11. \end{aligned}$$

Eftersom endast positiva lösningar är möjliga så får vi $x = 5$. Sidorna är med andra ord 5 respektive 11 m.

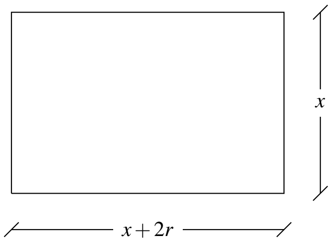
□

Metoden i det sista exemplet kallas **kvadratkomplettering**. Genom att addera en kvadrat med arean 9 m^2 gör vi om rektangeln till en kvadrat med sidan $x+3$. Rektangeln har arean 55 m^2, kvadraten har arean 64 m^2.

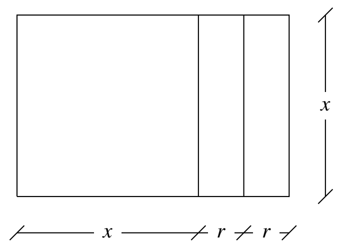
På samma sätt kan man kvadratkomplettera alla andragradsuttryck. Uttrycket

$$x^2+2rx = x(x+2r)$$

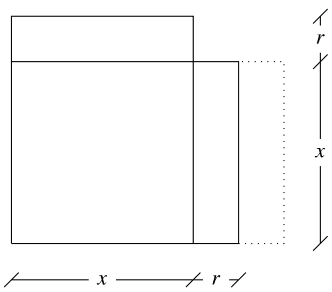
kan ses som arean av en rektangel med sidorna x och $x+2r$. Genom att addera en kvadrat med sidan r erhåller man en kvadrat med sidan $x+r$.



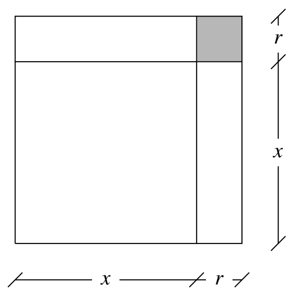
En rektangel med sidorna x och $x+2r$.



Kvadraten delas upp i en kvadrat och två rektanglar.



Om vi flyttar på en ena rektangeln så har vi nästan fått en större kvadrat; att vi lägger till den kallas för att vi kvadratkompletterar.



Klart! Den lilla kvadraten som vi beövde lägga till har sidlängd r, och därför area r^2.

Rent algebraiskt betyder kvadratkomplettering att vi, givet ett uttryck på formen $x^2 + bx$, försöker hitta ett tal vi kan addera, så att summan blir en jämn kvadrat. Eftersom $(x+s)^2 = x^2 + 2sx + s^2$, får vi att $2s$ måste vara lika med b och rätt tal att addera är $b^2/4$.

Med hjälp av kvadratkomplettering härleder vi nu en välkänd formel för lösningarna till vilken andragradsekvation som helst. Vi ska först titta på ekvationer där koefficienten framför x^2 är lika med 1.

$$
\begin{aligned}
x^2+px+q=0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x=-q \\
&\Leftrightarrow \quad x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q \\
&\Leftrightarrow \quad \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q \\
&\Leftrightarrow \quad x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \text{ eller } x+\frac{p}{2}=-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}
\end{aligned}
$$

som ger:

Andragradsekvationen $x^2+px+q=0$ har för $(p/2)^2-q\geq 0$ lösningarna

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \quad \text{och} \quad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Resultatet ovan har du säkert använt många gånger. Ofta skrivs det med en formel:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Den är inte svår att memorera, men minnet blir lätt diffust efter ett tag. Därför är det betydligt bättre att kunna kvadratkomplettera och på det viset komma fram till lösningen utan att använda formeln. Kvadratkomplettering är dessutom en metod som används i flera andra sammanhang och har ett värde i sig. Tecknet $\pm$ är praktiskt vid kalkyler men man bör alltid ange de två rötterna separat.

Exempel. Vi löser två andragradsekvationer genom att använda formeln vi precis härledde.

a. Ekvationen $x^2+6x+5=0$ har rötterna

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{(-3)^2-5} = -3 \pm \sqrt{9-5} = -3 \pm \sqrt{4} = -3 \pm 2$$

dvs. $x_1 = -3+2 = -1$ och $x_2 = -3-2 = -5$.

b. Om man vill använda formeln ovan när koefficienten framför x^2 inte är lika med 1 (men är skild från 0), måste man först dividera med den koefficienten. Ekvationen $6+3x-4x^2=0$ har koefficenten -4 framför x^2, så för att använda formeln måste vi först dividera med -4 vilket ger

$$x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} = 0.$$

Denna har lösningarna

$$x_{1,2} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{3}{2}} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{3}{2}} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9+96}{64}} = \frac{3}{8} \pm \frac{\sqrt{105}}{8}.$$

Alltså är $x_1 = (3+\sqrt{105})/8$ och $x_2 = (3-\sqrt{105})/8$. $\square$

Vi ska nu härleda en formel som ger andragradsekvationens lösningar i det allmänna fallet, samt diskutera hur man lätt kan bestämma antalet reella lösningar. Betrakta ekvationen

$$ax^2+bx+c=0, \quad \text{där } a \neq 0.$$

Division av båda leden med $a \neq 0$ och kvadratkomplettering ger ekvationen

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0,$$

som är ekvivalent med

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Uttrycket $D = b^2-4ac$ kallas ekvationens **diskriminant** och dess tecken avgör hur många reella lösningar den givna andragradsekvationen har. För att ekvationen ska ha reella lösningar måste högerledet ovan vara icke-negativt. Eftersom nämnaren $4a^2$

alltid är positiv, betyder det att ekvationen har reella lösningar om och endast om $D = b^2 - 4ac \geq 0$. Vi sammanfattar:

Andragradsekvationen $ax^2 + bx + c = 0$ har

- två olika reella lösningar om och endast om $D = b^2 - 4ac > 0$
- en reell lösning om och endast om $D = b^2 - 4ac = 0$
- inga reella lösningar om och endast om $D = b^2 - 4ac < 0$

Låt oss titta igen på uttrycket vi fick genom att kvadratkomplettera

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

För $D \geq 0$ kan vi använda konjugatregeln för att faktorisera, och får att den givna andragradsekvationen är ekvivalent med

$$\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0.$$

Eftersom en produkt endast blir noll då en eller flera av faktorerna är lika med noll, kan vi avläsa andragradsekvationens lösningar. (Vi ser också att det inte kan finnas fler än två lösningar.)

Andragradsekvationen $ax^2 + bx + c = 0$ har för $D = b^2 - 4ac \geq 0$ de reella lösningarna

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{och} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Detta resultat kan också skrivas med en formel:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

För $D > 0$ är de två reella lösningarna olika och den faktoriserade ekvationen har utseendet $(x - x_1)(x - x_2) = 0$; för $D = 0$ får vi samma lösning två gånger ($x_1 = x_2$) och faktoriseringen ger $(x - x_1)^2 = 0$. Det finns anledning att betrakta den enda reella lösningen som två reella lösningar som råkar sammanfalla. Man säger att ekvationen för $D = 0$ har en **dubbelrot**, eller, vilket är samma sak, att x_1 i det fallet har **multiplicitet två**.

Om man får en ekvation där faktoriseringen redan är gjord finns det ingen anledning att utveckla uttrycket för att sedan använda kvadratkomplettering eller någon lösningsformel. Man kan i det fallet avläsa lösningarna direkt.

Exempel. Ekvationen $(x - 1)(x + 3) = 0$ har de två lösningarna $x_1 = 1$ och $x_2 = -3$. Detta förklaras alltså av att en produkt av två tal är 0 om minst ett av talen är 0, men inte annars. Produkten $(x-1)(x+3)$ är 0 precis då $x-1=0$ eller $x+3=0$ vilket ger de två lösningarna.

På samma sätt ser vi att ekvationen $x^2+px=0$ har de två lösningarna $x_1=0$ och $x_2=-p$, eftersom $x^2+px=x(x+p)$. $\square$

Notera att ur faktoriseringen följer

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Övningar

2.2.1 Lös ekvationerna

a. $x^2+3x-4=0$	b. $3+2x-x^2=0$	c. $2x^2=3+x$
d. $3x+7x^2=0$	e. $4x^2+9=12x$	f. $5x^2+3x=1$

2.2.2 Kvadratkomplettera

a. x^2+4x+1	b. $4x^2-36x+100$	c. $3-12x-x^2$

2.2.3 Faktoruppdela (med reella tal)

a. x^2+x-6	b. $8-6x-2x^2$	c. x^2-x-1
d. x^2+x+1		

2.2.4 Bestäm en andragradsekvation med rötterna

a. 2 och -5	b. $-\frac{1}{2}$ och $\frac{2}{3}$	c. $1+\sqrt{5}$ och $1-\sqrt{5}$

2.3 Ekvationer som leder till andragradsekvationer

En del ekvationer kan överföras till en andragradsekvation genom en omskrivning av något slag. Det är dock viktigt att tänka sig för när man gör omskrivningar. Som vi har noterat tidigare kan det nämligen inträffa både att man skapar nya **falska lösningar** (falska rötter) och att man tappar bort lösningar.

Om en ekvation multipliceras med en faktor, som innehåller den obekanta variabeln, kan man få nya lösningar. Ekvationen $(x-1)(x-2)=0$ har lösningarna $x_1=1$ och $x_2=2$. Om vi multiplicerar med $x-3$ får vi ekvationen $(x-1)(x-2)(x-3)=0$ som har ytterligare en, nämligen $x_3=3$.

På samma sätt leder ofta division till att lösningar tappas bort. Ekvationen $x^2+4x=0$ har lösningarna $x_1=0$ och $x_2=-4$. Division med x leder till ekvationen $x+4=0$, lösningen $x_1=0$ har tappats bort.

Det är därför viktigt att pröva de erhållna rötterna i den givna ekvationen och, naturligtvis, tänka sig noga för då man dividerar med en faktor som innehåller den obekanta. Man ska alltid ställa sig frågan: är det jag har dividerat med någonsin lika med 0? Ett gott råd är att inte förkorta med annat än tal. Om man ser en gemensam faktor i alla termer kan man istället flytta över alla termer till ena ledet och bryta ut den gemensamma faktorn.

För ekvationer som innehåller rationella uttryck är det en bra idé att skriva alla uttryck med minsta gemensamma nämnare. Om man förlänger med den gemensamma nämnaren gäller det att vara medveten om att detta kan introducera falska rötter.

Exempel. Vi löser ekvationen $x - \dfrac{8}{x+2} = 0$.

Ekvationen innehåller ett rationellt uttryck och vi multiplicerar därför med nämnaren $x+2$. Lösningarna till den nya ekvationen $x(x+2)-8=0$ bestäms med kvadratkomplettering:

$$\begin{aligned} x(x+2)-8=0 &\iff x^2+2x=8 \iff x^2+2x+1=9 \\ &\iff (x+1)^2=9 \iff x_{1,2}=-1\pm 3. \end{aligned}$$

Lösningarna är alltså $x_1 = 2$ och $x_2 = -4$. Vi prövar dessa i ursprungsekvationen och finner att båda är korrekta. (Eftersom vi multiplicerade med $x+2$ är enda möjliga falska roten -2. Kontrollen var logiskt sett överflödig, men man bör *alltid* kontrollera genom insättning. Det är också ett sätt att upptäcka räknefel.) $\square$

Vissa ekvationer, som innehåller rottecken kan överföras till en andragradsekvation genom att de båda leden kvadreras, eventuellt upprepade gånger. Detta bygger på att om a och b är positiva tal och $b = \sqrt{a}$ så är $b^2 = a$. Notera att om b är ett negativt tal och $b = -\sqrt{a}$ så är också $b^2 = a$. Den kvadrerade ekvationen kan därmed ha fler lösningar än den givna.

Exempel. Vi löser ekvationen $\sqrt{2x+143} = x$.

Vi noterar först att eftersom $\sqrt{2x+143} \geq 0$ så måste $x \geq 0$. Båda leden kvadreras. Den nya ekvationen $2x+143 = x^2$ skrivs om till

$$x^2 - 2x - 143 = 0.$$

Denna har lösningarna $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{144} = 1 \pm 12$. Roten $x_1 = 13$ är rot till givna ekvationen eftersom $\sqrt{2\cdot 13+143} = \sqrt{169} = 13$. Däremot är $x_2 = -11$ en falsk rot, eftersom vi redan från början noterade att det är nödvändigt att $x \geq 0$. Denna falska rot fås p.g.a. kvadreringen och är lösning till $\sqrt{2x+143} = -x$. $\square$

Exempel. Vi löser ekvationen $1 + \sqrt{x^2+5} = 2x$.

För att vid kvadrering bli av med ett rotuttryck så måste detta vara ensamt på ena sidan i ekvationen. Vi skriver därför ekvationen som $\sqrt{x^2+5} = 2x-1$ (och noterar att eventuella lösningar måste uppfylla $2x-1 \geq 0$). Kvadrering ger $x^2+5 = (2x-1)^2$ som utvecklas till $x^2+5 = 4x^2-4x+1$, dvs.

$$3x^2 - 4x - 4 = 0.$$

Lösningarna är $x_1 = 2$ och $x_2 = -2/3$. Nu måste prövning ske genom insättning i den givna ekvationen, eller hellre genom prövning i ekvationen $\sqrt{x^2+5} = 2x-1$, varvid endast tecknet behöver prövas, eftersom $q^2 = p \iff q = \sqrt{p}$ eller $q = -\sqrt{p}$:

För $x_1 = 2$ får vi högerledet

$$HL = 2x-1 = 2\cdot 2-1 = 4-1 = 3 > 0,$$

så $x_1 = 2$ är en lösning till den givna ekvationen. För att upptäcka eventuella räknefel kan vi kontrollera även vänsterledet. Vi får

$$VL = \sqrt{x^2+5} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$$

vilket bekräftar att $x_1 = 2$ är en lösning till den givna ekvationen.

För $x_2 = -2/3$ får vi

$$HL = 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 1 < 0,$$

alltså är $x_2 = -2/3$ en falsk rot.

Svar: Ekvationen har roten $x_1 = 2$. □

Flera olika typer av ekvationer, t.ex. fjärdegradsekvationer som saknar x- och x^3-termer, vissa ekvationer som innehåller rotuttryck och en del andra, kan överföras till andragradsekvationer med lämpliga **substitutioner**.

En fjärdegradsekvation som saknar x- och x^3-termer, dvs. en ekvation på formen

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

kan med substitutionen $x^2 = t$ överföras till en andragradsekvation för t

$$at^2 + bt + c = 0.$$

För varje icke-negativ lösning t till denna andragradsekvation får vi för fjärdegradsekvationen de reella lösningarna $x_{1,2} = \pm\sqrt{t}$, ty $x^2 = t$.

Exempel. Vi löser ekvationen $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$.

Sätt $x^2 = t$. Då fås $t^2 - 20t + 64 = 0$ som har lösningar

$$t_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 - 64} = 10 \pm 6, \text{ dvs. } t_1 = 16 \text{ och } t_2 = 4.$$

Eftersom vi satte $t = x^2$, så får vi att $x^2 = t_1 = 16$ ger $x_1 = 4$ och $x_2 = -4$, samt att $x^2 = t_2 = 4$ ger $x_3 = 2$ och $x_4 = -2$. Ekvationen $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ har alltså fyra reella lösningar och de är $4, -4, 2$ och -2. □

Ibland är det enklast att lösa en ekvation som innehåller rottecken med hjälp av en substitution.

Exempel. Vi löser ekvationen $x + \sqrt{x} = 6$.

Sätt $\sqrt{x} = t$. Då fås $t^2 + t = 6$ vars lösningar är

$$t_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{-1 \pm 5}{2}, \text{ så } t_1 = 2 \text{ och } t_2 = -3.$$

Vi satte $t = \sqrt{x}$, så $\sqrt{x} = t_1 = 2 \Rightarrow x = 4$, medan $\sqrt{x} = t_2 = -3$ är orimligt.

Den givna ekvationen har en enda lösning, $x = 4$. □

Övningar

2.3.1 Lös ekvationerna.

a. $x+3=4\cdot x^{-1}$ b. $x+9x^{-1}=12$
c. $3+x^{-2}=x^{-1}$

2.3.2 Lös ekvationerna.

a. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=1$ b. $x+1+\frac{1}{x+1}=0$

2.3.3 Lös ekvationerna genom kvadrering.

a. $x-6=\sqrt{x}$ b. $x+1=\sqrt{x^2+5}$
c. $x-2=\sqrt{x^2-4x+5}$ d. $3+\sqrt{x^2-6x+9}=2x$
e. $x+2\sqrt{x}=8$ f. $\sqrt{x+132}=x$
g. $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+6}-x=3$ h. $2x+\sqrt{x^2+x}=1$
i. $\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}$

2.3.4 Lös ekvationerna.

a. $x^4-7x^2+12=0$ b. $1225-74x^2+x^4=0$
c. $x^4-x^2-12=0$ d. $24x^2=72+2x^4$
e. $6x^4=7x^2+3$

2.3.5 Lös ekvationerna med substitution.

a. $x-6=\sqrt{x}$ b. $x+6\sqrt{x}=1$
c. $x+2=3\sqrt{x}$

2.4 Linjära ekvationssystem

Ett **ekvationssystem** är ett antal ekvationer med (oftast) flera obekanta som man vill lösa samtidigt, dvs. man vill hitta alla värden för de obekanta som uppfyller alla ekvationer samtidigt. Precis som för enskilda ekvationer finns ett antal operationer som garanterat leder till ekvationssystem ekvivalenta med det givna, dvs. ekvationssystem som har exakt samma lösningar som det givna. Dessa operationer är

- Omkastning av två ekvationers ordningsföljd;
- Multiplikation av en ekvation med tal skilt från 0;
- Addition av en ekvation multiplicerad med ett tal till en annan ekvation.

Man kan använda sig av dessa operationer för att förenkla och omarbeta vilket ekvationssystem som helst. Det visar sig att de är tillräckliga för att lösa en speciell typ av ekvationssystem, nämligen **linjära** sådana. Ett ekvationssystem kallas **linjärt** om alla ekvationer det består av är linjära, dvs. de obekanta förekommer endast i form av förstagradstermer.

När man skall lösa ett sådant system försöker man med hjälp av operationerna listade ovan skaffa sig en ekvation, som endast innehåller en obekant. När man väl har löst denna kan man sätta in värdet i en av ursprungsekvationerna och lösa för den andra obekanta, om det är två variabler. Om det är fler än två variabler får man upprepa förfarandet för en annan obekant. Metoden kallas **Gauss eliminationsmetod**, eller **eliminationsmetoden**.

Exempel. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 7x+3y=1. \end{cases}$$

Metod 1: (**Substitutionsmetoden**) Man kan lösa ut x i den första ekvationen och få

$$x=\frac{5-2y}{3}.$$

När man sätter in detta (substituerar) i den andra ekvationen får man

$$7\cdot\left(\frac{5-2y}{3}\right)+3y=1 \Leftrightarrow 35-14y+9y=3 \Leftrightarrow 32=5y$$

och därmed $y=32/5$ och $x=(5-2y)/3=-13/5$.

Metod 2: (**Eliminationsmetoden**) Multiplicera (för att eliminera x) de givna ekvationerna med 7 respektive -3 och addera den nya första ekvationen till den nya som är på andra plats:

$$\begin{cases} 21x+14y=35 \\ \underline{-21x-\ 9y=-3} \end{cases}$$
$$5y=32$$

Här får man $y=32/5$, som insatt i en av de givna ekvationerna (vilken som helst) ger $x=-13/5$.

Svar: Vi får lösningen $x=-13/5$ och $y=32/5$

$\square$

Anmärkning 1. Eliminationsmetoden är att föredra, eftersom den leder till mer systematiska lösningar och är enkel att använda även för mycket stora linjära ekvationssystem, dvs. ekvationssytem som består av många linjära ekvationer med många obekanta.

Exempel. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4x+\ y+2z=1 \\ x+4y+\ z=-1 \\ 3x+2y+\ z=3. \end{cases}$$

Vi inleder med att låta ekvationer 1 och 2 byta plats; sedan elimineras x ur alla ekvationer utom den nya första genom att man multiplicerar den nya första ekvationen med (-4) och adderar till den nya andra ekvationen, samt med (-3) och adderar till den tredje:

$$\begin{cases} 4x+\ y+2z=1 \\ x+4y+\ z=-1 \\ 3x+2y+\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4y+\ z=-1 \\ 4x+\ y+2z=1 \\ 3x+2y+\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4y+\ z=-1 \\ -15y-2z=5 \\ -10y-2z=6. \end{cases}.$$

Nu multiplicerar vi den tredje ekvationen med $-1/2$ och låter den byta plats med den andra:

$$\begin{cases} x+4y+\ z=-1 \\ -15y-2z=5 \\ -10y-2z=6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4y+\ z=-1 \\ \quad 5y+\ z=-3 \\ -15y-2z=5. \end{cases}.$$

Vi kan nu eliminera y ur den sista ekvationen genom att multiplicera den andra med 3 och addera till den sista:

$$\begin{cases} x+4y+\ z=-1 \\ \quad 5y+\ z=-3 \\ -15y-2z=5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4y+\ z=-1 \\ \quad 5y+\ z=-3 \\ \qquad\quad z=-4. \end{cases}.$$

Ur den sista ekvationen får vi att $z=-4$. Vi sätter in i den andra och får att $y=(-3+4)/5=1/5$. Slutligen sätter vi in värdena för y och z i den första ekvationen och får att $x=11/5$. □

Anmärkning 2. I det första exemplet ovan gäller att:

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 7x+3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=5 \\ \quad 5y=32 \end{cases}$$

där det högra ekvationssystemet är **triangulärt**, dvs. koefficienterna för x och y som är skilda från noll bildar en triangel. När ett system är triangulärt, så är en av de obekanta redan eliminerad i sista ekvationen, så systemet är förberett för lösning. I det andra exemplet eftersträvades också en triangulär form, även kallad **trappstegsform**.

Anmärkning 3. Det spelar ingen roll vilken av variablerna man eliminerar först. Man kan börja med den som man tycker leder till de enklaste uttrycken. Variablerna kan ha andra namn än x och y, t.ex. är det vanligt att man använder sig av index om det handlar om stora ekvationssystem med många obekanta. I ett ekvationssystem med hundra obekanta heter de typiskt $x_1, x_2, \ldots, x_{99}, x_{100}$.

Exempel. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 6x+4y=9 \end{cases}$$

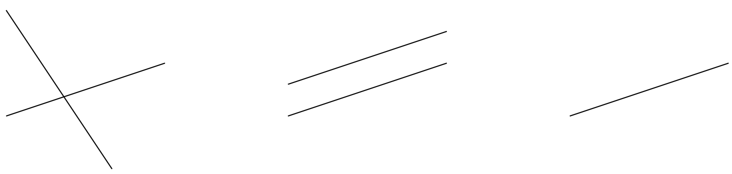
Multiplicera (för att eliminera x) den första ekvationen med -2 och addera till den andra:

$$\begin{cases} -6x-4y=-10 \\ 6x+4y=9 \end{cases}$$

Om vi adderar de två ekvationerna får vi nu att $0=-1$. Eftersom att detta är en motsägelse så saknar ekvationssystemet lösningar. □

Anmärkning 4. Geometriskt motsvarar den linjära ekvationen $ax+by=c$ en **rät linje**. (Här är a,b,c fasta parameter och x,y variabler). Ett system av två sådana linjära ekvationer motsvarar skärningspunkterna mellan två räta linjer. Detta har därmed

- **en** lösning om de räta linjerna **skär varanda**,
- **ingen** lösning om de räta linjerna är **parallella** (och olika),
- **oändligt** många lösningar om de räta linjerna **sammanfaller**.



en lösning ingen lösning oändligt många lösningar

Hade vi istället betraktat ett linjärt ekvationssystem med tre ekvationer och två obekanta hade det rört sig om att hitta skärningspunkterna mellan tre räta linjer. Man förväntar sig inte att ett sådant ekvationssystem är lösbart. Det skulle dock kunna ha en entydig lösning, om alla linjerna är olika och går genom en punkt, eller oändligt många lösningar, om de tre linjerna sammanfaller.

Man kan visa att ett linjärt ekvationssystem har antingen ingen, en unik, eller oändligt många lösningar oavsett antalet ekvationer och obekanta.

Övningar

2.4.1 Lös ekvationssystemen.

a. $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ 2x-y=6 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 3x-2y=10 \\ x+y=5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x+3y=2 \\ 7x+5y=-4 \end{cases}$ d. $\begin{cases} 3x-2y=3 \\ 9x-6y=8 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 5x+y=3 \\ 10x+2y=6 \end{cases}$ f. $\begin{cases} 15s+14t=59 \\ 12s-35t=1 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 1/x+1/y=5/6 \\ 1/x-1/y=1/6 \end{cases}$

h. $\begin{cases} 6x+5y+z=45 \\ 5x+2y-z=23 \\ 13x-7y+z=6 \end{cases}$ i. $\begin{cases} 2x-y+z=20,1 \\ x+y-z=9,9 \\ 3x+2y+8z=30,4 \end{cases}$

j. $\begin{cases} a+2b+c=3 \\ a-b+2c=2 \\ 3a-2b+c=-3 \end{cases}$ k. $\begin{cases} x+2y+2z=3 \\ 3x+y+2z=7 \\ 5x+4y+z=0 \end{cases}$

2.4.2 En person som tillfrågades om sin ålder svarade: ”För 9 år sedan var jag 26 gånger så gammal som min son, men om 2 år blir jag blott 4 gånger så gammal.” Hur gammal var han? (Du kan behöva räkna med halvår.)

2.5 Polynom, ekvationer av högre grad, faktorsatsen, polynomdivision

Ett **polynom** är en (ändlig) summa av termer på formen ax^n, där **koefficienten** a är ett tal, **exponenten** $n \geq 0$ är ett heltal (med andra ord ett naturligt tal) och x är en variabel. Den högsta exponenten n med koefficienten skild ifrån 0 i ett polynom kallas för **graden av polynomet**. (Istället för x kan man förstås använda en annan variabel om man vill.)

Vi låter $p(x)$ beteckna ett polynom och a ett tal. **Värdet i en punkt** a för polynomet är $p(a)$, dvs. det tal vi får när vi ersätter x med a. Ett **nollställe** till polynomet är ett tal b sådant $p(b) = 0$.

Exempel. När vi löste andragradsekvationer så letade vi efter nollställen till uttryck på formen $ax^2 + bx + c$, dvs. nollställen till polynom av grad 2. Uttrycket $x^4 + 3x^3 + x$ är ett polynom av grad 4.

Däremot är *inte* uttrycken $x^2 + x^{-1} + 1$ eller $x^2 + \sqrt{x} + 1$ några polynom, eftersom exponenten i den andra termen i båda fallen inte är ett naturligt tal. □

Exempel. Låt $p(x) = x^2 + 3x + 2$. Värdet i 2 är då $p(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 + 2 = 12$ och värdet i -1 är $p(-1) = (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 2 = 0$. Alltså är -1 ett nollställe till polynomet. □

Precis som för tal kan vi givet två polynom p och k framställa p på formen $p(x) = k(x)q(x) + r(x)$, där q kallas **kvot** och r kallas **rest**, och därmed definiera division av polynom. Vid heltalsdivision av naturliga tal krävdes att resten skulle vara mindre än det tal man dividerar med. Motsvarande krav för polynomdivision är att restens gradtal är mindre än gradtalet för det polynom man dividerar med, dvs. att r:s gradtal är mindre än k:s gradtal i beteckningarna ovan. Om p är av grad n och k är av grad m, där $n \geq m$, så är q av grad $n - m$. För $n < m$ är q konstanten 0 och $r = p$. Vid division med ett förstagradspolynom är resten alltid konstant. Denna observation visar sig vara av betydelse för följande sats, som är mycket viktig att behärska för att kunna arbeta med polynom.

Faktorsatsen: Antag att $p(x)$ är ett polynom och a ett tal. Då är a ett nollställe till $p(x)$, dvs. $p(a) = 0$, om och endast om $x - a$ är en faktor i $p(x)$, dvs. om och endast om

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x),$$

där $q(x)$ är ett polynom med grad ett mindre än $p(x)$.

Bevis. Om p kan skrivas som $p(x) = (x - a) \cdot q(x)$, så följer direkt att

$$p(a) = (a - a) \cdot q(a) = 0.$$

Antag nu istället att $p(a) = 0$. Vi vet, enligt observationen ovan, att p kan skrivas som $p(x) = (x - a) \cdot q(x) + r$, där r måste vara en konstant. För $x = a$ får vi

$$p(a) = (a - a) \cdot q(a) + r = r,$$

så $r = 0$, eftersom $p(a) = 0$. Alltså kan p skrivas som $p(x) = (x - a) \cdot q(x)$. □

I avsnittet om andragradsekvationer insåg vi att x_1, x_2 är nollställen till polynomet $x^2 + px + q$ om och endast om $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$. Detta följer nu direkt om man använder faktorsatsen på andragradspolynom.

Exempel. Vi såg i exemplet ovan att -1 är ett nollställe till polynomet $p(x) = x^2 + 3x + 2$. Enligt faktorsatsen vet vi därmed att

$$x^2 + 3x + 2 = (x - (-1)) \cdot q(x) = (x + 1) \cdot q(x),$$

där $q(x)$ är ett polynom av grad 2-1=1. Alltså är $q(x) = kx + m$ för några tal k och m. Vi kan räkna ut vad $q(x)$ är genom att utnyttja likheten

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 &= (x + 1) \cdot q(x) = (x + 1)(kx + m) \\ &= kx^2 + kx + mx + m = kx^2 + (k + m)x + m. \end{aligned}$$

Genom att identifiera koefficienterna för x^2 får vi $k = 1$ och om vi identifierar konstanterna så får vi $m = 2$. En extra kontroll får man genom att man ser att koefficienterna för x är 3 respektive $k + m = 1 + 2 = 3$. Alltså är

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2),$$

och alltså är också -2 ett nollställe till polynomet. (Eventuellt kanske du kunde listat ut att det skulle vara just $x + 2$ direkt i huvudet?) $\square$

Metoden som användes i exemplet att hitta den andra faktorn när man känner en faktor i ett polynom kallas för **kort division**. Man kan alternativt använda sig av lång division med liggande stolen precis som man gör för tal. Vi illustrerar de två metoderna i ytterligare ett exempel.

Exempel. Vi tittar på tredjegradspolynomet $x^3 - 9x + 10$. Genom att testa så ser vi att 2 är ett nollställe till polynomet, ty $2^3 - 9 \cdot 2 + 10 = 0$. Därmed vet vi enligt faktorsatsen att $x - 2$ är en faktor och att $x^3 - 9x + 10 = (x - 2) \cdot q(x)$, där $q(x)$ är ett andragradspolynom.

Vi bestämmer först $q(x)$ med kort division. Vi har

$$x^3 - 9x + 10 = (x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (-2a + b)x^2 + (-2b + c)x - 2c.$$

Koefficienten framför x^3 ger $a = 1$ och konstanten ger $10 = -2c$ så $c = -5$. Koefficienten framför x^2 ger nu $0 = -2a + b = -2 + b$ så $b = 2$. Kontroll med koefficienten framför x ger $-9 = -2b + c = -2 \cdot 2 - 5$ vilket stämmer alldeles utmärkt. Vi får alltså

$$x^3 - 9x + 10 = (x - 2)(x^2 + 2x - 5).$$

Vi utför nu lång division med liggande stolen. Här bestämmer man successivt koefficienten för den högsta kvarvarande exponenten.

$$\begin{array}{ll} \hline x^3-9x+10 & \multicolumn{1}{|l}{x-2} \\ \cline{2-2} \end{array}
\qquad
\begin{array}{ll} x^2 & \\ \hline x^3-9x+10 & \multicolumn{1}{|l}{x-2} \\ \cline{2-2} -x^2(x-2) & \\ \hline 2x^2-9x+10 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{ll} x^2+2x & \\ \hline x^3-9x+10 & \multicolumn{1}{|l}{x-2} \\ \cline{2-2} -x^2(x-2) & \\ \hline 2x^2-9x+10 & \\ -2x(x-2) & \\ \hline -5x+10 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{ll} x^2+2x-5 & \\ \hline x^3-9x+10 & \multicolumn{1}{|l}{x-2} \\ \cline{2-2} -x^2(x-2) & \\ \hline 2x^2-9x+10 & \\ -2x(x-2) & \\ \hline -5x+10 & \\ -(-5)(x-2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

I första steget frågar vi oss hur många gånger går högsta termen, x, i nämnaren i högsta termen i täljaren dvs. x^3. Jo, den går x^2 gånger. Vi skriver detta överst och subtraherar sedan $x^2(x-2)$ ifrån täljaren och får $2x^2-9x+10$. Nu frågar vi oss hur många gånger går högsta termen, x, i nämnaren i högsta termen i det som återstår av täljaren dvs. $2x^2$. Jo, den går $2x$ gånger. Vi lägger till detta överst och subtraherar sedan $2x(x-2)$ ifrån återstoden av täljaren och får $-5x+10$. Nu frågar vi oss hur många gånger går högsta termen, x, i nämnaren i högsta termen i det som återstår av täljaren dvs. $-5x$. Jo, den går -5 gånger. Vi lägger till detta överst och subtraherar sedan $-5(x-2)$ ifrån återstoden av täljaren och får 0. Därmed ser vi att resten blir 0 (det visste vi ju redan) och kvoten blir x^2+2x-5. □

Följande exempel visar att man kan utföra polynomdivision även när den inte går jämnt ut.

Exempel. Låt $p(x)=2x^4+6x^2+2$ och $k(x)=x^2+x+1$. Polynomdivision ger att

$$2x^4+6x^2+2=(x^2+x+1)(2x^2-2x+6)+(-4x-4).$$

Kvoten av polynomdivisionen av $p(x)=2x^4+6x^2+2$ med $k(x)=x^2+x+1$ är alltså $q(x)=2x^2-2x+6$, och resten är $r(x)=-4x-4$. □

Faktorsatsen kan användas för att förkorta uttryck som är en kvot av två polynom. För att förkorta ett sådant uttryck måste man hitta en gemensam faktor till de två polynomen. Vi tittar på ett exempel.

Exempel. Förkorta

$$\frac{x^3-x}{x^3+5x^2-6x}$$

så långt det går. Först observerar vi att man kan bryta ut faktorn x ur både täljare och nämnare som vi förkortar bort. Kvar blir då

$$\frac{x^2-1}{x^2+5x-6}$$

Täljaren kan vi faktorisera med hjälp av konjugatregeln till $(x-1)(x+1)$. För att kolla om någon av dessa två är faktorer i nämnaren så kollar vi om 1 eller -1 är ett nollställe till x^2+5x-6. Vi finner att 1 är ett nollställe och faktoriserar (med kort division som ovan) $x^2+5x-6=(x-1)(x+6)$. Därmed kan vi förkorta bort $x-1$ och får till slut

$$\frac{x+1}{x+6},$$

vilket inte kan förkortas mer.

Observera att det urspungliga och det förkortade uttrycket är lika för alla x utom $x=0$ och $x=1$. För dessa två värden är ju inte det ursprungliga uttrycket definierat. □

Vi såg i ett exempel ovan att om man visste ett nollställe till ett andragradspolynom så kunde man med hjälp av faktorisering få det andra nollstället. För andragradspolynom har vi redan en allmän metod för att hitta nollställen, men för polynom av högre grad kan man ha stor nytta av denna observation. Antag att vi har ett tredjegradspolynom $p(x)$ som vi vill hitta alla nollställen till och antag också att vi känner till att a är ett nollställe. Då är $p(x) = (x-a) \cdot q(x)$ där $q(x)$ är ett andragradspolynom. Ett nollställe till $p(x)$ är nu ett nollställe till antingen $x-a$ eller till $q(x)$. För att hitta övriga nollställen till $p(x)$ så ska vi alltså hitta nollställena till andragradspolynomet $q(x)$ vilket vi vet hur man gör.

Exempel. Vi löser ekvationen $x^3 - 9x + 10 = 0$. Vi såg i ett tidigare exempel att $x^3 - 9x + 10 = (x-2)(x^2+2x-5)$, så att $x_1 = 2$ är en lösning och eventuella andra lösningar måste vara nollställen till $x^2 + 2x - 5$. Dessa hittar vi med formeln för lösningar till andragradsekvationer:

$$x_{2,3} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 - (-5)} = -1 \pm \sqrt{6}$$

Lösningarna är alltså $x_1 = 2$, $x_2 = -1 + \sqrt{6}$ och $x_3 = -1 - \sqrt{6}$. □

Följande resultat kan man ha nytta av om man ska försöka hitta ett nollställe till ett polynom av grad 3 eller högre med heltalskoefficienter.

Antag att vi har ett polynom $x^3 + cx^2 + bx + a$ där alla koefficienter är heltal. Om x_1 är ett heltal som är ett nollställe till polynomet så gäller att konstanttermen a är en multipel av x_1. Samma sak gäller för polynom $x^n + \cdots + bx + a$ av vilken grad n som helst.

Med andra ord är varje heltalsnollställe en delare till konstanttermen a. Det är lätt att inse varför: om x_1 är ett nollställe till polynomet så har vi att $a = -x_1(x_1^{n-1} + \cdots + b)$, vilket visar att x_1 är en faktor i a och därmed att a är delbart med x_1. Ungefär på samma sätt kan man visa ett liknande påstående om eventuella rationella nollställen till polynom med heltalskoefficienter.

Antag att vi har ett polynom $cx^n + \cdots + bx + a$ där alla koefficienter är heltal. Om $x_1 = \frac{p}{q}$ är ett rationellt nollställe till polynomet och p och q är relativt prima, så gäller att konstanttermen a är en multipel av p och koefficienten framför den högsta potensen c är en multipel av q.

Observera att man i båda fallen säger att om det finns en heltalslösning, eller en rationell lösning till ekvationen $p(x) = 0$, så måste denna uppfylla vissa villkor. Det finns ingen som helst garanti för att en sådan lösning existerar. Vad vi har är alltså endast ett sätt att göra kvalificerade gissningar.

Exempel. Vi tittar på polynomet $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$. Det har endast heltalskoefficienter så om det har något heltal som nollställe så måste det vara en delare till 6. Möjliga nollställen blir alltså $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$. Om man testar dessa tal så finner man att 4 av dem är nollställen nämligen $\{1, -1, 2, -3\}$. Vi kan alltså faktorisera polynomet som

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+3).$$ □

Exempel. Om vi tittar på ekvationen $x^2 - 2 = 0$ inser vi att om den har rationella lösningar så måste dessa vara bland talen $\pm 1, \pm 2$. Inget av dessa tal är dock en lösning, alltså finns inget rationellt tal vars kvadrat är lika med 2.

$\square$

Exempel. Vi letar efter rationella nollställen till $3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$. Om det alls finns sådana så måste de vara på formen $\frac{p}{q}$, där p är en delare till 1 och q är en delare till 3. De enda möjligheterna är alltså $\pm\frac{1}{3}$ och ± 1. Insättning ger att $\frac{1}{3}$ är ett nollställe till det givna polynomet.

$\square$

Om ett polynom $p(x)$ har samma faktor $(x-a)$ två gånger så säger man att a är en **dubbelrot** till ekvationen $p(x) = 0$ (om den förekommer tre gånger så kallas den trippelrot o.s.v.). Antalet faktorer $(x-a)$ i polynomets faktorisering kallas **nollställets multiplicitet**.

Exempel. Lös ekvationen $(x^2 - 2x - 7)^2 = 0$.

Lösning: Först löses ekvationen $x^2 - 2x - 7 = 0$, som har rötterna $x_{1,2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$. Polynomet kan faktoriseras som

$$(x^2 - 2x - 7)^2 = (x - (1 + 2\sqrt{2}))^2 (x - (1 - 2\sqrt{2}))^2,$$

så $1 + 2\sqrt{2}$ och $1 - 2\sqrt{2}$ är dubbelrötter. $\square$

Det är naturligt att ställa sig frågan om det för polynom av godtycklig grad går att härleda formler som uttrycker polynomets nollställen i termer av dess koefficienter, analogt med de formler vi härledde för nollställena till ett andragradspolynom. Svaret är att det låter sig göras för polynom av grad tre och fyra, medan det inte finns sådana formler för polynom av grad fem eller högre. Det sista ska inte tolkas som att ingen ännu har kommit på hur man ska lösa generella femtegradsekvationer. Det är bevisat att lösningsformler inte existerar för polynomekvationer av grad högre än fyra[6].

Övningar

2.5.1 Förenkla följande kvoter mellan polynom så långt det går.

a. $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x - 4}$ b. $\dfrac{x^3 - 4x}{x^4 - 7x^2 + 6x}$

2.5.2 Lös följande ekvationer. Tips: De har minst en rot som är ett heltal.

a. $x^3 + 3x^2 + x = 0$ b. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$
c. $2x^3 + 14x^2 + 22x + 4 = 0$ d. $6 + 3x^2 - 5x - x^3 = 0$

2.5.3 Lös följande ekvationer. Ange om någon av rötterna är dubbelrot eller trippelrot.

a. $(x-1)^3 = 0$ b. $x^3 - 1 = 0$
c. $(x^2 - 1)^3 = 0$

2.5.4 Faktoruppdela följande polynom.

a. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ b. $x^3 + 7x^2 + 11x + 2$
c. $6 + 3x^2 - 5x - x^3$

[6]Lösningsformlerna för tredje- och fjärdegradsekvationer är så komplicerade att de i praktiken är oanvändbara.

3 GEOMETRI

Detta kapitel handlar främst om analytisk geometri, speciellt räta linjens och cirkelns ekvationer, samt trigonometri.

Grunden till den analytiska geometri som behandlas här är euklidisk geometri, vi inleder därför med att påminna om vissa begrepp och formulera några viktiga satser inom den euklidiska geometrin.

3.1 EUKLIDISK GEOMETRI

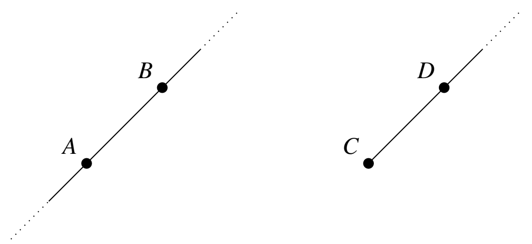
Att diskutera geometri på ett sätt som är logiskt oantastligt är inte helt enkelt och kräver en axiomatisk grund som vi inte ska beröra. Vi nöjer oss med en intuitiv uppfattning och utgår från att alla har en gemensam inre bild av ett plan som har sin utbredning i två dimensioner och saknar begränsningar, räta linjer i detta plan vilka har sin utbredning i en dimension och är obegränsade samt punkter som fyller planet men inte har någon utbredning alls.

Det är praktiskt att ha vissa konventioner/överenskommelser om hur olika begrepp betecknas.

I detta kapitel betecknas punkter med versaler, exempelvis A, B och C.

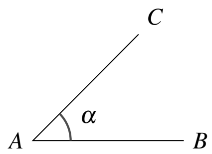
Med

- **linjen** AB menas linjen genom punkterna A och B.
- **strålen** CD menas den del av linjen CD som börjar i C, genomlöper D och fortsätter obegränsat åt det hållet.
- **sträckan** EF menas den del av linjen EF som ligger mellan E och F.



Figur 8: Linjen AB, stålen CD och sträckan EF.

Om inget annat sägs så avses med AB sträckan AB. Längden av sträckan AB betecknas $|AB|$. Om vi behöver enklare beteckningar för längder så betecknas dessa med små bokstäver, a, b, c o.s.v.. Konventionen för trianglar är att x betecknar längden av sidan som står mot hörnet X, dvs. $a = |BC|$ etc.

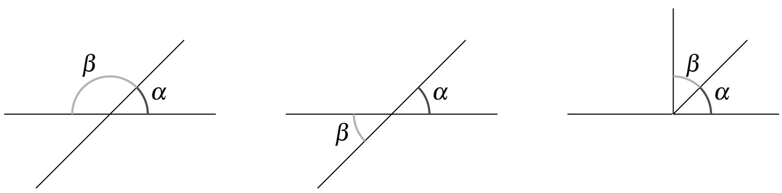


Figur 9: Vinkeln $\angle A$ eller $\angle BAC$.

Två strålar eller sträckor AB och AC bildar en vinkel med spets vid A. Denna betecknas $\angle A$ eller $\angle BAC$. Strålarna kallas **vinkelns ben**. Egentligen ger de två strålarna upphov till två vinklar, oftast en som är mindre än ett halvt varv och en som är större. Om inget särskilt påpekas så avses den mindre av de två.

Storleken, mätetalet, för $\angle A$ betecknas oftast också med $\angle A$ eller, om detta är opraktiskt, med små bokstäver, u, v, α, β, o.s.v.. Vi återkommer till vinkelmätning senare.

Då två linjer skär varandra i en punkt bildas fyra vinklar. Två vinklar som då har ett vinkelben gemensamt kallas **supplementvinklar** eller **sidovinklar**, och två som inte har ett gemensamt ben kallas **vertikalvinklar**. Vi får supplementvinklar också om vi låter en stråle utgå från en punkt på en linje. Om en vinkel är lika stor som sin supplementvinkel så säger vi att vinkeln är **rät**. En rät vinkel är en fjärdedels varv. Beroende på hur man anger vinklars storlek är den räta vinkeln $\pi/2$ radianer eller 90° (90 grader). En vinkel som tillsammans med en given vinkel bildar en rät vinkel kallas **komplementvinkel** till den givna. En vinkel som är mindre än en rät är **spetsig**. En vinkel som är mindre än ett halvt varv men större än en rät är **trubbig**.



(a) supplementvinklar (b) vertikalvinklar (c) komplementsvinklar

Figur 10: Olika typer av par av vinklar. I den första figuren från vänster är vinkeln α spetsig, medan vinkeln β är trubbig. I de två andra figurerna är både α och β spetsiga.

En av de första geometrisatser man får lära sig i skolan är följande sats.

Vinkelsumman i en triangel är alltid 180°.

3.1.1 Kongruens och likformighet

För alla resonemang om geometri är kongruens- och likformighetsbegreppen viktiga.

Två figurer i planet är **kongruenta** om man genom att flytta, vrida och eventuellt vända (spegla) den ena figuren kan få den att sammanfalla med den andra.

Två vinklar, $\angle BAC$ och $\angle B'A'C'$, är lika stora, $\angle BAC = \angle B'A'C'$, om de är kongruenta. T.ex. är vertikalvinklar lika stora. Två sträckor AB och $A'B'$ är lika långa precis när de är kongruenta.

En triangel med hörn A, B och C betecknar vi med $\triangle ABC$. Två trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ är kongruenta precis när

$$|AB| = |A'B'|,\ |BC| = |B'C'|,\ |AC| = |A'C'|$$

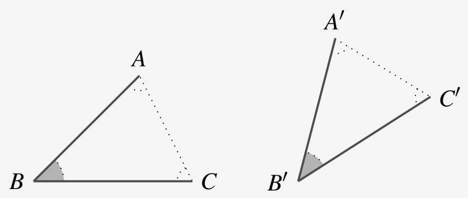
och

$$\angle A = \angle A',\ \angle B = \angle B',\ \angle C = \angle C'$$

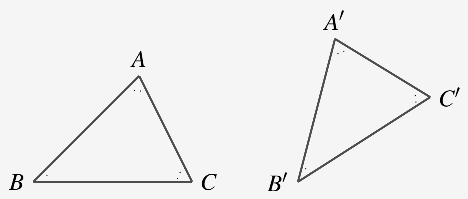
Notera att ordningen på hörnen är väsentlig när man använder detta beteckningssätt för trianglar i kombination med begreppet kongruens. Det är väl ingen överraskning att om vissa av de sex villkoren ovan gäller, så kommer de andra också att göra det. Närmare bestämt gäller de tre så kallade kongruensfallen:

KONGRUENSFALLEN

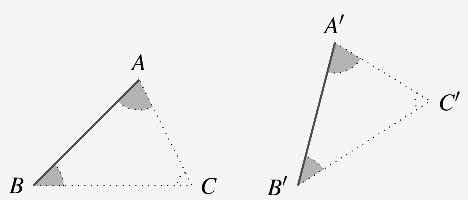
1. **Sida – vinkel – sida:** Om $|AB| = |A'B'|$, $\angle B = \angle B'$ och $|BC| = |B'C'|$ så är trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ kongruenta.



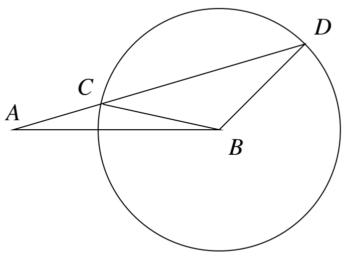
2. **Sida – sida – sida:** Om $|AB| = |A'B'|$, $|BC| = |B'C'|$ och $|AC| = |A'C'|$ så är trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ kongruenta.



3. **Vinkel – sida – vinkel:** Om $\angle A = \angle A'$, $|AB| = |A'B'|$ och $\angle B = \angle B'$ så trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ kongruenta.



Exempel. Att basvinklarna i en likbent triangel är lika visas med hjälp av kongruens. Om triangeln ABC är likbent med $|BC| = |AC|$, så är trianglarna ABC och BAC kongruenta, enligt andra kongruensfallet (sida-sida-sida). Det betyder att motsvarande vinklar i trianglarna är lika stora, dvs. $\angle A = \angle B$. (Det omvända påståendet är också sant: om två vinklar i en triangel är lika stora, så är motstående sidor lika långa; beviset är dock inte lika enkelt.) $\square$



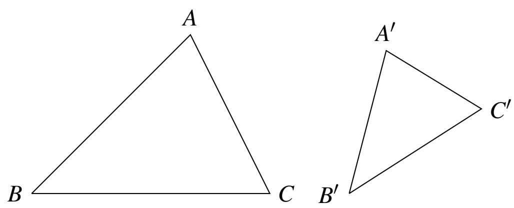
Figur 11: Ett "falskt" fall.

Det finns faktiskt ett fjärde kongruensfall, men man får se upp med formuleringen av det. Fallet Vinkel – Sida – Sida ger inte alltid kongruenta trianglar. För att se detta kan man dra en sträcka AB och slå en cirkel med medelpunkt i B och radie mindre än $|AB|$. Drag sedan en linje genom A som skär cirkeln i två nya punkter, först i C sedan i D. För trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle ABD$ gäller då att $\angle A = \angle A$, $|AB| = |AB|$ och $|BC| = |BD|$ (= cirkelns radie), men trianglarna är uppenbarligen inte kongruenta. Men om man kräver att den vinkel som är lika i de två trianglarna ska stå mot den längsta sidan gäller kongruens:

4. Om $\angle A = \angle A'$, $|AB| = |A'B'|, |BC| = |B'C'|$ och sidorna BC och $B'C'$ är längst i trianglarna $\triangle ABC$ respektive $\triangle A'B'C'$, så är de båda trianglarna kongruenta.

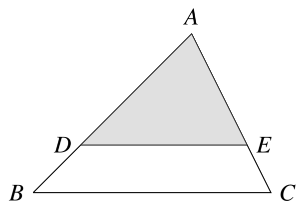
Löst talat betyder begreppet kongruens mellan trianglar att de har samma form och samma storlek. Två trianglar som har samma form men inte nödvändigtvis samma storlek sägs vara **likformiga**. Mer precist är två trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ **likformiga** om

$$\angle A = \angle A',\ \angle B = \angle B',\ \angle C = \angle C' \text{ och } \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}.$$



Figur 12: Exempel på två likformiga (men inte kongruenta) trianglar.

Den viktigaste satsen om likformiga trianglar är **topptriangelsatsen**. I figur 13 är DE parallell med BC. Triangeln $\triangle ADE$ är då en **topptriangel** i den större triangeln $\triangle ABC$.



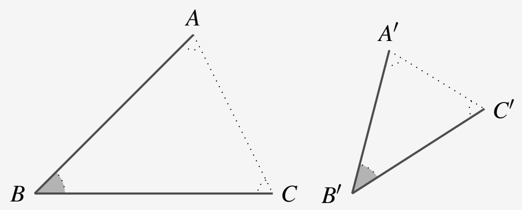
Figur 13: Triangeln $\triangle ADE$ är en topptriangel i den större triangeln $\triangle ABC$

Topptriangelsatsen säger då att de två trianglarna $\triangle ADE$ och $\triangle ABC$ är likformiga.

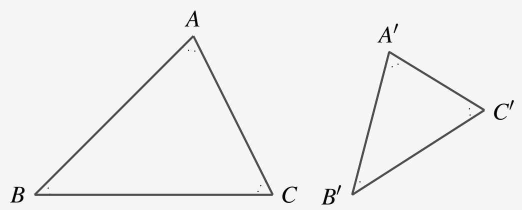
De olika kongruensfallen har sina motsvarande likformighetsfall som bevisas genom att man visar att den mindre av de två trianglarna är kongruent med en topptriangel i den större.

LIKFORMIGHETSFALLEN

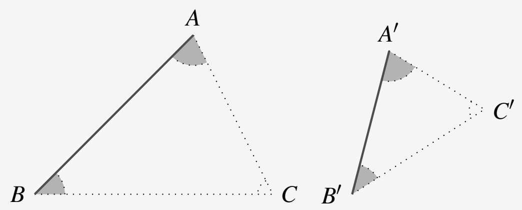
1. **Sida – vinkel – sida:** Om det för trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ gäller att $\angle B = \angle B'$ och $\dfrac{|AB|}{|A'B'|} = \dfrac{|BC|}{|B'C'|}$ så är trianglarna likformiga.



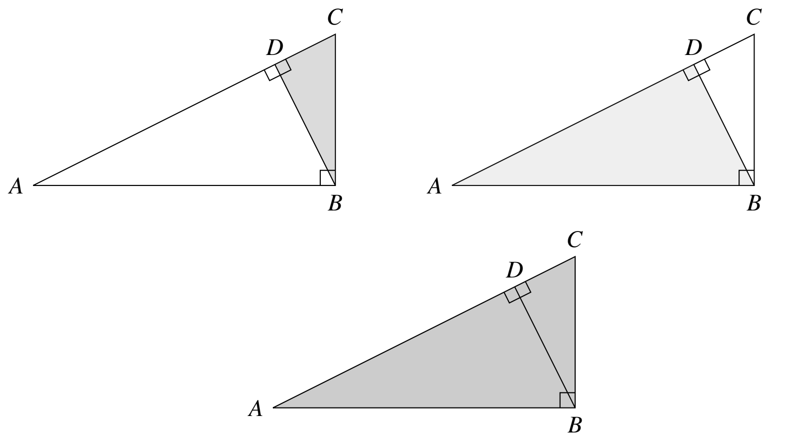
2. **Sida – sida – sida:** Om det för trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ gäller att $\dfrac{|BC|}{|B'C'|} = \dfrac{|AC|}{|A'C'|} = \dfrac{|AB|}{|A'B'|}$ så är trianglarna likformiga..



3. **Vinkel – (sida) – vinkel:** Om det för trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle A'B'C'$ gäller att $\angle A = \angle A'$ och $\angle B = \angle B'$ så är trianglarna likformiga.



Exempel. I figur 14 är $\angle ABC$ och $\angle ADB$ räta vinklar. Eftersom $\angle A$ är gemensam för trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle ADB$ är dessa två trianglar likformiga enligt tredje likformighetsfallet. På samma sätt visas att trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle BDC$ är likformiga.



Figur 14: Tre rätvinkliga trianglar.

□

3.1.2 LÄNGD, AREA OCH VINKELMÄTNING

Att ge mätetal åt sträckors längd och figurers area är inte så okomplicerat som man kan tro.

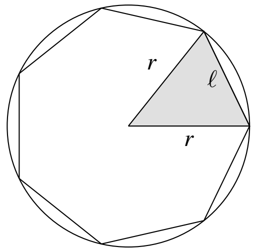
När det gäller sträckors längd är idén att man utgår från en fastställd enhetssträcka och ger den mätetalet 1. Tanken är sedan att man ger en annan given sträckas längd ett mätetal genom att se hur många gånger den fastlagda enhetssträckan går i denna. Problemet är förstås att detta i allmänhet inte går jämnt ut. För att lösa det kan man dela in enhetssträckan i ett visst antal lika stora delar och se hur många av dessa som ytterligare krävs för att mäta den givna sträckan. Samma svårighet dyker emellertid upp igen: inte heller detta går i allmänhet jämnt ut, oavsett hur man indelar enhetssträckan i lika stora delar. Detta insåg enligt en legend Hippasos, en av Pythagoras lärjungar, för i runda svängar 2500 år sedan.

Vi ska naturligtvis inte göra en stor affär av detta utan utgår från att man med hjälp av de reella talen kan mäta sträckors längd, på ett sådant sätt att två sträckors längd har samma mätetal precis när de är kongruenta. Det reella tal som mäter längden av sträckan AB betecknas $|AB|$. Detta tal kallas också **avståndet** mellan punkterna A och B.

För att mäta längden av en kurva som inte är en sträcka måste vi approximera kurvan med ett antal korta sträckor mellan punkter på kurvan. Ju fler punkter dess bättre approximation. Kurvans längd är gränsvärdet för dessa approximationer.

En **cirkel** består av alla punkter som har samma avstånd till en viss given punkt. Avstådet i fråga kallas cirkelns **radie** och den givna punkten kallas cirkelns **medelpunkt**. En **cirkelskiva** består av alla punkter vars avstånd till en given punkt är mindre än eller lika med (eventuellt strikt mindre än) ett givet positivt tal. Om likhet tillåts sägs cirkelskivan vara sluten; om man kräver sträng olikhet kallas den öppen.

Då det gäller att beräkna cirkelns längd är det enklast att utgå från regelbundna n-hörningar med hörn på cirkeln. Så gjorde redan Arkimedes. Man delar in n-hörningen



Figur 15: Cirkelskiva delad i lika stora sektorer.

i trianglar med spets i cirkelns medelpunkt och beräknar basens längd. Om man börjar med en inskriven regelbunden sexhörning, har den sidlängd lika med cirkelns radie (sexhörningen kan ses som bildad av sex liksidiga trianglar). En deltriangels baslängd blir då precis r. Sedan fördubblar man antalet hörn gång på gång, och man kan beräkna basens längd med Pythagoras sats (se 3.1.3 nedan). Detaljerna i detta lämnas till läsaren.

Av detta sätt att mäta cirkelns omkrets följer det att förhållandet mellan denna och cirkelns radie, eller för den delen cirkelns diameter, är samma för alla cirklar. Kvoten mellan en godtycklig cirkels omkrets och dess diameter är alltså en och samma konstant som betecknas med den grekiska bokstaven π. Det betyder att en cirkel med radien r har omkretsen $2\pi r$.

Om cirkelns radie är 1 så har den inskrivna 6-hörningen omkretsen 6. Eftersom cirkelns omkrets är 2π så får man närmevärdet 3 till π. Inte så bra, men det behövs inte så många fördubblingar av antalet hörn för att man skall få ett riktigt bra närmevärde för π. För att få de miljontals decimaler som nu är bestämda krävs emellertid helt annan teknik.

Också areabegreppet är som sagt komplicerat, men vi ska inte heller göra någon stor sak av det.

Arean av en rektangel med sidlängder a och b är lika med ab. Arean av en parallellogram med bas av längd a och höjd av längd h är ah. (Man kan "kapa av" en rätvinklig triangel och flytta den till andra sidan parallellogrammen för att komplettera till en rektangel med sidlängder a och h.)

Drar man en diagonal i en rektangel får man två rätvinkliga trianglar med bas a och höjd b. Arean av en sådan triangel måste därför vara $ab/2$. Härifrån är inte svårt att övertyga sig om att arean av en triangel, vilken som helst, är hälften av produkten av basen och höjden.

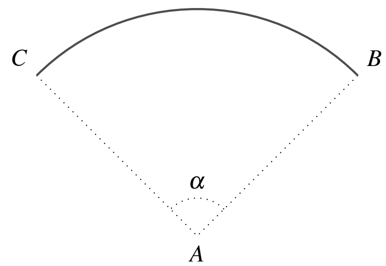
Figur 16: Rektangeln har area ab, triangeln har area $ab/2$.

En intressant observation man kan göra i figur 15 ovan är att trianglarna också delar in cirkelskivan i delar vars area vi kan beräkna. Om basen i varje triangel är L och höjden h så är arean $L \cdot h/2$. Höjden är, för stort n, i det närmaste samma som cirkelns radie.

Då vi summerar alla triangelareorna får vi ungefär cirkelns omkrets multiplicerad med $r/2$. Eftersom omkretsen är $2 \cdot r \cdot \pi$ får vi arean till $2\pi r \cdot r/2 = \pi \cdot r^2$. En cirkelskiva med radie r har alltså arean πr^2.

Det är alltså samma förhållande mellan cirkelns omkrets och diameter som det är mellan cirkelskivans area och arean av en kvadrat med radien som sida. Detta upptäckte också Arkimedes.

Om vi vill mäta en vinkel kan vi börja med tänka oss att den är medelpunktsvinkel i en cirkel, dvs. att vi ritat en cirkel med medelpunkt i vinkelns spets. Eftersom alla cirklar är likformiga torde förhållandet mellan längden av bågen som vinkelns ben kapar av cirkeln och cirkelns radie vara ett mått på vinkelns storlek. Vi definierar alltså mätetalet för en vinkel $\angle A$ i radianer som s/r, där s är längden av en cirkelbåge BC med medelpunkt i A och radien r som i figur 17.



Figur 17: Cirkelbågen BC.

Man kan alternativt välja att definiera vinkelns mått som längden av cirkelbågen BC då radien $r = 1$.

Om man vänder på det hela kan man säga att en **cirkelbåge** på en cirkel med radie r har längden αr, där α är måttet, i radianer, på vinkeln vid medelpunkten som bågen ger.

Mäter man istället denna vinkel i grader, låt oss säga att den då har måttet a°, så blir cirkelbågens längd

$$\frac{a^\circ}{360} \cdot 2\pi r = \frac{a^\circ}{180} \cdot \pi r.$$

I huvudsak använder man radianer som enhet vid vinkelmätning i matematiken. Just inom geometri är det dock vanligare med grader. I förra avsnittet påminde vi om att vinkelsumman i en triangel är π (radianer) eller 180° och att en rät vinkel är $\pi/2$ eller 90°. De spetsiga vinklarna i en likbent rätvinklig triangel är $\pi/4$ eller 45°. En liksidig triangel har vinklarna $\pi/3$ eller 60°. Sambandet mellan de två sätten att ange en vinkels storlek ges av

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0,017 \text{ radianer och 1 radian } = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$$

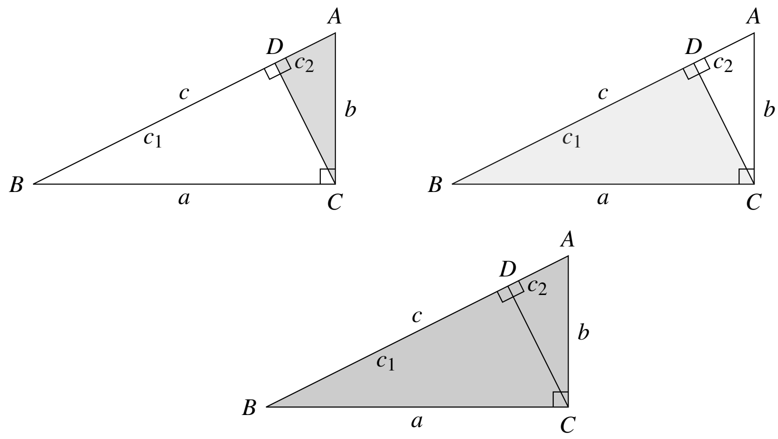
3.1.3 Pythagoras sats

Geometrins förmodligen mest kända sats är **Pythagoras sats**. Den beskriver ett samband mellan den längsta sidan, **hypotenusan**, i en rätvinklig triangel och de två kortare, **kateterna**[7]. Få resultat om något inom matematiken har en längre historia. Det är dokumenterat att satsen var känd redan av babylonierna för 3500 år sedan även om den fått sitt namn efter en grekisk matematiker, Pythagoras, som verkade för ca 2500 år sedan.

Om längderna av kateterna i en rätvinklig triangel är a respektive b och hypotenusans längd är c, så är $a^2 + b^2 = c^2$.

Det finns ett otal mer eller mindre olika bevis för denna sats. En del bygger på areabegreppet och går till så att man på olika sätt pusslar ihop figurer. Vi ska emellertid återge ett bevis som bygger på likformighet.

Bevis. Låt den rätvinkliga triangeln vara $\triangle ABC$ med $\angle C$ rät. Drag, som i figur 18, höjden DC.



Figur 18: Tre likformiga rätvinkliga trianglar.

Vi har då fått två mindre trianglar $\triangle CBD$ och $\triangle ACD$ som båda är likformiga med den ursprungliga triangeln $\triangle ABC$, eftersom de har två vinklar gemensamma med den ($\angle B$ och en rät, respektive $\angle A$ och en rät).

Sätter vi $c_1 = |BD|$ och $c_2 = |AD|$ har vi att $c_1 + c_2 = c$ och av likformigheten mellan $\triangle CBD$ och $\triangle ABC$ samt $\triangle ACD$ och $\triangle ABC$ följer att

$$\frac{a}{c_1} = \frac{c}{a} \quad \text{respektive} \quad \frac{b}{c_2} = \frac{c}{b}$$

och vi får då

$$a^2 = c \cdot c_1 \quad \text{respektive} \quad b^2 = c \cdot c_2.$$

Addition ger nu

$$a^2 + b^2 = c(c_1 + c_2) = c^2.$$

[7] Observera att det heter *en katet, flera kateter*.

□

Omvändningen till Pythagoras sats är också sann: Om a, b, c är sidlängder i en triangel och $a^2 + b^2 = c^2$, så är triangeln rätvinklig med rät vinkel vid C. Detta följer av cosinussatsen (se avsnitt 3.3) som beskriver sambandet mellan $a^2 + b^2$ och c^2 för godtyckliga trianglar.

Övningar

3.1.1 Hur många grader och radianer är

a. 1/2 varv b. 1/8 varv c. 1/3 varv
d. 1/6 varv e. 3/4 varv f. 7/6 varv

3.1.2 Omvandla till radianer:

a. $90°$ b. $30°$ c. $45°$
d. $270°$ e. $18°$ f. $150°$
g. $110°$

3.1.3 Omvandla till grader:

a. 3π b. $\pi/2$ c. $3\pi/4$
d. $5\pi/12$

3.1.4 Beräkna längden av cirkelbågen i en cirkelsektor med vinkel $v = 60°$ ach radien $R = 2$ (längdenheter), om

a. $v = 60°$ och $R = 2$ b. $v = 150°$ och $R = 5$ c. $v = 300°$ och $R = 4/3$.

3.1.5 Bestäm vinkeln mellan två (närliggande) sidor i en regelbunden

a. 6-hörning b. 5-hörning c. n-hörning.

Ledning: Vinkelsumman i en triangel är $180° = \pi$ (radianer).

3.1.6 Triangeln ABC är likbent, med baslängd 5 l.e. och benlängd 4 l.e. Beräkna

a. längden av höjden mot basen;
b. triangelns area;
c. längden av höjderna mot benen.

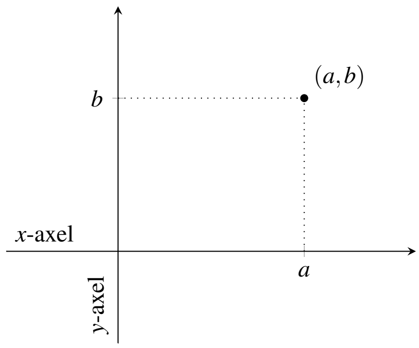
3.1.7 Triangeln ABC är rätvinklig med rät vinkel vid C. Punkten M är en punkt på sidan AB. Om $|AB| = 4$ l.e. och $|AM| = |CM|$, beräkna $|AM|$.

3.2 Analytisk geometri

Analytisk geometri handlar om att ange punkter med hjälp av koordinater och sedan, med hjälp av dessa, beskriva geometriska objekt genom ekvationer. Här skall vi enbart studera räta linjens ekvation och cirkelns ekvation. Grunden till det hela är **koordinatsystem**.

3.2.1 Koordinatsystem

Ett rätvinkligt koordinatsystem består av två riktade linjer som skär varandra under rät vinkel i en punkt. Oftast ritar man ena linjen horisontellt, den kallas **x-axeln**, och den andra linjen som kallas **y-axeln** ritas vertikalt. Deras skärningspunkt kallas **origo**. Givetvis kan koordinatsystem vridas om man så önskar, men i detta kapitel håller vi oss till horisontell x-axel.



Figur 19: Rätvinkligt koordinatsystem.

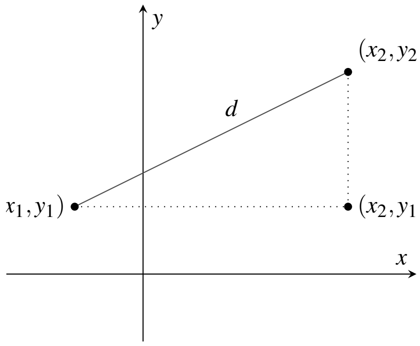
De två koordinataxlarna är **tallinjer**. Origo motsvarar talet 0 på både x- och y-axeln, punkterna till höger på x-axeln och uppåt på y-axeln motsvarar positiva tal, de till vänster och nedåt motsvarar negativa tal. Om punkten P ligger på en av axlarna och motsvarar talet a så är $|a| =$ avståndet mellan origo och punkten P.

Varje punkt i planet kan nu tilldelas **koordinater** (a,b) på följande sätt. Vi drar först genom punkten en linje parallell med y-axeln. Denna linje skär x-axeln i en punkt som motsvarat ett tal a. Drag också en linje parallell med x-axeln. Denna skär y-axeln i en punkt som motsvarar ett tal b.

Punkter i planet och ordnade par av reella tal svarar på så vis precis mot varandra. Vi säger därför att planet är

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x \in \mathbb{R} \text{ och } y \in \mathbb{R}\}.$$

De två koordinataxlarna delar in planet i fyra delar, **kvadranter**. Dessa numreras moturs med början i första kvadranten där både x- och y-koordinaten är positiva. I andra kvadranten är $x < 0$ och $y > 0$. I tredje är båda negativa och i fjärde är $x > 0$ och $y < 0$.



Figur 20: Avståndet d mellan punkterna (x_1, y_1) och (x_2, y_2).

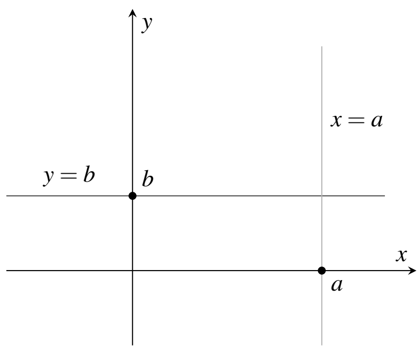
Betrakta nu två punkter i planet (x_1, y_1) och (x_2, y_2). Dessa är hörn i en rätvinklig triangel med (x_1, y_2) som det tredje hörnet. De två kateternas längder är då $|x_1 - x_2|$ och $|y_1 - y_2|$. Pythagoras sats ger oss nu att hypotenusans längd är

$$\sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}.$$

Eftersom avståndet från en punkt till en annan är längden av sträckan mellan punkterna kan avståndet, d, mellan (x_1, y_1) och (x_2, y_2) beräknas med **avståndsformeln**:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

3.2.2 Räta linjer



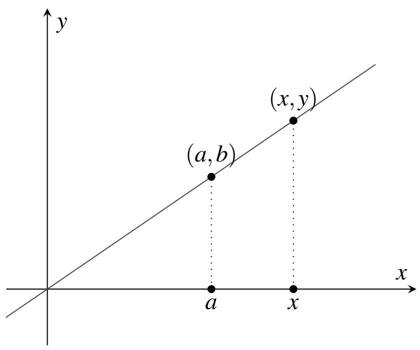
Figur 21: Axelparallella linjer.

Betrakta först en linje parallell med x-axeln i ett koordinatsystem i $\mathbb{R}^2$. Eftersom alla punkter på denna linje har samma y-koordinat och alla punkter med denna y-koordinat ligger på linjen, kan vi beskriva linjen som

$$\{(x, y) : y = b\},$$

dvs som mängden av punkter i planet vars andra koordinat är b. Vi säger att ekvationen $y = b$ är ekvationen för en rät linje parallell med x-axeln. På samma sätt är $x = a$ ekvationen för en rät linje parallell med y-axeln.

Vi skall nu bestämma ekvationer för linjer som inte är parallella med någon av koordinataxlarna och börjar med en linje L som går genom origo och någon punkt (a,b) i första kvadranten.



Figur 22: Sned linje.

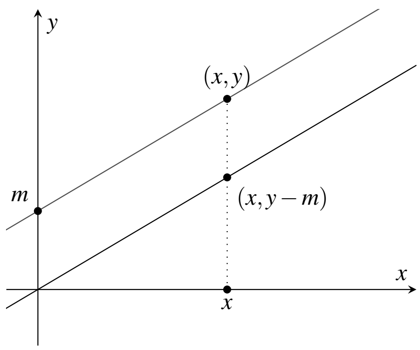
Låt (x,y) vara en godtycklig punkt på L med $x > 0$ (och $y > 0$). Vi har då två rätvinkliga trianglar med ett hörn i origo och ett på L. Dessa två trianglar är likformiga eftersom de har lika vinklar. Då följer det att $b/a = y/x$ vilket ger

$$y = kx \text{ där } k = \frac{b}{a}.$$

Konstanten k kallas **riktningskoefficienten** för linjen.

Om punkten (x,y) ligger på linjen men $x < 0$ och $y < 0$, så gäller att $b/a = -y/-x$ vilket också ger $y = kx$. Med ett liknande resonemang ser man att linjer genom origo och en punkt i andra och fjärde kvadranten har en ekvation $y = kx$, där $k < 0$.

(Riktningskoefficienten k är lika med $\tan v$, där v är vinkeln mellan linjen och positiva x-axeln.)



Figur 23: Linje som inte går genom origo.

Betrakta nu en rät linje som skär y-axeln där $y = m$. Denna är parallell med en linje genom origo och riktningskoefficient k. För punkten $(x, y-m)$ gäller då att $y - m = kx$.

Linjen genom $(0,m)$ har alltså ekvationen

$$y = kx + m.$$

Enpunktsformeln. Vi skall visa den s.k. enpunktsformeln. Denna säger att ekvationen för en rät linje, som är parallell med linjen $y = kx$ och går genom en given punkt (x_0, y_0) är

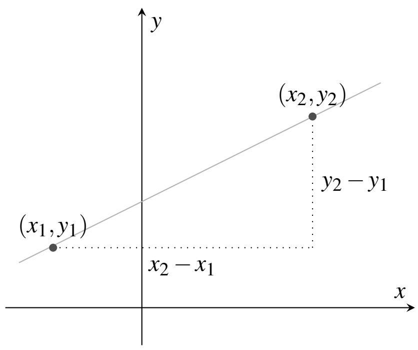
$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Bevis. Ekvationen $y - y_0 = k(x - x_0)$ kan skrivas om till $y = kx + m$ där $m = y_0 - kx_0$. Alltså är det ekvationen för en rät linje parallell med linjen $y = kx$. Dessutom gäller det att insättning av $x = x_0$ och $y = y_0$ ger 0 i både vänster och höger led av ekvationen. Därför är $y - y_0 = k(x - x_0)$ också ekvationen för en linje genom (x_0, y_0). □

Tvåpunktsformeln. En rät linje, som går genom två givna punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) med $x_1 \neq x_2$, har ekvationen

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1).$$

Detta är den s.k. tvåpunktsformeln för räta linjen.



Figur 24: Linje med två punkter.

Bevis. Eftersom linjen går genom (x_1, y_1) och (x_2, y_2), där $x_1 \neq x_2$, så kan riktningskoefficienten beräknas:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Tillämpa nu enpunktsformeln med $(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$ så erhålls den sökta ekvationen. □

Vi har härlett tre typer av ekvationer för räta linjer. Lodräta linjer har ekvationen $x = a$, vågräta linjer har ekvationen $y = b$ och övriga linjer $y = kx + m$ med $k \neq 0$. Alla dessa kan skrivas på formen

$$Ax + By + C = 0,$$

där minst en av koefficienterna A och B är $\neq 0$. Detta är den **allmänna formen** för räta linjens ekvation. Om $A = 0$, men $B \neq 0$ så fås en vågrät linje $y = -C/B$, om $B = 0, A \neq 0$ får en lodrät linje $x = -C/A$ och om $A \neq 0$ och $B \neq 0$ en rät linje

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

som skär båda axlarna.

Till skillnad från de andra skrivsätten är inte ekvationen $Ax + By + C = 0$ entydigt bestämd av linjen, dvs. en och samma linje kan beskrivas av flera ekvationer. Både $x + 2y + 3 = 0$ och $2x + 4y + 6 = 0$ är ekvationer för samma linje. Du ser detta genom att skriva om ekvationerna på formen $y = kx + m$. Man talar därför hellre om **en ekvation** (obestämd form) för den räta linjen i stället för **ekvationen** (bestämd form) för linjen.

Två linjer $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ och $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ är **parallella** om och endast om riktningskoefficienterna är lika dvs. om $k_1 = -A_1/B_1$ och $k_2 = -A_2/B_2$ är lika eller om $B_1 = B_2 = 0$.

Exempel. Bestäm en ekvation för räta linjen genom punkterna $(2, 4)$ och $(-1, 3)$.

Riktningskoefficienten blir som i härledningen av tvåpunktsformeln

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 4}{-1 - 2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

Med enpunktsformeln får vi att linjens ekvation blir

$$y - 4 = \frac{1}{3}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{x}{3} + \frac{10}{3} \Leftrightarrow x - 3y + 10 = 0.$$

Alternativt kan man förstås ta den andra punkten $y - 3 = \frac{1}{3}(x + 1)$.

Svar: $x - 3y + 10 = 0$.

Observera att det är en god vana att kontrollera räkningarna genom att visa att de givna punkterna satisfierar den erhållna ekvationen. I det fallet kontrollerar vi och får

$$2 - 3 \cdot 4 + 10 = 0 \text{ respektive } -1 - 3 \cdot 3 + 10 = 0,$$

som båda stämmer. □

Exempel. Sök skärningspunkten mellan linjerna $3x + 4y - 6 = 0$ och $2x + y - 5 = 0$.

Rita först en figur som åtminstone ger en approximation till skärningspunkten. En punkt ligger på en linje om punktens koordinater satisfierar linjens ekvation. Punkten ligger på båda linjerna om punktens koordinater satisfierar båda ekvationerna, alltså om koordinaterna är en lösning till ekvationssystemet med de två linjernas ekvationer (vi påminner om att frågan diskuterades i avsnittet om linjära ekvationssystem).

Vi vill lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 2x + y \ = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 8x + 4y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ 5x \qquad = 14 \end{cases},$$

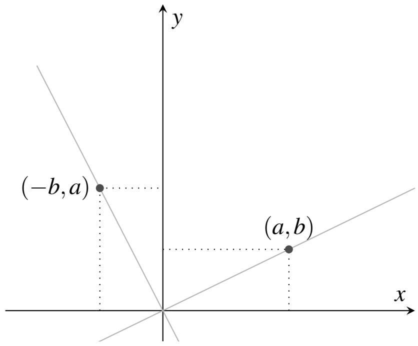
som ger

$$x = \frac{14}{5} \text{ och } y = \frac{6 - 3x}{4} = \frac{6 - 3 \cdot \frac{14}{5}}{4} = \frac{\frac{30-42}{5}}{4} = \frac{-3}{5}.$$

Alternativt kan man lösa ut y ur den andra ekvationen vilket ger $y = 5 - 2x$, som insatt i den första ekvationen ger $3x + 4(5 - 2x) = 6$ o.s.v..

Svar: Skärningspunkten är $(14/5, -3/5)$. □

En rät linje, som skär en given rät linje vinkelrätt, kallas **normal** till den givna linjen.



Figur 25: Linjer med två punkter.

Figur 25 illustrerar att om man vrider linjen $y = kx$ en rät vinkel moturs, så kommer punkten (a,b) att hamna på $(-b,a)$. Av detta följer att normalen genom origo till linjen $y = kx$ har riktningskoefficienten $a/-b$. Eftersom $k = b/a$ har vi att $a/-b = -1/k$.

Normalens riktningskoefficient är alltså $-1/k$, om den givna linjens riktningskoefficient är k. Om vi översätter detta till en ekvation på den allmänna formeln, så får vi att en rät linje $Ax + By + C_1 = 0$ har normalerna $Bx - Ay + C_2 = 0$. Här är konstanterna C_1 och C_2 godtyckliga eftersom villkoret att vara normal bara beror på linjens riktning.

Exempel. Bestäm en ekvation för linjen, som går genom $(2, -1)$ och är normal till $3x + 2y + 2 = 0$ Observera att punkten $(2, -1)$ ligger utanför den givna linjen.

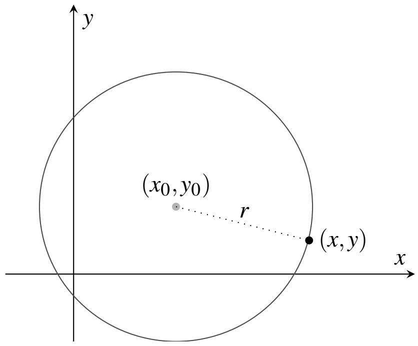
Den givna linjen, vars ekvation kan skrivas $y = -3x/2 - 1$, har riktningskoefficienten $k_1 = -3/2$. Normalens riktningskoefficient är därför $k_2 = -1/k_1 = 2/3$ och normalens ekvation

$$y + 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \Leftrightarrow 2x - 3y - 7 = 0$$

beroende på vilken form man föredrar. □

3.2.3 Cirkelns ekvation

En cirkel består av alla punkter i ett plan som har ett bestämt avstånd, **cirkelns radie**, till en bestämd punkt, **cirkelns medelpunkt** eller **centrum**.



Figur 26: Cirkel med radie r kring x_0, y_0.

Ekvationen för en cirkel med radien r och medelpunkten (x_0, y_0) är

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Detta följer av avståndsformeln: Punkten (x, y) ligger på cirkeln precis när dess avstånd till (x_0, y_0), $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, är r, eller (bättre) när kvadraten på detta avstånd är r^2.

Speciellt är

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ekvationen för en cirkel med radien r och medelpunkten i origo. Cirkeln med ekvationen

$$x^2 + y^2 = 1$$

kallas **enhetscirkeln**.

Exempel. Ge den geometriska betydelsen av ekvationen

$$x^2 + 2x + y^2 - 3y = 3.$$

Ekvationen kan (genom kvadratkomplettering) skrivas om som

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot y + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 + 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

som om man använder kvadreringsreglerna blir

$$(x+1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2,$$

vilket betyder en cirkel med medelpunkt $(-1, 3/2)$ och radie $5/2$. Rita en figur! □

3.2.4 Cirklar och räta linjer

En rät linje som skär en cirkel kan göra det i en eller två punkter. Om det är två skärningspunkter, A och B så bildar sträckan AB en **korda** till cirkeln. Om linjen bara har en punkt, A, gemensam med cirkeln, så säger vi att linjen **tangerar** cirkeln och att A

är **tangeringspunkten**. Av symmetriskäl är linjen genom cirkelns medelpunkt och en punkt A på periferin **normal** till cirkelns tangent i A.

Exempel. Vi bestämmer ekvationen för tangenten i punkten $(1,2)$ till cirkeln med medelpunkt $(2,-1)$ och radie $\sqrt{10}$.

Cirkelns ekvation är $(x-2)^2+(y+1)^2=10$. Insättning av $(x,y)=(1,2)$ ger

$$\mathrm{VL}=(1-2)^2+(2+1)^2=(-1)^2+3^2=1+9=10$$

vilket visar att $(1,2)$ ligger på cirkeln. Normalen till cirkeln genom $(1,2)$ går också genom medelpunkten $(2,-1)$. Riktningskoefficient för normalen är

$$\frac{2-(-1)}{1-2}=\frac{3}{-1}=-3.$$

Riktningskoefficient för tangenten är då $-1/-3=1/3$. Tangentens ekvation erhålls med enpunktsformeln: $y-2=\frac{1}{3}(x-1)$. Detta skrivs om till $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ eller $x-3y+5=0$ beroende på vilken form man önskar. □

Exempel. Vi bestämmer skärningspunkterna mellan cirklarna

$$x^2+4x+y^2-2y=8 \text{ och } x^2+9x+y^2-3y=10.$$

Skärningspunkter är lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2+4x & +y^2-2y & = & 8 \\ x^2+9x & +y^2-3y & = & 10 \end{cases}$$

Subtrahera första ekvationen från den andra. Då erhålls:

$$\begin{cases} x^2+4x+y^2-2y=8 \\ 5x-y=2 \end{cases}$$

Det nya ekvationssystemets geometriska tolkning är att vi söker skärningspunkterna mellan cirkeln $x^2+4x+y^2-2y=8$ och den räta linjen $5x-y=2$. Lös ut y ur den andra ekvationen och sätt in i den första:

$$\begin{cases} x^2+4x+(5x-2)^2-2(5x-2)=8 \\ y=5x-2 \end{cases}$$

Den första ekvationen förenklas till $26x^2-26x=0$ med lösningarna $x_1=0$ som ger $y_1=-2$, respektive $x_2=1$ som ger $y_2=3$. Insättning av punkternas koordinater i cirklarnas ekvationer visar att båda punkterna ligger på båda cirklarna. Det är en god vana att göra en sådan kontroll.

Svar: Skärningspunkterna är $(0,-2)$ och $(1,3)$. □

En cirkels ekvation är bestämd om vi känner medelpunkt och radie, alltså om vi känner de tre storheterna x_0, y_0 och r. Detta betyder att tre av varandra oberoende villkor helt bestämmer en cirkel. T.ex. gäller det att genom tre givna punkter, som ej ligger i rät linje, går det en och endast en cirkel.

Exempel. Vi bestämmer ekvationen för cirkeln som går genom de tre punkterna $(2,2)$, $(2,-4)$ och $(-2,0)$.

Kalla medelpunkten (a,b) och radien r. Cirkelns ekvation är $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ där vi ska bestämma a, b och r. De tre punkterna ger de tre ekvationerna

$$\begin{cases}(2-a)^2+(2-b)^2=r^2\\(2-a)^2+(-4-b)^2=r^2\\(-2-a)^2+(0-b)^2=r^2.\end{cases}$$

Utveckla kvadraterna och subtrahera första ekvationen från de övriga:

$$\begin{cases}a^2-4a+4+b^2-4b+4=r^2\\12b+12=0\\8a+4b-4=0.\end{cases}$$

Den andra ekvationen ger nu $b=-1$ som insatt i den tredje ger $a=1$. Dessa värden ger i första ekvationen $r=\sqrt{10}$.

Svar: Cirkelns ekvation är $(x-1)^2+(y+1)^2=10$.

Som tidigare är det lämpligt att kontrollera att de givna punkterna satisfierar den erhållna ekvationen. $\square$

Övningar

3.2.1 Bestäm avståndet mellan

a. $(-6,0)$ och origo
b. origo och $(2,3)$
c. $(2,2)$ och $(-3,2)$
d. $(2,-2)$ och $(-4,6)$
e. $(-2,5)$ och $(-4,8)$

3.2.2 Bestäm en punkt på y-axeln, som ligger lika långt från punkterna

a. $(-3,2)$ och $(4,1)$
b. $(-2,1)$ och $(4,5)$

3.2.3 Bestäm läget för en liksidig triangels tredje hörn då två av hörnen ligger i

a. $(-1,-1)$ och $(3,1)$
b. $(2,3)$ och $(-1,0)$

3.2.4 Bestäm en ekvation för räta linjen genom

a. origo med riktningskoefficienten $2/3$
b. $(2,1)$ med riktningskoefficienten $-2/3$
c. $(-2,3)$ parallell med x-axeln
d. $(-2,3)$ parallell med y-axeln.

3.2.5 Bestäm en ekvation för räta linjen genom punkterna:

a. $(1,1)$ och $(2,3)$
b. $(-2,3)$ och origo
c. $(-1,0)$ och origo
d. $(-2,1)$ och $(2/3,1/3)$
e. $(4/3,-1/5)$ och $(3/7,2/9)$
f. $(-2/7,-3/23)$ och $(-2/7,8/69)$.

3.2.6 Sök skärningspunkterna mellan linjerna

a. $2x+3y-6=0$ och $x+y-1=0$
b. $2x+3y=0$ och $x-2y+2=0$
c. $2x-3y-6=0$ och $4x-6y=36$
d. $3x+2y-4=0$ och $6x+4y=8$

3.2.7 Visa att om $a \neq 0$ och $b \neq 0$ så har den räta linjen genom punkterna $(a,0)$ och $(0,b)$ ekvationen $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

3.2.8 Bestäm en ekvation för linjen genom punkterna:

a. $(2,0)$ och $(0,-4)$ b. $(0,3)$ och $(1,0)$
c. $(0,1)$ och $(0,0)$.

3.2.9 Bestäm en ekvation för normalen till linjen

a. $2x+5y=0$ i origo b. $3y-x=4$ i punkten $(-1,1)$
c. $5x+9y=0$ från punkten $(2,3)$ d. $x=4y+1$ från origo.

3.2.10 Bestäm en ekvation för cirkeln med följande medelpunkt och radie:

a. origo; $R=9$ b. $(2,-3); R=7$
c. $(-6,0); R=2,5$

3.2.11 Ge en ekvation för en cirkel, som har medelpunkten $(-1,3)$ och går genom

a. origo b. $(1,1)$
c. $(7,0)$

3.2.12 Ange den geometriska betydelsen av ekvationen

a. $x^2+y^2-3=0$ b. $x^2+y^2-4y=5$
c. $2x^2+2y^2-4x+3y=0$ d. $x^2+y^2+4x-y+4=0$
e. $36x^2+36y^2-36x+48y=39$.

3.2.13 Sök skärningspunkterna mellan cirkeln $x^2+4x+y^2-2y=8$ och räta linjen

a. $5x-y-2=0$ b. $2x-3y-6=0$
c. $4x-y-6=0$

3.2.14 Ge en ekvation för en cirkel, som går genom

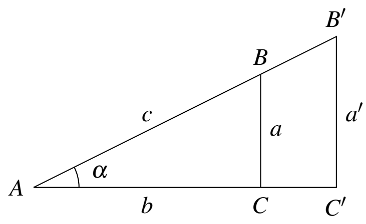
a. $(1,-3),(-3,1)$ och $(-5,-1)$
b. $(6,7),(-3,4)$ och $(-18,-1)$
c. $(1,6)$ och $(-3,-2)$ och har medelpunkt på y-axeln.

3.3 Trigonometri

3.3.1 Trigonometriska funktioner för vinklar $< 90°$

I detta avsnitt definierar vi de trigonometrska funktionerna för spetsiga vinklar med hjälp av rätvinkliga trianglar.

Betrakta nu två (likformiga) rätvinkliga trianglar $\triangle ABC$ och $\triangle AB'C'$med $\angle A = \alpha$, $\angle C = \angle C' = 90°$ och $\angle B = \angle B' = 90° - \alpha$. Hypotenusornas längder är $|AB| = c$ och $|A'B'| = c'$. Kateternas längder är $|BC| = a$ och $|B'C'| = a'$ samt $|AC| = b$ och $|A'C'| = b'$.



Figur 27: Två likformiga rätvinkliga trianglar.

Eftersom de två trianglarna är likformiga gäller det att

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Men då följer det att

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \text{ och } \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}.$$

Dessa tre kvoter beror alltså endast på vinkeln α och vi kan definiera **sinus**, **cosinus**, **tangens** och **cotangens** för en spetsig vinkel α som:

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{a}{c} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusa}}, & \tan\alpha &= \frac{a}{b} = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}}, \\ \cos\alpha &= \frac{b}{c} = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusa}}, & \cot\alpha &= \frac{b}{a} = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{motstående katet}}. \end{aligned}$$

Av definitionerna följer det direkt att

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ och } \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Vi får också genom att multiplicera med nämnarna i definitionerna att

$$a = c \cdot \sin\alpha, \quad b = c \cdot \cos\alpha, \quad a = b \cdot \tan\alpha \text{ och } b = a \cdot \cot\alpha.$$

Det följer också av definitionerna att $\sin\alpha$ och $\tan\alpha$ ökar om α ökar, medan $\cos\alpha$ och $\cot\alpha$ minskar (så länge vinkeln $\angle A$ är spetsig).

Eftersom det för den andra spetsiga vinkeln $\angle B$, som är komplementvinkeln till $\angle A$, gäller att $\angle B = 90^\circ - \alpha$ så får vi att

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin\alpha, & \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos\alpha, \\ \tan(90^\circ - \alpha) &= \cot\alpha, & \cot(90^\circ - \alpha) &= \tan\alpha. \end{aligned}$$

Man kommer ihåg detta som att *cosinus för en vinkel är sinus för komplementvinkeln* och vice versa, samt *tangens för en vinkel är cotangens för komplementvinkeln* och vice versa.

Pythagoras sats ger oss följande användbara samband mellan sinus och cosinus av en vinkel.

Trigonometriska ettan: För alla vinklar α i intervallet $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ gäller att

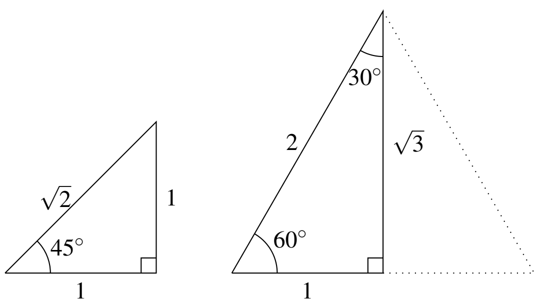
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Bevis. Med beteckningar som i definitionerna är $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ och $\cos\alpha = \frac{b}{c}$. Då är

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \{\text{Pythagoras sats}\} = \frac{c^2}{c^2} = 1,$$

vilket är precis det vi skulle bevisa. □

Anmärkning. Vi kommer att definiera sinus och cosinus för vinklar som inte är spetsiga längre fram i kapitlet. Trigonometriska ettan och formlerna för komplementvinklar (vinklar vars summa är 90°) gäller även dessa vinklar.



Figur 28: En likbent rätvinklig triangel samt en halv liksidig triangel.

Vi härleder nu värdena för sinus, cosinus, och tangens för en spetsig vinkel i en likbent, rätvinklig triangel eller i en halv liksidig triangel, dvs. för vinkeln 30°, 45° eller 60°.

Vi får i figur 28 att vinklarna blir 45°, 60°, respektive 30° i de två trianglarna. Pythagoras sats ger oss att hypotenusan i den vänstra triangeln är $\sqrt{2}$ och höjden i den högra triangeln är $\sqrt{3}$. Definitionerna ger oss då följande värden:

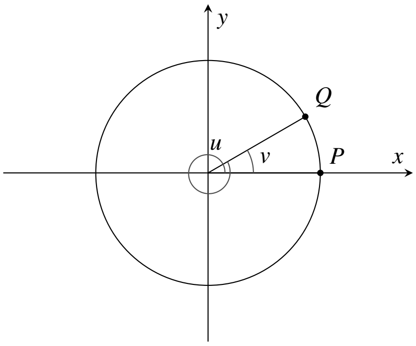
v	30°	45°	60°
$\sin v$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos v$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan v$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

3.3.2 De trigonometriska funktionerna för godtyckliga vinklar

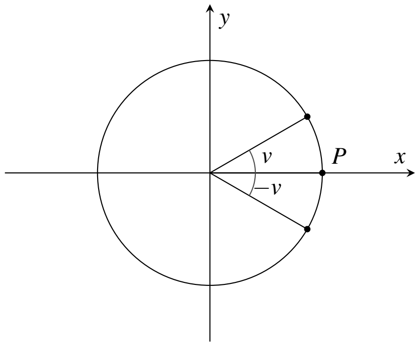
I det här avsnittet definieras de trigonometriska funktionerna för godtyckliga vinklar. Det kan tyckas omotiverat om man inskränker sig till tillämpningarna inom geometrin, men det visar sig att sinus och cosinus kommer till användning i betydligt fler sammanhang, t.ex. då man modellerar svängningar och periodiska processer.

I avsnitt 3.1.2 beskrev vi hur man mäter en vinkel med längden av en cirkelbåge. Detta skall vi utnyttja nu för att definiera sinus, cosinus, tangens, och cotangens för godtyckliga vinklar.

I ett xy-plan är origo, O, medelpunkt i enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$. Punkten $P = (1,0)$ är cirkelns skärningspunkt med positiva x-axeln. Tänk dig nu sträckan OP likt en visare på en klocka vrids moturs runt origo så att P:s färd längs enhetscirkeln har längd v och att den hamnar i Q. Vinkeln mellan strålens utgångsläge OP och dess slutläge OQ ges då måttet v radianer. Observera att om man vrider $v + 2\pi$ radianer så hamnar punkten P också i Q eftersom 2π radianer motsvarar vridning ett varv moturs.



(a) Vinkeln u är $2\pi + v$.

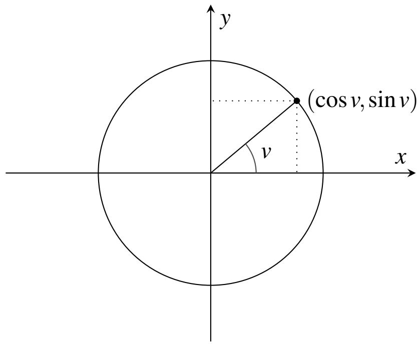


(b) En vinkel och dess negativa motsvarighet

Figur 29: Allmänna vinklar.

Om visaren i stället vrids medurs ges vinkeln måttet $-v$ radianer.

Det finns en stor fördel med detta synsätt. Vi kan tänka oss att visaren vrids mer än ett varv och låta vinkeln vara längden av den genomlöpta cirkelbågen. Vinklar kan då vara större än 2π. Dessa har inte längre någon geometrisk motsvarighet. Den punkt som motsvarar vinkeln $5\pi/2$ är $(0,1)$ eftersom $5\pi/2 = 2\pi + \pi/2$. Visaren vrids ett och ett kvarts varv. Vinklarna $5\pi/2$ och $\pi/2$ motsvaras av samma punkt men är olika vinklar. Om visaren vrids medurs är vinkeln negativ. Vinkeln $-3\pi/2$ motsvaras också av $(0,1)$.



Figur 30: Enhetscirkeln.

En första observation vi kan göra är att om

$$0 < v < \frac{\pi}{2}$$

så är $Q = (\cos v, \sin v)$, eftersom vi har en rätvinklig triangel med en hypotenusa av längd 1. Denna observation ligger till grund för den allmänna definitionen av de trigonometriska funktionernas värden för godtyckliga vinklar.

Låt $Q = (x, y)$ motsvara vinkeln v enligt ovan. Då är

$$\cos v = x,\ \sin v = y,\ \tan v = \frac{y}{x}\ \text{ om }\ x \neq 0\ \text{ och }\ \cot v = \frac{x}{y}\ \text{ om }\ y \neq 0.$$

För vinklar v sådana att $x = 0$ är $\tan v$ odefinierat. För vinklar v sådana att $y = 0$ är $\cot v$ odefinierat.

Eftersom en ökning eller minskning av v med 2π motsvarar en vridning av ”visaren” OP ett helt varv mot- eller medurs följer det att sinus och cosinus är **periodiska**. Närmare bestämt så har vi följande:

$$\begin{aligned} \sin v &= \sin(v + 2\pi) = \sin(v + n \cdot 2\pi), \ \text{ för alla }\ n \in \mathbb{Z} \\ \cos v &= \cos(v + 2\pi) = \cos(v + n \cdot 2\pi), \ \text{ för alla }\ n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Exempel. Vi bestämmer $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.
Vi har att $-7\pi/4 = \pi/4 - 2\pi$. Detta ger att

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

eftersom en ändring av vinkeln med -2π ger samma värde för sinus. $\square$

Från definitionerna gör vi direkt följande grundläggande och viktiga observationer:

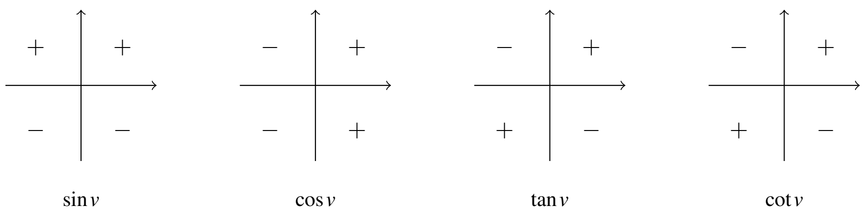
$$
\begin{aligned}
1 &= \sin^2 v + \cos^2 v \quad \text{(trigonometriska ettan)} \\
\tan v &= \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{1}{\cot v} \\
\cot v &= \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{1}{\tan v}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-1 \leq \sin v \leq 1, &\quad \text{dvs.} \quad |\sin v| \leq 1 \ \text{ för alla vinklar } v \\
-1 \leq \cos v \leq 1, &\quad \text{dvs.} \quad |\cos v| \leq 1 \ \text{ för alla vinklar } v
\end{aligned}
$$

Genom att bestämma den punkt som motsvarar en viss vinkel så får man enkelt följande tabell med värdena för vinklarna som svarar mot jämna kvartsvarv.

v	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin v$	0	1	0	-1	0
$\cos v$	1	0	-1	0	1
$\tan v$	0	odefinierat	0	odefinierat	0
$\cot v$	odefinierat	0	odefinierat	0	odefinierat

Eftersom $\sin v = y$ är $\sin v$ positiv för vinklar i första och andra kvadranten och negativ i tredje och fjärde. Liknande scheman fås för $\cos v$, $\tan v$ och $\cot v$:



Figur 31: Tecknet på de trigonometriska funktionerna i de fyra kvadranterna.

Exempel. Vi bestämmer $\sin v$, om $\cos v = 1/4$ och $3\pi/2 < v < 2\pi$.
Från trigonometriska ettan $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$ får vi att

$$\sin v = \sqrt{1 - \cos^2 v} \ \text{ eller } \ \sin v = -\sqrt{1 - \cos^2 v},$$

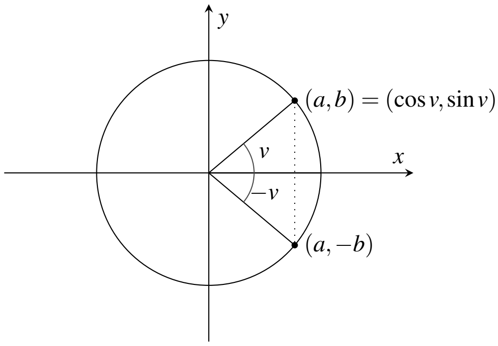
där tecknet beror på vilken kvadrant v ligger i. I fjärde kvadranten är $\sin v$ negativt, så

$$\sin v = -\sqrt{1 - \cos^2 v} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

i detta fallet. □

3.3.3 NÅGRA ENKLA FORMLER, SOM HÄNGER SAMMAN MED SPEGLINGAR

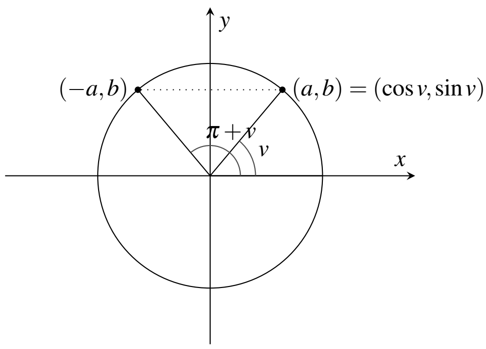
Antag att punkten (a,b) på enhetscirkeln svarar mot vinkeln v, dvs. att $a = \cos v$ och $b = \sin v$. Vi ritar (a,b) för enkelhets skull i första kvadranten, men tänk på att (a,b) är en godtycklig punkt på cirkeln, och att man behöver tänka igenom att argumenten duger även i de andra tre kvadranterna.



Figur 32: Spegling i x-axeln.

Speglar man (a,b) i x-axeln hamnar man i punkten $(a,-b)$ med vinkeln $(-v)$. Alltså är

$$\begin{aligned}
\cos(-v) &= \quad a &&= \cos v,\\
\sin(-v) &= \quad -b &&= -\sin v,\\
\tan(-v) &= \quad \frac{-b}{a} &&= -\tan v,\\
\cot(-v) &= \quad \frac{a}{-b} &&= -\cot v.
\end{aligned}$$

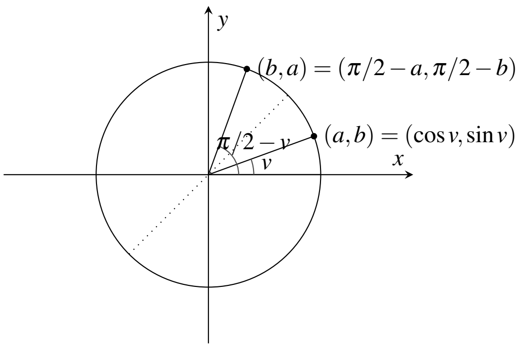


Figur 33: Spegling i y-axeln.

Spegelpunkten till (a,b) med avseende på y-axeln är $(-a,b)$ med vinkeln $(\pi - v)$.

Alltså är

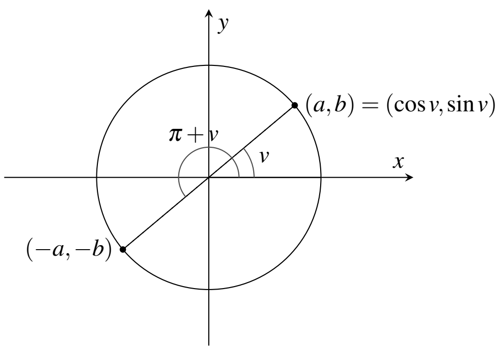
$$\begin{aligned}
\cos(\pi - v) &= & -a & = -\cos v,\\
\sin(\pi - v) &= & b & = \sin v,\\
\tan(\pi - v) &= & \frac{b}{-a} & = -\tan v,\\
\cot(\pi - v) &= & \frac{-a}{b} & = -\cot v.
\end{aligned}$$



Figur 34: Spegling i linjen $x = y$.

Spegelpunkten till (a,b) med avseende på linjen linjen $y = x$ är (b,a) med vinkeln $(\pi/2 - v)$. Alltså är

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right) &= & b & = \sin v,\\
\sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) &= & a & = \cos v,\\
\tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right) &= & \frac{a}{b} & = \cot v,\\
\cot\left(\frac{\pi}{2} - v\right) &= & \frac{b}{a} & = \tan v.
\end{aligned}$$



Figur 35: Spegling i origo.

Spegling av (a,b) i origo ger $(-a,-b)$ med vinkeln $(v+\pi)$. Man får då

$$\begin{aligned} \cos(v+\pi) &= & -a & = -\cos v, \\ \sin(v+\pi) &= & -b & = -\sin v, \\ \tan(v+\pi) &= & \tfrac{-b}{-a} & = \tan v, \\ \cot(v+\pi) &= & \tfrac{-a}{-b} & = \cot v. \end{aligned}$$

Kommentar: Det är värdefullt att själv kunna härleda formlerna med hjälp av figurer i stället för att slå upp dem. Det är också värdefullt att kunna dem utantill.

Exempel. Bestäm $\sin \frac{5\pi}{6}$.

Vinkeln $5\pi/6 = 150^\circ = 180^\circ - 30^\circ = \pi - \pi/6$ ligger i andra kvadranten. (Rita figur!).

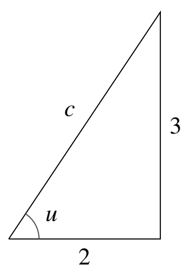
Sambandet $\sin(\pi - v) = \sin v$ ger

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

eftersom 30° är den minsta vinkeln i en halv liksidig triangel. □

Exempel. Bestäm $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = -3/2$ och $-\pi/2 < v < 0$.

Metod 1: Rita en hjälptriangel med $\tan u = 3/2$ och $0 < u < \pi/2$, så kateterna ska ha längderna 2 respektive 3. Triangeln behöver inte vara skalenlig, den är endast ett stöd för kalkylerna.



Figur 36: Hjälptriangel.

Pythagoras sats ger $c = \sqrt{13}$. Då är $\sin u = 3/\sqrt{13}$ och $\cos u = 2/\sqrt{13}$. Av formlerna ovan följer att $\sin v = \pm \sin u$ och $\cos v = \pm \cos u$. I fjärde kvadranten är $\sin v < 0$ och $\cos v > 0$. Alltså är

$$\sin v = -3/\sqrt{13} \quad \text{och} \quad \cos v = 2/\sqrt{13}.$$

Metod 2: Använd formeln $\tan v = \sin v / \cos v$ samt trigonometriska ettan:

$$\begin{cases} \tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = -\frac{3}{2} \\ \sin^2 v + \cos^2 v = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \sin v = -\frac{3}{2}\cos v \\ \frac{9}{4}\cos^2 v + \cos^2 v = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos v = \pm 2/\sqrt{13} \\ \sin v = \mp 3/\sqrt{13}. \end{cases}$$

Eftersom $\cos v > 0$ och $\sin v < 0$ i fjärde kvadranten, får vi följande

Svar: $\sin v = -3/\sqrt{13}$ och $\cos v = 2/\sqrt{13}$. □

3.3.4 Snedvinkliga trianglar. Areasatsen, sinussatsen och cosinussatsen.

En triangel har antingen tre spetsiga vinklar, den kallas då **spetsvinklig**, eller en trubbig och två spetsiga då den kallas **trubbvinklig**, eller en rät vinkel och två spetsiga då den som bekant kallas **rätvinklig**.

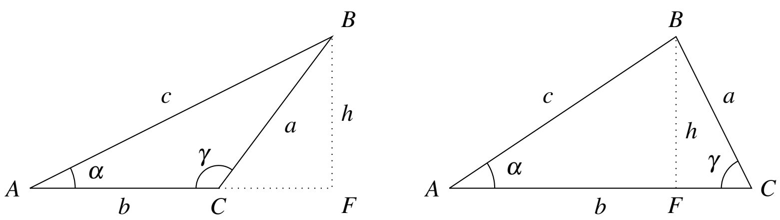
Ganska ofta beror kalkyler eller resonemang på om triangeln är spets-, rät-, eller trubbvinklig. Det är därför viktigt att övertyga sig om att påståenden etc är allmängiltiga och inte bara gäller t.ex. spetsvinkliga trianglar.

För att illustrera detta inleder vi med följande sats för att beräkna arean av en triangel.

Areasatsen: För en triangel med sidorna a, b och c och motstående vinklar α, β och γ så gäller för **triangelns area** T att

$$T = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}.$$

Med andra ord så är arean halva produkten av två sidors längder och sinus för deras mellanliggande vinkel.



(a) trubbvinklig triangel

(b) spetsvinklig triangel

Figur 37: Två fall i areasatsen.

För att bevisa areasatsen konstaterar vi att arean av en triangel är **basen** gånger **höjden** genom 2. I båda trianglarna i figur 37 är basen $|AC| = b$. Punkten F är fotpunkt till höjden som kan beräknas på två sätt. Dels är $h = c \cdot \sin\alpha$, men h kan även beräknas med hjälp av a och γ. I den trubbvinkliga triangeln är $h = a \cdot \sin(180^\circ - \gamma)$, i den spetsvinkliga är $h = a \cdot \sin\gamma$. Men $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin\gamma$. Alltså gäller $h = a \cdot \sin\gamma$ i båda trianglarna. Detta gäller även i en rätvinklig triangel. Vi har då att

$$T = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{b \cdot a \cdot \sin\gamma}{2}.$$

Givetvis kan man låta de två triangelhörnen $\angle A$ och $\angle B$ byta roll vilket innebär att det även gäller att $T = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2}$ och satsen är bevisad.

Om arean T multipliceras med 2 och divideras med abc erhålls följande sats.

Sinussatsen: För en triangel med sidorna a, b och c och motstående vinklar α, β och γ så gäller att

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

Vi skall nu härleda cosinussatsen för en triangel. Vi använder beteckningarna i figur 37. Låt $|AC| = b$ och $|CF| = p$. Då är

$$p = a \cdot \cos(180^\circ - \gamma) = -a \cdot \cos\gamma$$

om $\angle C$ är trubbig och $p = a \cdot \cos\gamma$ om $\angle C$ är spetsig. I båda fallen är

$$|AF| = b - a \cdot \cos\gamma.$$

Detta gäller även i en rätvinklig triangel. Pythagoras sats (på de två deltrianglarna) ger, både då $\angle C$ är trubbig och då $\angle C$ är spetsig att

$$a^2 = h^2 + p^2 = h^2 + (\pm a \cdot \cos\gamma)^2 = h^2 + (a \cdot \cos\gamma)^2$$

och

$$c^2 = h^2 + (b - a \cdot \cos\gamma)^2 = h^2 + (a \cdot \cos\gamma)^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma.$$

Vi har alltså visat

Cosinussatsen: För en triangel med sidorna a, b och c och motstående vinklar α, β och γ så gäller att

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma.$$

Anmärkning. I specialfallet $\gamma = 90^\circ$ fås $c^2 = a^2 + b^2$, dvs. Pythagoras sats.

Exempel. Solvera en triangel, dvs. beräkna alla sidor och vinklar, med $a = \sqrt{2}$, $b = 2$ och $\alpha = 30^\circ$.

Lösning: Sinussatsen ger

$$\sin\beta = \frac{b}{a} \cdot \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sin 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ekvationen $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ har lösningar

$$\beta_1 = 45^\circ \text{ (spetsig vinkel) och } \beta_2 = 180^\circ - \beta_1 = 135^\circ \text{ (trubbig vinkel),}$$

ty $\sin\beta_2 = \sin(180^\circ - \beta_1) = \sin\beta_1$.

Fall 1: $\beta_1 = 45^\circ$ ger vinkeln $\gamma_1 = 180^\circ - \beta_1 - \alpha = 105^\circ$. Vi behöver nu beräkna $\sin 105^\circ$, vilket kan göras exakt med hjälp av additionsformeln för sinus. Detta tas upp längre fram i kursen (del 2), så vi nöjer oss med att konstatera att

$$\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \approx 0.97.$$

Nu kan vi beräkna c_1 genom att använda sinussatsen

$$c_1 = a \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \alpha} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = \sqrt{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{1/2} = \sqrt{3}+1.$$

Fall 2: $\beta_2 = 135^\circ$ ger vinkeln $\gamma_2 = 180^\circ - \beta_2 - A = 30^\circ$. Precis som i fall 1, så kan $\sin 15^\circ$ beräknas exakt med additionsformeln för sinus. Vi får

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \approx 0.26,$$

och sinussatsen ger

$$c_2 = a \cdot \frac{\sin \gamma_2}{\sin \alpha} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} = \sqrt{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{1/2} = \sqrt{3}-1.$$

Svar: De två fallen $\beta_1 = 60^\circ$, $\gamma_1 = 90^\circ$, $c_1 = 2\sqrt{3}$, respektive $\beta_2 = 120^\circ$, $\gamma_2 = 30^\circ$, $c_2 = \sqrt{3}$. $\square$

Exempel. Beräkna c om $a = 1+\sqrt{3}$, $b = 2$, och $\gamma = 30^\circ$.

Lösning: Cosinussatsen ger

$$\begin{aligned} c^2 &= (1+\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot 2\cdot \cos 30^\circ = 1+2\sqrt{3}+3+4-4(1+\sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 8+2\sqrt{3}-2(\sqrt{3}+3) = 2. \end{aligned}$$

Eftersom $c > 0$, får vi $c = \sqrt{2}$.

Svar: $c = \sqrt{2}$. $\square$

Övningar

3.3.1 Bestäm exakta värdet av

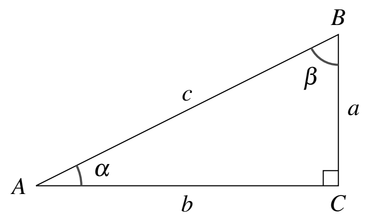
a. $2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{6}\cdot\cot\frac{\pi}{3}$

b. $\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{6}$

c. $(\sin 60^\circ + \sin 45^\circ)(\cos 30^\circ - \cos 45^\circ)$

d. $(\tan 60^\circ - \tan 45^\circ)/(1+\tan 60^\circ\cdot\tan 45^\circ)$.

3.3.2 I den här uppgiften betraktar vi en rätvinklig triangel med beteckningar enligt figuren nedan:



Bestäm

a. a och b, då $c = 3$ och $\alpha = 30^\circ$
b. A och B, då $a = 1$ och $b = 1$
c. a och c, då $b = \sqrt{5}$ och $\beta = 60^\circ$
d. a och b, då $c = 5$ och $\tan\alpha = 1/\sqrt{3}$
e. a och b, då $c = 3$ och $\tan\beta = 3/4$.

3.3.3 Bestäm för v i intervallet $0 < v < 90^\circ$

a. $\cos v$ och $\tan v$, om $\sin v = 3/5$, [Ledning: Rita en triangel med $a = 3$ och $c = 5$]
b. $\cos v$ och $\tan v$, om $\sin v = 2/3$
c. $\sin v$ och $\tan v$, om $\cos v = 1/3$
d. $\sin v$ och $\tan v$, om $\cos v = 0,4$
e. $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = 1/2$
f. $\sin v$ och $\cos v$, om $\tan v = 24/7$
g. $\sin v$ och $\cos v$, om $\cot v = 0,7$

3.3.4 I vilken kvadrant ligger vinkeln

a. $5\pi/4$
b. 500°
c. -200°
d. 1000°
e. $27\pi/4$
f. $-100\pi/3$
g. -10000°

3.3.5 Bestäm

a. $\cos 13\pi$
b. $\sin(-13\pi/2)$
c. $\sin(13\pi/3)$
d. $\cos(13\pi/6)$
e. $\tan(137\pi)$
f. $\tan(137\pi/4)$

3.3.6 Visa att

a. $1/\cos^2 v = 1 + \tan^2 v$
b. $1/\sin^2 v = 1 + \cot^2 v$

3.3.7 Bestäm $\cos v$, om

a. $\sin v = 1/3$, med v i första kvadranten
b. $\sin v = -2/5$, med v i fjärde kvadranten
c. $\sin v = 2/3$

3.3.8 Bestäm $\sin v$, om

a. $\cos v = -0,6,\ \pi/2 < v < \pi$
b. $\cos v = 0,4$

3.3.9 Bestäm $\tan v$ om

a. $\sin v = 1/4$, v i 2:a kvadranten
b. $\cos v = 0,3$, v i 4:e kvadranten
c. $\sin v = -0,5$
d. $\cos v = 2/9$

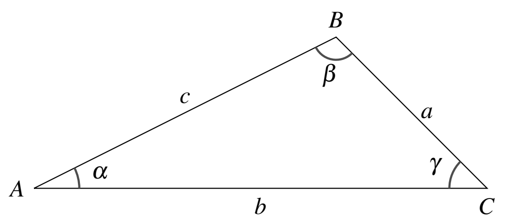
3.3.10 Bestäm $\sin v$ och $\cos v$, om

a. $\tan v = 2$, $\pi < v < \frac{3\pi}{2}$ b. $\tan v = -1/3$, $\frac{\pi}{2} < v < \pi$
c. $\tan v = -5$ d. $\cot v = -2$

3.3.11 Bestäm

a. $\sin(-\pi/6)$ b. $\cos(-\pi/6)$ c. $\sin(-\pi/3)$ d. $\tan(-\pi/4)$
e. $\sin(3\pi/4)$ f. $\cos(2\pi/3)$ g. $\sin(7\pi/6)$ h. $\tan(7\pi/6)$
i. $\sin(7\pi/4)$ j. $\cot(11\pi/6)$.

I resterande uppgifter betraktas en triangel med följande beteckningar



3.3.12 Solvera en triangel där

a. $a = \sqrt{3}$, $b = 1$ och $\alpha = 60^\circ$
b. $a = 1$, $c = \sqrt{3}$ och $\gamma = 120^\circ$
c. $a = 2\sqrt{3}$, $b = 3$ samt $\gamma = 30^\circ$
d. $b = 1$, $c = \sqrt{2}$ samt $\alpha = 45^\circ$

3.3.13 Beräkna

a. c, då $a = 5$, $b = 3$, $\sin\gamma = 4/5$, och C är en spetsig vinkel.
b. b, då $a = 5$, $\sin\alpha = 1/\sqrt{3}$, och $\cos\beta = 3/5$.

3.3.14 Beräkna arean av en triangel där

a. $a = 5$, $b = 7$ samt $\gamma = 60^\circ$ b. $a = 4$, $c = 6$ samt $\beta = 30^\circ$
c. $b = c = 3$ samt $\alpha = 150^\circ$

4 Funktioner

Begreppet funktion har du säkert stött på i gymnasiets kurser i matematik, fysik och kemi. Där lär man sig (förmodligen) att en funktion är en regel för att till ett eller flera tal ordna exakt ett tal. Exempelvis är funktionen $f(x) = x+2$ den regel som till varje tal x ordnar talet $x+2$ så att t ex $f(4) = 4+2 = 6$ och $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}+2$. Ett annat exempel är funktionen $h(a,b) = a+b+4$ som till varje talpar (a,b) ordnar talet $a+b+4$, så att t.ex. $h(0,0) = 4$ och $h(4.3,7.2) = 15.5$ (vi använder här decimalpunkt istället för decimalkomma, vilket skulle bli förvirrande). Notera att de specifika bokstäverna x, a och b är oviktiga, dvs. funktionen f i exemplet ovan kan precis lika gärna anges via $f(c) = c+2$ eller via $f(r) = r+2$ etc och h kan lika gärna anges via $h(j,q) = j+q+4$.

Vi ska här inte ändra på gymnasiets tolkning av funktionsbegreppet, men vi ska göra det en aning mer allmänt.

4.1 Funktionsbegreppet, grafbegreppet, inverser

4.1.1 Funktionsbegreppet

Den allmänna definitionen av funktionsbegreppet är:

En **funktion** f från mängden A till mängden B är en regel som till varje element $a \in A$ ordnar ett entydigt element $f(a) \in B$.

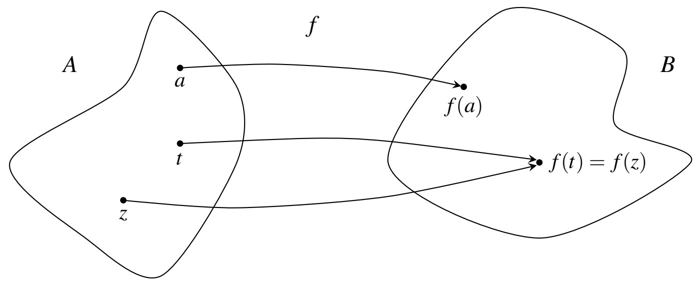
Lite löst sagt: Man stoppar in ett element från A i f och får ut ett element i B. Att f är en funktion från A till B skrivs på symbolisk form som

$$f : A \to B.$$

Om man vill beteckna vad som händer med ett element a kan man skriva

$$a \mapsto f(a)$$

vilket utläses som att "a avbildas på $f(a)$". En illustration till funktionsbegreppet finns i figur 38.



Figur 38: En illustration av funktionsbegreppet: Punkterna a, t och z i A avbildas på punkterna $f(a)$, $f(t)$, respektive $f(z)$ i B.

Mängden A kallas för f:s **definitionsmängd** eller definitionsområde, medan mängden B kallas för f:s **målmängd**. Om C är en delmängd av A sätter man

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\},$$

dvs. $f(C)$ är mängden av alla möjliga värden av $f(x)$ om x får väljas fritt i C. Man kallar $f(C)$ för **bilden av** C. Mängden $f(A)$, dvs. bilden av hela definitionsmängden, kallas för f:s **värdemängd**.

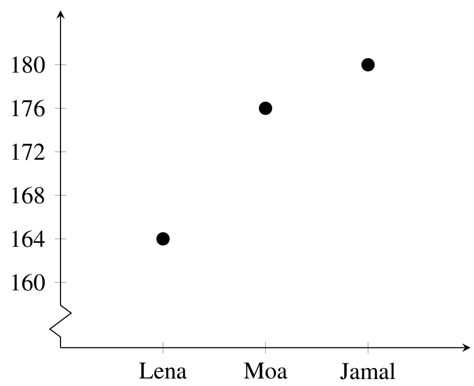
Exempel. Låt A vara mängden av alla Sveriges 349 riksdagsledamöter och B vara mängden av Sveriges 290 kommuner. En tänkbar funktion $g : A \to B$ är då att låta $g(x)$ vara den kommun där riksdagledamoten x är (alternativt senast var) folkbokförd. Detta är en OK definition då varje ledamot är folkbokförd (eller har varit folkbokförd senast) i exakt en svensk kommun. Vi har t.ex. (i skrivande stund) att g("Maud Olofsson") ="Robertsfors". Värdemängden blir alla de kommuner i vilken det finns (eller senast var) en riksdagsledamot folkbokförd.

Däremot är t.ex. $h : A \to B$ med $h(x)$ den kommun där riksdagledamoten x äger en fastighet inte någon funktion, eftersom det inte är så att varje ledamot äger fastighet i exakt 1 kommun (vissa äger ingen och vissa äger i fler än 1 kommun). □

4.1.2 Grafen till en funktion

Ett sätt att illustrera en funktion är att rita dess **graf**. Formellt definieras grafen till en funktion $f : A \to B$ som mängden $\{(x, f(x)) : x \in A\}$. Man bildar alltså alla möjliga par av värden i definitionsmängden och dess funktionsvärde.

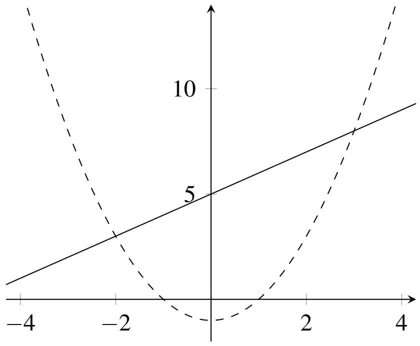
Exempel. Låt $A = \{\text{Lena, Moa, Jamal}\}$ och låt funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ ges av att $f(\text{Lena}) = 164$, $f(\text{Moa}) = 176$ och $f(\text{Jamal}) = 179$ (de tre personernas längd i centimeter). Då är $f(A) = \{164, 176, 179\}$. I figur 39 finns f:s graf utritad. □



Figur 39: Grafen till funktionen given av Lenas, Moas och Jamals längd.

□

Exempel. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ges av $f(x) = x + 5$ och $g(x) = x^2 - 1$. Då är $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ medan $g(\mathbb{R}) = [-1, \infty)$. Delar av de båda funktionernas grafer finns i figur 40 □



Figur 40: Delar av graferna till funktionerna $f(x) = x + 5$ och $g(x) = x^2 - 1$.

□

4.1.3 INVERS FUNKTION

En viktig egenskap som en funktion kan ha är att olika element alltid avbildas på olika element. Mer precist, om $f : A \to B$ så ska det gälla att om $a_1 \in A$, $a_2 \in A$ och $a_1 \neq a_2$ så är $f(a_1) \neq f(a_2)$. En funktion med denna egenskap säges vara **injektiv**.

Exempel. Funktionen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $h(x) = x^2$ är inte injektiv, ty t.ex. har vi att $h(1) = h(-1) = 1$.

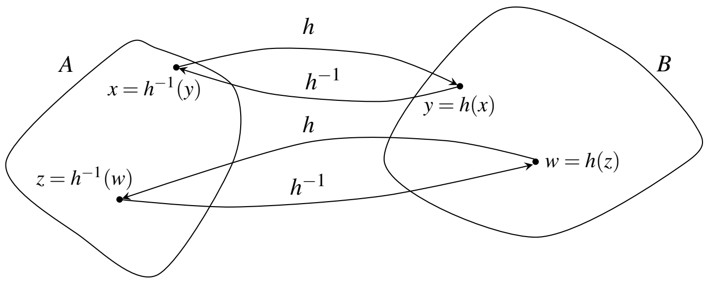
Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $g(x) = x + 2$ är injektiv, ty funktionens värde växer hela tiden då x ökar så den antar inte samma värde två gånger.

Betrakta funktionen vi hade tidigare i ett exempel där A var mängden av alla Sveriges 349 riksdagsledamöter och B var mängden av Sveriges 290 kommuner med $g : A \to B$ där $g(x)$ är den kommun där riksdagledamoten x är (alternativt senast var) folkbokförd. Denna är garanterat inte injektiv, ty det finns fler ledamöter än kommuner så minst en av kommunerna måste ha mer än 1 representant i riksdagen. □

Antag att funktionen $h : A \to B$ är injektiv och vi vet att $h(x) = b$ för något $b \in B$. Eftersom funktionen är injektiv så vet vi att det finns bara ett x som är sådant att $h(x) = b$. Detta kan vi göra för alla b som ligger i värdemängden, $h(A)$. Vi kan alltså definiera en funktion

$$h^{-1} : h(A) \to A \text{ med } h^{-1}(y) = x \text{ om } h(x) = y.$$

Denna funktion kallas för **inversen** till funktionen h och betecknas som ovan med h^{-1}. Med ord kan man säga att inversen h^{-1} tar funktionsvärdena till h tillbaka till deras ursprung (figur 41 illustrerar).



Figur 41: Inversen till en funktion.

Observera att det bara är injektiva funktioner som kan ha invers. Om $f(x_1) = f(x_2) = y$ med $x_1 \neq x_2$ så kan man ju inte avgöra om en eventuell invers skulle ta y till x_1 eller x_2.

Exempel. Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $g(x) = x + 2$ är injektiv så den har en invers. För att hitta denna sätter vi $y = g(x) = x + 2$ och löser sedan ut x och vi får $x = y - 2 = g^{-1}(y)$ enligt definitionen ovan. Värdemängden av g är alla reella tal så g^{-1} är definierad för alla reella tal så

$$g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{med} \qquad g^{-1}(y) = y - 2.$$

Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $f(x) = x^2$ är inte injektiv så den saknar invers.

Däremot är $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ med $h(x) = x^2$ injektiv, ty denna växer hela tiden och kommer inte att anta samma värde mer än 1 gång. Likheten $y = h(x) = x^2$ ger $x = \sqrt{y} = h^{-1}(y)$. Detta kan vi göra eftersom $x \geq 0$, så vi kan utesluta lösningen $x = -\sqrt{y}$.

Lika så är $k : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ med $k(x) = x^2$ injektiv, ty denna avtar hela tiden och kommer inte att anta samma värde mer än 1 gång. Likheten $y = k(x) = x^2$ ger nu $x = -\sqrt{y} = k^{-1}(y)$. Detta kan vi göra eftersom $x \leq 0$, så vi kan utesluta lösningen $x = \sqrt{y}$.

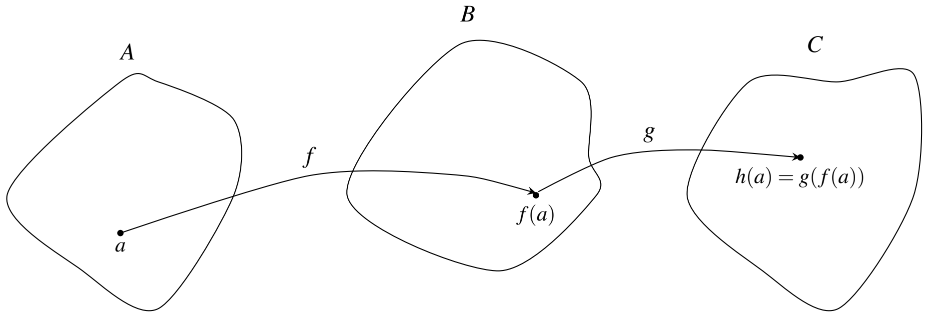
$\square$

4.1.4 Sammansättning av funktioner

Antag att f är en funktion från A till B och att g är en funktion från B till någon tredje mängd C, dvs. det som “kommer ut” från f går att “stoppa in” i g. Man kan då bilda en ny funktion h från A till C genom att för varje $x \in A$ sätta

$$h(x) = g(f(x)).$$

Funktionen h kallas för **sammansättningen** av f och g och man skriver $h = g \circ f$, dvs. man har $g \circ f : A \to C$, se figur 42.



Figur 42: Den sammansatta funktionen $h = g \circ f$.

Exempel. Betrakta funktionen vi hade tidigare i ett exempel där A var mängden av alla Sveriges 349 riksdagsledamöter och B var mängden av Sveriges 290 kommuner med $f : A \to B$ där $f(x)$ är den kommun där riksdagledamöten x är (alternativt senast var) folkbokförd. Låt $g : B \to \mathbb{N}$ vara funktionen som definieras av att $g(y)$ är antalet invånare i kommunen y vid årsskiftet 2014/2015. Vi tittar på sammansättningen $h = g \circ f$. Om man startar med en riksdagsledamot x så är $f(x)$ dennes kommun och $g(f(x))$ denna kommuns invånarantal. Därmed är $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$ inget annat än antalet invånare i riksdagsledamoten x:s kommun. $\square$

Det är viktigt att observera att $g \circ f$ och $f \circ g$ i regel är olika saker. Det är ju inte säkert att $f \circ g$ ens existerar bara för att $g \circ f$ existerar; det hänger på om utgången till g passar ihop med ingången till f, dvs. om $A = C$. I det allmänna fallet gäller inte detta så det ska snarare betraktas som undantag än regel att även $f \circ g$ existerar. Även om både $f \circ g$ och $g \circ f$ existerar så är de i allmänhet olika.

Exempel. I exemplet ovan med kommuner och riksdagsledamöter är inte $f \circ g$ definierat, ty ut från g kommer det naturliga tal och dessa kan man inte stoppa in i f för f vill ju ha riksdagsledamöter.

Betrakta funktionerna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $f(x) = x^2$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $g(x) = x + 2$. Här både $f \circ g$ och $g \circ f$ definierade då det hela tiden är reella tal som åker in och ut (och funktionerna tillåter vilka reella tal som helst som invärde). Däremot är de inte lika för

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x+2) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

men

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 2,$$

så t.ex. $f \circ g(0) = 4$ medan $g \circ f(0) = 2$. $\square$

Låt f vara en funktion med invers f^{-1} och låt x och y vara sådana att $y = f(x)$ (och därmed är $x = f^{-1}(y)$). Då gäller att

$$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \text{ och } f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x.$$

Alltså gäller att sammansättningarna $f \circ f^{-1}$ och $f^{-1} \circ f$ båda returnerar precis det man stoppar in. En funktion h som bara returnerar det man stoppar in, dvs. $h : A \to A$ med

$h(x) = x$, kallas för **identitetsfunktionen** på A. Med andra ord så är alltså sammansättningarna av en funktion med dess invers alltid identitetsfunktioner för respektive definitionsmängd.

Exempel. Betrakta funktionen $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ med $f(x) = x^2$. Denna har som vi sett tidigare inversen $f^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ med $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Om vi sätter samman dem så får vi precis som väntat

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x$$

(ty $x \geq 0$) och

$$f \circ f^{-1}(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

dvs. båda sammansättningarna är identitetsfunktionen. □

4.1.5 Reellvärda funktioner av en reell variabel

De funktioner som är viktigast i den här kursen är funktioner som har definitions- och värdemängd som är (delmängd till) de reella talen. I resten av avsnitten i det här kapitlet kommer vi att systematiskt gå igenom ett antal olika typer av sådana funktioner, dvs. **reellvärda funktioner av en reell variabel**.

Det finns några egenskaper som är intressanta och specifika för desssa funktioner. De vi ska titta på här är växande/avtagande och udda/jämn.

Begreppen växande/avtagande avser hur funktionsvärdena varierar då variabelns värde ökar. Vi har följande definitioner:

Låt A och B vara två delmängder till de reella talen. En funktion $f : A \to B$ säges vara

- **växande** om $f(y) \geq f(x)$ då $y > x$.
- **strängt växande** om $f(y) > f(x)$ då $y > x$.
- **avtagande** om $f(y) \leq f(x)$ då $y > x$.
- **strängt avtagande** om $f(y) < f(x)$ då $y > x$.

En funktion som är strängt växande (avtagande) är per definition automatiskt också växande (avtagande). En funktion som är strängt växande eller strängt avtagande är alltid injektiv, eftersom den hela tiden för växande argument antar nya större (mindre) värden.

Exempel. Vi hade i ett exempel tidigare funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $g(x) = x+2$. Denna är strängt växande, ty om $x < y$ så är $g(x) = x+2 < y+2 = g(y)$.

Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $f(x) = x^2$ är varken växande eller avtagande, ty t.ex. har vi $-1 > -2$ och $f(-1) < f(-2)$, men $2 > 1$ och $f(2) > f(1)$. Däremot är den strängt avtagande på intervallet $(-\infty, 0]$ och sedan strängt växande på intervallet $[0,\infty)$. Om vi alltså sätter $f_1 : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ och $f_2 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ med $f_1(x) = x^2$ och $f_2(x) = x^2$ så är f_1 strängt avtagande och f_2 strängt växande. Det enda vi gjorde var alltså att ändra definitionsmängden. □

Härnäst ska vi införa begreppen udda och jämn funktion som handlar om relationen mellan $f(a)$ och $f(-a)$. Vi har följande definitioner:

Låt A och B vara två delmängder till de reella talen, där A har egenskapen att om $a \in A$ så måste också $(-a) \in A$. En funktion $f(x) : A \to B$ säges vara

- **jämn** om $f(x) = f(-x)$ för alla $x \in A$.
- **udda** om $f(x) = -f(-x)$ för alla $x \in A$.

Observera att villkoret på A är synonymt med att A är symmetrisk kring 0.

Bakgrunden till betckningarna jämn och udda är att funktionen $f(x) = x^n$ är jämn om n är ett jämnt heltal, men udda om n är ett udda heltal:

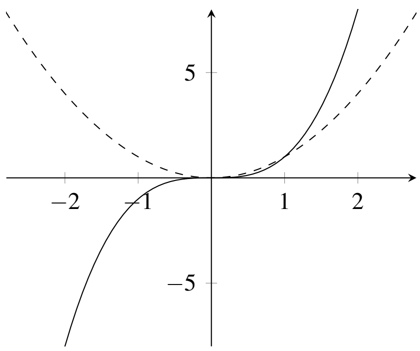
Exempel. I figur 43 finns grafen till funktionerna som ges av $f_1(x) = x^3$ och $f_2(x) = x^2$. Funktionen $f_1(x)$ är udda eftersom

$$f_1(-x) = (-x)^3 = -(x^3) = -f_1(x),$$

och funktionen $f_2(x)$ är jämn eftersom

$$f_2(x) = (-x)^2 = x^2 = f_2(x).$$

Geometriskt för grafen så betyder jämn att grafen ser likadan ut om den speglas i y-axeln och udda betyder att grafen ser likadan ut om den speglas i origo. □



Figur 43: Centrala delen av grafen av $f_1(x) = x^3$ (heldragen) och $f_2(x) = x^2$ (streckad).

Övningar

4.1.1 Låt A vara mängden av frukthandlare Lisas vattenmeloner. Vi definierar en funktion $f : A \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ genom att låta $f(x)$ vara melonen x vikt i (hela) gram. Vi definierar också en funktion $g : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Q}_+$ som $g(x) = px/1000$ där p är kilopriset (i kronor) på vattenmelonerna.

a. Är funktionen g injektiv?
b. Är funktionen f injektiv?
c. Beskriv funktionen $g \circ f$. Ange definitionsmängd och målmängd samt vad $g \circ f(x)$ är.
d. Är funktionen $g \circ f$ injektiv?
e. Vad är $f \circ g$?

4.1.2 Avgör om följande reella funktioner är (strängt) avtagande, (strängt) växande, injektiva, respektive udda eller jämna. Om funktionen är injektiv så bestäm inversen. Bestäm slutligen också funktionernas värdemängd.

a. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a(x) = x$
b. $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $b(x) = \frac{1}{x^2}$
c. $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c(x) = x^2 + 2x$
d. $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}$, $d(x) = x^2 + 1$
e. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $e(x) = x^3 + 1$

4.1.3 Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara två reella funktioner givna av $f(x) = x^2 - 1$ och $g(x) = 1/(1+x^2)$. Bestäm sammansättningarna $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ och $g \circ g$.

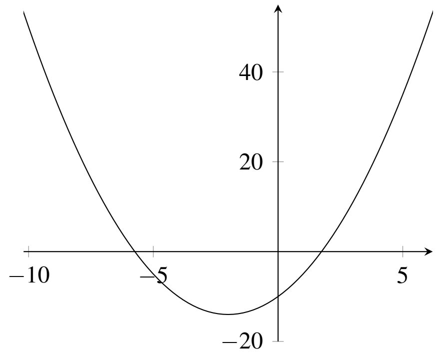
4.2 Polynom

Ett viktigt exempel på funktioner är **polynom(funktioner)**. Vi har tidigare tittat på polynom och ett polynom

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

kan man se som en funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Med andra ord så kan man alltid sätta in vilket reellt tal som helst och ut kommer ett reellt tal.

Exempel. Andragradspolynomet $f(x) = x^2 + 4x - 10$ kan vi kvadratkomplettera och vi får $f(x) = (x+2)^2 - 14$. Från en kvadratkomplettering kan man sedan läsa ut det mesta man kan tänkas vilja veta om polynomet som funktion. Nollställena blir $x_1 = -2 + \sqrt{14}$ och $x_2 = -2 - \sqrt{14}$. Det minsta värdet som funktionen antar är då $x + 2 = 0$ dvs. $x = -2$ (eftersom $(x+2)^2 \geq 0$) och värdet är då $f(-2) = -14$. När x ligger långt till vänster eller höger på tallinjen så växer funktionen obegränsat och kommer därmed att anta alla värden som är större än eller lika med -14. Värdemängden till funktionen är alltså alla reella tal ifrån -14 och uppåt, dvs. intervallet $[-14, \infty)$. Centrala delen av grafen finns i figur 44. Man ser de två nollställena, minimumet och att när x blir stort eller litet så tycks den försvinna uppåt. □

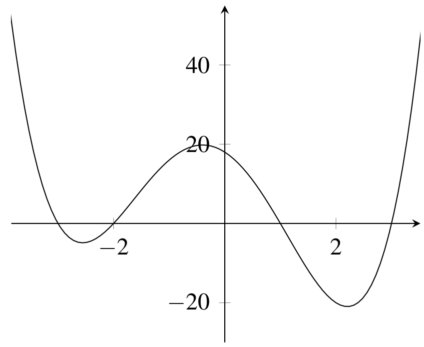


Figur 44: Centrala delen av grafen av andragradspolynomet $f(x) = x^2 + 4x - 10$.

Exempel. Vi tar en titt på polynomet

$$f(x) = (x-3)(x+3)(x-1)(x+2) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$$

som är av grad 4 och har fyra stycken olika (reella) nollställen. Centrala delen av grafen finns i figur 45. Man ser de fyra nollställena och när x blir stort eller litet så tycks den försvinna uppåt. För värden på variabeln x som är ligger långt till vänster eller höger på tallinjen är det alltid den term med högst potens som dominerar. I det här fallet är det x^4 som dominerar och denna har positiv koefficient (1) och jämn grad vilket gör att funktionen går mot oändligheten i båda ändarna. Värdemängden till funktionen är alla reella tal ifrån ca -21 (minimumet nära $x = 2$) och uppåt. $\square$

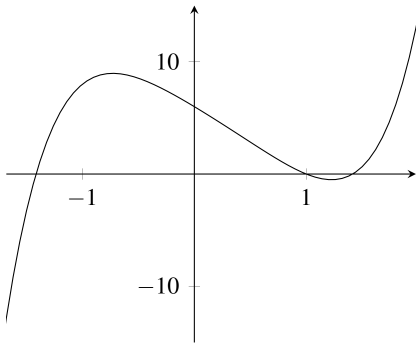


Figur 45: Centrala delen av grafen av fjärdegradspolynomet $f(x) = (x-3)(x+3)(x-1)(x+2) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$.

Exempel. Vi tittar nu på polynomet

$$f(x) = (x^2+3)(x-1)(x^2-2) = 6 - 6x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5$$

som är av grad 5 och har tre stycken olika (reella) nollställen (vilka?). Centrala delen av grafen finns i figur 46. Man ser de tre nollställena och när x går åt höger på tallinjen försvinner den uppåt och när x går åt vänster försvinner den nedåt. Det är x^5 som dominerar och denna har positiv koefficient (1) och udda grad vilket gör att funktionen går mot oändligheten respektive minus oändligheten. Värdemängden till funktionen är alla reella tal. □



Figur 46: Centrala delen av grafen av femtegradspolynomet $f(x) = (x^2+3)(x-1)(x^2-2) = 6-6x-x^2+x^3-x^4+x^5$.

Övningar

4.2.1 Skissa grafen till följande polynomfunktioner av grad två samt ange rötter och värdemängd.
a. $p(x) = x^2+2x-7$ b. $p(x) = x^2-3x+6$
c. $p(x) = 5-4x-x^2$
Tips: Bestäm först eventuellt maximum eller minimum samt rötter med hjälp av kvadratkomplettering.

4.2.2 Skissa grafen till följande polynomfunktioner. Ange nollställen och bestäm vad som händer när x går mot (plus eller minus) oändligheten.
a. $p(x) = (x^2-5)(x-1) = 5-5x-x^2+x^3$
b. $p(x) = (x^2+5)(x-1) = -5+5x-x^2+x^3$
c. $p(x) = (x^2-5)(x^2-1) = 5-6x^2+x^4$

4.3 Rationella funktioner

Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara två polynom. Vi kan då bilda det rationella uttrycket $h(x) = f(x)/g(x)$. Då får man vad som kallas för en **rationell funktion** $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Här måste man vara lite försiktig, ty kvoten $h(x) = f(x)/g(x)$ är bara definierad för alla x sådana att $g(x) \neq 0$. Maximal definitionsmängd blir alltså $A = \{x : g(x) \neq 0\}$.

Observera att en rationell funktion $h(x) = f(x)/g(x)$ har ett nollställe i $x = a$ om och endast om $f(a) = 0$ och $g(a) \neq 0$.

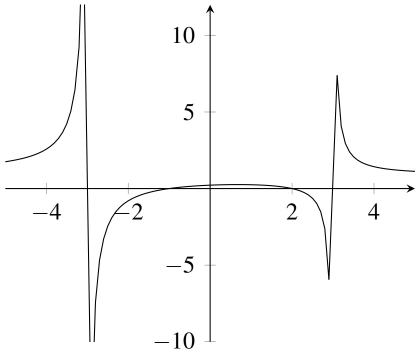
Exempel. Den rationella funktionen $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ med

$$h(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x^2-9}$$

har nollställen i 2 och -1 och som maximal definitionsmängd

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (x^2-9) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\},$$

dvs. alla reella tal utom -3 och 3. Centrala delen av grafen finns i figur 47. Observera att funktionen brakar iväg mot $-\infty$ respektive ∞ på de två sidorna om de två ställen där den inte är definierad. När x närmar sig $-\infty$ och ∞ så närmar sig funktionen 1, men mer om detta när vi kommer till avsnittet om gränsvärden. $\square$



Figur 47: Delar av grafen av den rationella funktionen $h(x) = \dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2-9}$.

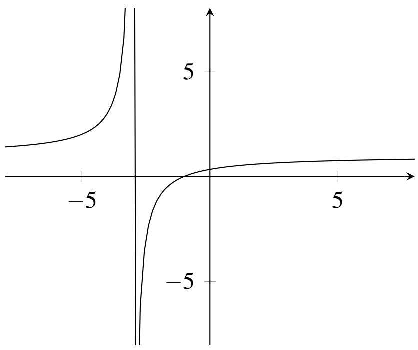
Exempel. Den rationella funktionen $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ med

$$h(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{x^2-9}$$

är inte definierad i $x = 3$, men genom att förkorta med faktorn $(x-3)$ så får vi en rationell funktion

$$r(x) = \frac{x+1}{x+3}.$$

Denna är lika med $h(x)$ överallt där $h(x)$ är definierad men också definierad i $x = 3$. Denna rationella funktion har som maximal definitionsmängd $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ och som enda nollställe $x = -1$. Centrala delen av grafen finns i figur 48. $\square$



Figur 48: Centrala delen av grafen av den rationella funktionen $r(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$.

Övningar

4.3.1 Bestäm största möjliga definitionsmängd och alla nollställen till följande rationella funktioner. Försök gärna också göra en skiss av hur grafen ser ut.

a. $\dfrac{x-1}{x+2}$ b. $\dfrac{x-3}{x^2+2}$ c. $\dfrac{x^2-3}{x+2}$ d. $\dfrac{x^2+4}{x^2-2}$

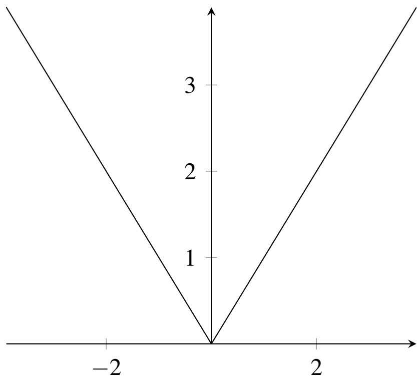
4.4 ABSOLUTBELOPP

Absolutbeloppet har vi definierat tidigare och man kan se det som en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ där

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x \geq 0, \\ -x & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Observera här att det är två olika "formler" för absolutbeloppet beroende på om argumentet x är positivt eller negativt. Detta betyder att man när man arbetar med absolutbeloppet i regel delar upp i olika fall för två eller flera intervall.

Exempel. Den centrala delen av grafen till absolutbeloppsfunktionen finns i figur 49. Grafen består av två olika halvlinjer som möts i origo. Funktionen har ett enda nollställe nämligen $x = 0$ och går mot ∞ när x går mot $-\infty$ och ∞. □



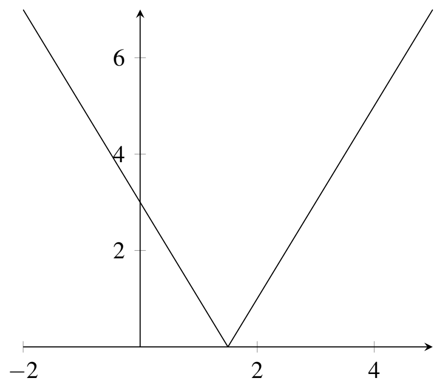
Figur 49: Centrala delen av grafen av absolutbeloppsfunktionen $f(x) = |x|$.

När man sätter samman absolutbeloppsfunktionen med andra funktioner så blir det som väntat en aning mer komplicerat. Men det finns en allmän strategi att följa. Det gäller att dela upp i olika intervall beroende på när det som man tar absolutbeloppet av är positivt eller negativt. Vi illustrerar strategin med ett par exempel när man sätter samman absolutbeloppet med polynom.

Exempel. Vi tar en titt på den sammansatta funktionen $f(x) = |2x-3|$. Polynomet $2x-3$ har ett enda nollställe i $x = 3/2$ och är positivt för alla $x > 3/2$ och negativt för alla $x < 3/2$. Det ger att

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{om } x \geq 3/2, \\ -(2x-3) & \text{om } x < 3/2. \end{cases}$$

Grafen, som finns i figur 50, består alltså av två olika halvlinjer som möts i punkten $(3/2, 0)$. □

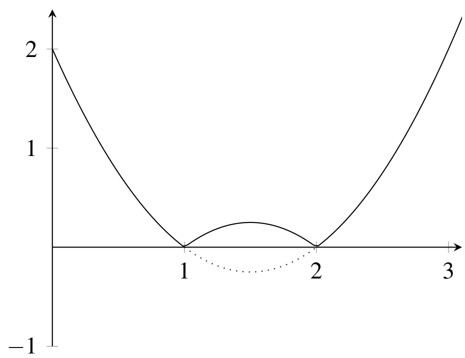


Figur 50: Centrala delen av grafen av $f(x) = |2x-3|$.

Exempel. Vi testar nu att sätta samman absolutbeloppet med ett andragradspolynom: $f(x) = \left|x^2-3x+2\right|$. Polynomet x^2-3x+2 har två nollställen i $x_1 = 1$ och $x_2 = 2$. Det är positivt för alla $x > 2$ och alla $x < 1$ samt negativt för alla x mellan nollställena, dvs. $1 < x < 2$. Det ger att

$$f(x) = \begin{cases} x^2-3x+2 & \text{om } x \leq 1 \text{ eller } x \geq 2, \\ -(x^2-3x+2) & \text{om } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Grafen, som finns i figur 51, består alltså av tre olika segment av andragradskurvor. Den streckade kurvan är vad man fått om man tagit bort absolutbeloppet. Det blir helt enkelt en spegling av kurvan i x-axeln i intervallet $(1,2)$. □



Figur 51: Centrala delen av grafen av $f(x) = \left|x^2-3x+2\right|$.

Exempel. I det här exemplet ska vi se hur man angriper en funktion som innehåller fler än ett absolutbelopp. Låt

$$f(x) = |3x+2| - |x-1|.$$

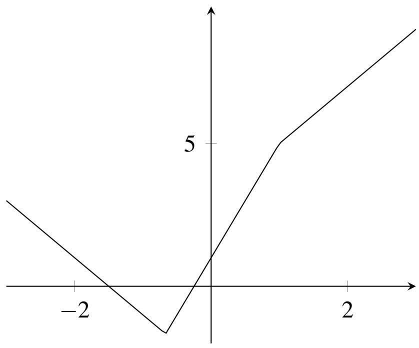
Polynomet $3x+2$ har ett enda nollställe i $x = -2/3$ och är positivt för alla $x > -2/3$ och negativt för alla $x < -2/3$. Polynomet $x-1$ har ett enda nollställe i $x = 1$ och är positivt för alla $x > 1$ och negativt för alla $x < 1$. Det betyder att vi får två brytpunkter.

När $x > 1$ så är båda argumenten för absolutbeloppet positiva, när $x < -2/3$ så är båda negativa och mellan dessa brytpunkter är $3x+2$ positivt och $x-1$ negativt.

Det ger att

$$f(x) = \begin{cases} (3x+2)-(x-1) = 2x+3 & \text{om } x \geq 1, \\ (3x+2)-(-(x-1)) = 4x+1 & \text{om } -2/3 \leq x < 1, \\ -(3x+2)-(-(x-1)) = -2x-3 & \text{om } x \leq -2/3. \end{cases}$$

Grafen, som finns i figur 52, består alltså av tre olika delar av linjer som möts i punkterna $(-2/3, -5/3)$ och $(1, 5)$. □



Figur 52: Centrala delen av grafen av $f(x) = |3x+2| - |x-1|$.

Övningar

4.4.1 Dela upp i lämpliga intevall och ange funktionerna i vart och ett av dessa intervall utan absolutbelopp. Skissa funktionernas grafer.

a. $|x+2|$ b. $|5x-2|$
c. $\left|x^2-4\right|$ d. $|2x-2|+|2x+1|$

4.5 Potensfunktioner

Vi har i avsnitt 1.7 definierat potens med rationell exponent $b^{m/n}$ för

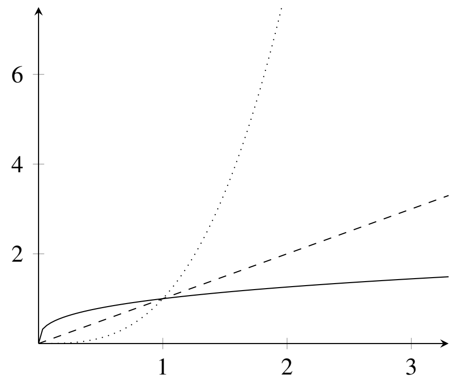
$$b \in \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

Detta ger att vi för ett rationellt tal m/n kan definiera en **potensfunktion**

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \text{ genom } f(x) = x^{m/n}.$$

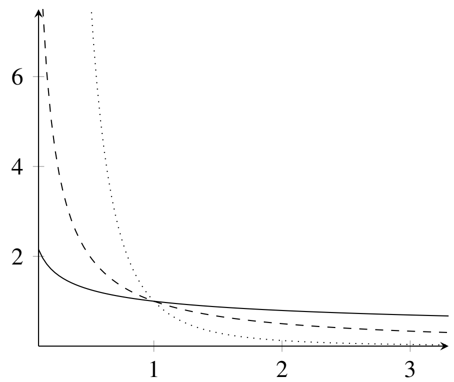
En första sak att notera är att $f(1) = 1^{m/n} = 1$ för alla potensfunktioner.

Exempel. Vi tittar först på tre exempel då exponenten är positiv. I figur 53 finns grafen till funktionerna som ges av $f_1(x) = x^{1/3}$, $f_2(x) = x$ och $f_3(x) = x^3$. Vi observerar som vi redan påpekat att kurvorna skär varandra i punkten $(1, 1)$. Alla närmar sig 0 då x närmar sig 0 och alla kommer gå mot ∞ när x går mot ∞. Vi ser att när $x > 1$ så är $f_3(x) = x^3$ störst och när $x < 1$ så är $f_1(x) = x^{1/3}$ störst. I allmänhet är det så att en potensfunktion med större exponent är större då $x > 1$ och en med mindre exponent är större då $x < 1$. $\square$



Figur 53: Början av grafen av $f_1(x) = x^{1/3}$ (heldragen), $f_2(x) = x$ (streckad) och $f_3(x) = x^3$ (prickad).

Exempel. Vad händer när vi tar en negativ exponent? Tänk på att $x^{-n} = 1/x^n$. I figur 54 finns grafen till funktionerna som ges av $f_1(x) = x^{-1/3}$, $f_2(x) = x^{-1} = 1/x$ och $f_3(x) = x^{-3}$. Vi noterar återigen att kurvorna skär varandra i punkten $(1,1)$. Alla närmar sig ∞ då x går mot 0 och alla kommer gå mot 0 när x går mot ∞. Vi ser att när $x > 1$ så är $f_3(x) = x^{-1/3}$ störst och när $x < 1$ så är $f_3(x) = x^{-3}$ störst. I allmänhet är det precis som för positiva exponenter så att en potensfunktion med större exponent är större då $x > 1$ och en mindre exponent är större då $x < 1$. $\square$



Figur 54: Början av grafen av $f_1(x) = x^{-1/3}$ (heldragen), $f_2(x) = x^{-1}$ (streckad) och $f_3(x) = x^{-3}(prickad)$.

Anmärkning. När vi har en positiv heltalsexponent, som 1 respektive 3 i det första exemplet, så är ju potensfunktionen i själva verket också ett polynom. Då kan man förstås definiera funktionen för alla tal, inte bara de positiva. Om exponenten är positiv så kan man alltid definiera funktionen också för $x = 0$. Dessutom om exponenten är $1/n$ där n är udda heltal så existerar $x^{1/n}$ också för negativa tal x, så man kan också definiera potensfunktionen $f(x) = x^{1/n}$ för alla reella tal. Däremot finns t.ex. inte $x^{1/2}$ för negativa värden på x.

Observera till slut att alla potensfunktioner är antingen strängt växande (om exponenten är positiv) eller strängt avtagande (om exponenten är negativ) på $\mathbb{R}_+$ och att värdemängden också är $\mathbb{R}_+$ i samtliga fall . Därmed har en potensfunktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ en invers $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Potensreglerna ger att om $f(x) = x^r$ och $g(x) = x^{1/r}$ så gäller att

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^{1/r}) = (x^{1/r})^r = x^{1/r \cdot r} = x$$

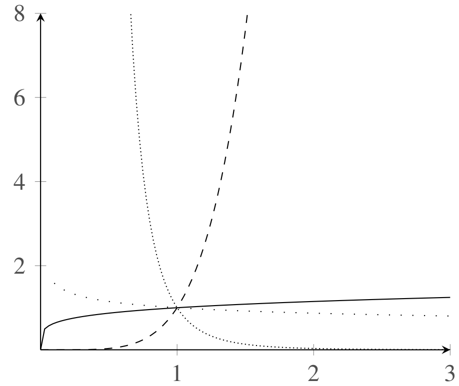
och

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^r) = (x^r)^{1/r} = x^{r \cdot 1/r} = x.$$

Alltså är $g(x) = x^{1/r}$ invers till $f(x) = x^r$.

Övningar

4.5.1 I figur 55 finns delar av grafen till de fyra potensfunktionerna $f_1(x) = x^{-1/5}$, $f_2(x) = x^5$, $f_3(x) = x^{-5}$ och $f_4(x) = x^{1/5}$. Ange vilken som är vilken, inversen till respektive funktion samt ange maximal definitionsmängd för de fyra funktionerna.



Figur 55: Början av grafen av $f_1(x) = x^{-1/5}$, $f_2(x) = x^5$, $f_3(x) = x^{-5}$ och $f_4(x) = x^{1/5}$.

4.6 Exponentialfunktioner, logaritmer

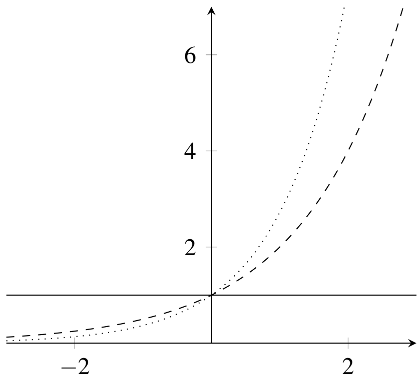
4.6.1 Exponentialfunktioner

Istället för att som för potensfunktioner låta basen b variera i en potens, b^r, så kan man låta exponenten r variera. Man får då en **exponentialfunktion**, $f(x) = b^x$, där b är en positiv konstant. En exponentialfunktion är definierad för alla reella tal och värdena är alltid positiva tal. Vi observerar att $f(0) = b^0 = 1$ oavsett vad b är, så grafen till en exponentialfunktion går alltid genom punkten $(0, 1)$.

Det finns en exponentialfunktion som är viktigare än alla andra nämligen den då basen ges av det tal som betecknas med bokstaven e. Detta tal har (precis som t.ex. π) en oändlig decimalutveckling som inte är periodisk och början av denna ser ut så här:

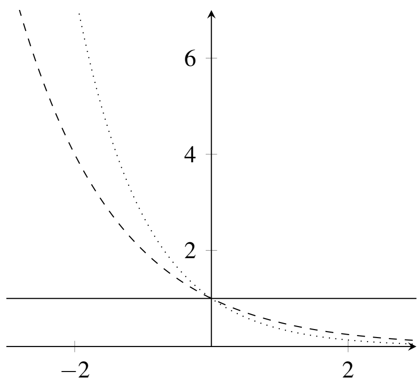
$$(e \approx) 2.718281828459045235360287471 35.$$

Exempel. I figur 56 finns grafen till funktionerna som ges av $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 1^x = 1$ och $f_3(x) = e^x$. Vi observerar som vi redan påpekat att kurvorna skär varandra i punkten $(0,1)$. När basen är 1 så blir (förstås) funktionen konstant hela tiden. Med basen 2 eller e så växer funktionen mot ∞ när x går mot ∞ och går mot 0 när x går mot $-\infty$. Detta gäller allmänt när basen är större än 1. (Om man multiplicerar två tal båda större än 1 så får man en produkt som är större än båda faktorerna.) I detta fall blir alltså funktionen strängt växande. $\square$



Figur 56: Centrala delen av graferna av $f_1(x) = 2^x$ (streckad), $f_2(x) = 1^x = 1$ (heldragen) och $f_3(x) = e^x$ (prickad).

Exempel. I figur 57 finns grafen till funktionerna som ges av $f_1(x) = (1/2)^x$, $f_2(x) = 1^x = 1$ och $f_3(x) = (1/e)^x$. Återigen observerar vi att kurvorna skär varandra i punkten $(0,1)$. Med basen $1/2$ eller $1/e$ så avtar funktionen mot 0 när x går mot ∞ och går mot ∞ när x går mot $-\infty$. Detta gäller allmänt när basen är mindre än 1. (Om man multiplicerar två tal båda mindre än 1 så får man en produkt som är mindre än båda faktorerna.) I detta fall blir alltså funktionen strängt avtagande. $\square$



Figur 57: Centrala delen av graferna av $f_1(x) = (1/2)^x = 2^{-x}$ (streckad), $f_2(x) = 1^x = 1$ (heldragen) och $f_3(x) = (1/e)^x = e^{-x}$ (prickad).

Observera att graferna i figur 57 är spegelbilder i y-axeln till de i figur 56. Detta förklaras av att $1/2 = 2^{-1}$ (respektive $1/e = e^{-1}$), så $(1/2)^x = 2^{-x}$ (respektive $(1/e)^x = e^{-x}$)

för alla reella tal x.

Anmärkning. Vi har tidigare bara definierat potensen b^x om x är ett rationellt tal, men det går bra att utvidga denna också till alla reella tal. Man gör detta genom att betrakta b^{r_n}, där r_n är rationella tal som bättre och bättre approximerar ett reellt tal x. Om man t.ex. låter r_n vara approximationen av x med n decimaler (detta är rationella tal) så är b^x gränsvärdet av b^{r_n} då n går mot oändligheten. Mer om detta kommer i del 2 av kursen.

Vi sammanfattar våra observationer angående exponentialfunktionen $f(x) = b^x$:

- Basen b måste vara positiv
- Definitionsmängd är $\mathbb{R}$
- Värdemängd är $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ (om $b \neq 1$)
- $f(0) = 1$
- $f(x) > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$
- Om $b > 1$ så är $f(x)$ strängt växande
- Om $0 < b < 1$ så är $f(x)$ strängt avtagande
- Om $b = 1$ så är $f(x) = 1$, för alla $x \in \mathbb{R}$.

4.6.2 Logaritmfunktioner

Eftersom en exponentialfunktion $f(x) = b^x$ (med $b \neq 1$ och $b > 0$) antingen är strängt växande ($b > 1$) eller strängt avtagande ($0 < b < 1$) så betyder det att dessa har en invers funktion. Inversen till en exponentialfunktion kallas för en **logaritmfunktion**. Värdemängden för en exponentialfunktion (med $b \neq 1$) är alla positiva reella tal, så definitionsmängden för en logaritmfunktion blir alltså alla positiva reella tal.

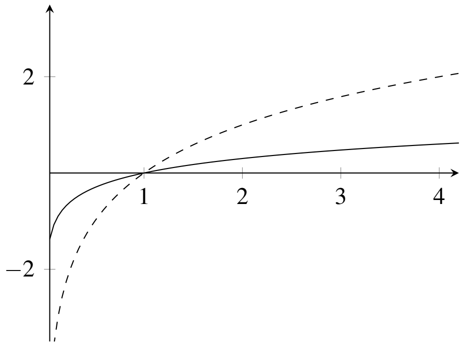
Låt $y = f(x) = b^x$. Från definitionen av invers funktion får vi att $f^{-1}(y) = x$ där $y = f(x) = b^x$. För en allmän bas b betecknar man denna funktion med $f^{-1} = \log_b$. Vi får alltså att

$$\log_b : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ \log_b(y) = x,\ \text{där } x \text{ är det tal som uppfyller } y = b^x.$$

I allmänhet finns det inget enkelt sätt att för hand räkna ut värdet av en logaritmfunktion. Det finns dock ett värde som alltid är enkelt att räkna ut:

$$\log_b(1) = \log_b(b^0) = 0.$$

I figur 58 finns början av graferna av $\log_2$ och $\log_{10}$.



Figur 58: Början av graferna av $\log_{10}(x)$ (heldragen) och $\log_2(x)$ (streckad).

Exempel. Vi testar att räkna ut logaritmen med bas 2 i några enkla exempel då det går att räkna ut den exakt. I det fallet har vi att $\log_2(y) = x$ om $y = 2^x$. Det gäller alltså att skriva argumentet som en potens av 2.

$$\begin{aligned} \log_2(1) &= \log_2(2^0) = 0 \\ \log_2(2) &= \log_2(2^1) = 1 \\ \log_2(1024) &= \log_2(2^{10}) = 10 \\ \log_2(\sqrt{2}) &= \log_2(2^{1/2}) = 1/2. \end{aligned}$$

Däremot finns det inget enkelt sätt att t.ex. räkna ut $\log_2(3)$ eftersom 3 inte är någon enkel potens av 2. □

Det finns två logaritmfunktioner som är så vanliga att de fått egna beteckningar. Det är dels den **naturliga logaritmen** som har basen e och dels 10-logaritmen som har 10 som bas. Dessa betecknas i regel med (det finns exempel i litteraturen med andra beteckningar)

$$\log_e(x) = \ln(x) \qquad \text{respektive} \qquad \log_{10}(x) = \lg(x).$$

Exempel. För dessa speciella logaritmfunktioner har vi t.ex.

$$\begin{aligned} \lg(10) &= \lg(10^1) = 1 \\ \lg(0.01) &= \lg(10^{-2}) = -2 \\ \ln(e) &= \ln(e^1) = 1. \end{aligned}$$

Här bestämde vi återigen logaritmfunktionens värde genom att skriva argumentet som en potens av basen. □

Anmärkning. Det är en allmänt vedertagen konvention att inte skriva ut parentesen för argumentet för en logaritmfunktion. Man skriver alltså bara $\ln x$ istället för $\ln(x)$ etc och hädanefter kommer vi att göra så överallt där det inte kan leda till missförstånd.

Det finns ju som bekant ett antal användbara regler för potenser. Dessa leder i sin tur till några nyttiga räkneregler för logaritmer. Vi vet ju att $b^{x+y} = b^x \cdot b^y$. Detta kan vi utnyttja för att visa en räkneregel för $\log_b xy$. Om vi antar att $x > 0$ och $y > 0$ så får vi

$$b^{\log_b x + \log_b y} = b^{\log_b x} \cdot b^{\log_b y} = x \cdot y = b^{\log_b xy}.$$

Eftersom b^x är injektiv (den är antingen strängt växande eller strängt avtagande) så är $b^s = b^t$ bara om $s = t$. Därmed måste det gälla att

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y.$$

På samma sätt får vi genom att utnyttja att $b^{xy} = (b^x)^y$ att

$$b^{-\log_b x} = b^{(\log_b x)(-1)} = (b^{\log_b x})^{-1} = x^{-1} = \frac{1}{x} = b^{\log_b \frac{1}{x}}.$$

Precis som ovan får vi att

$$\log_b \frac{1}{x} = -\log_b x.$$

Genom att sätta samman respektive upprepa dessa två regler så kan man få regler för logaritmen av kvot respektive potens.

Vi ska också se hur man kan byta bas i logaritmen. Från potenslagarna får vi att

$$a^{\log_a x} = x = b^{\log_b x} = (a^{\log_a b})^{\log_b x} = a^{\log_a b \log_b x},$$

och vi får alltså att

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Vi sammanfattar de regler för logaritmfunktioner som vi kommit fram till.

- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$ om $x, y > 0$
- $\log_b \frac{1}{y} = -\log_b y$
- $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$ om $x, y > 0$
- $\log_b x^n = n \log_b x$ om $x > 0$
- $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

Observera att det inte finns några regler för $\log_b(x+y)$ eller $\log_b(x-y)$.

Exempel. Förenkla uttrycket $\lg 700 - \lg \frac{7}{10}$ så långt det går.

Vi utnyttjar reglerna för logaritm av produkt och kvot och får

$$\begin{aligned}\lg 700 - \lg \frac{7}{10} &= \lg(7 \cdot 100) - (\lg 7 - \lg 10) \\ &= \lg 7 + \lg 100 - \lg 7 + \lg 10 \\ &= \lg 10^2 + \lg 10^1 \\ &= 2 + 1 \\ &= 3.\end{aligned}$$

Ingen av de två termerna kan beräknas exakt, men som synes kunde vi beräkna differensen. $\square$

Övningar

4.6.1 Vilka av följande räkneregler gäller för en exponentialfunktion $f(x) = b^x$? Ge ett motexempel i de fall som det inte är en giltig regel.

a. $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$
b. $f(x+y) = f(x) + f(y)$
c. $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$
d. $f(x-y) = f(x) - f(y)$
e. $f(x-y) = f(x)/f(y)$
f. $f(x/y) = f(x)/f(y)$

4.6.2 Förenkla följande uttryck så långt det går.

a. $\lg 1000$
b. $\lg 0,01$
c. $10^{\lg 4}$
d. $10^{\lg 0.7}$
e. $10^{-\lg 4}$
f. $10^{-\lg 0.5}$

4.6.3 Förenkla följande uttryck så långt det går.

a. $\ln e^2$
b. $\ln \sqrt{e}$
c. $\ln \frac{1}{e}$
d. $\ln \left(\frac{1}{e}\right)^2$
e. $e^{\ln 7}$
f. $e^{-\ln 3}$

4.6.4 Lös ekvationerna.

a. $\ln x = 0$
b. $\lg x = 1$
c. $\ln x = 2$
d. $\lg x = -4$
e. $2 \cdot \lg x = 3$

4.6.5 Förenkla följande uttryck så långt det går.

a. $\lg 30 - \lg 0.3$
b. $2\ln 8 - 3\ln 4 + 20\ln 1$
c. $3\ln 2 + 2\ln 3 - 4\ln\sqrt{6}$

4.7 Trigonometriska funktioner

4.7.1 Trigonometriska funktioner

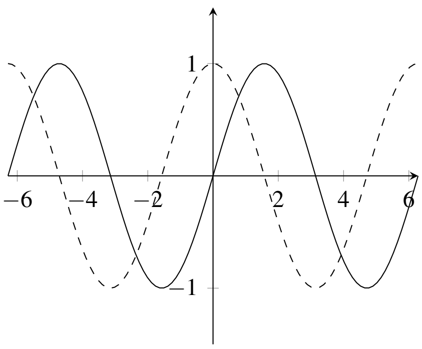
Vi har redan definierat de trigonometriska funktionerna sinus, cosinus etc med hjälp av trianglar och enhetscirkeln. Trigonometriska funktioner används dock till flera olika saker och kopplingen till geometri är inte alltid helt uppenbar. T.ex. kommer de till stor användning vid modellering av vågrörelser som ljusvågor och ljudvågor. Det är därför viktigt att känna till de grundläggande egenskaperna som dessa har om man ser dem som reella funktioner.

Vi påminner om att vi definierade funktionerna för alla reella tal med hjälp av enhetscirkeln. Undantag var att tangens och cotangens inte var definierade då cosinus respektive sinus var 0. Sinus och cosinus ger värden vars belopp är högst 1 medan tangens och cotangens kan ge alla möjliga reella tal. Vi har alltså följande reella funktioner:

$$
\begin{aligned}
\sin: &\quad \mathbb{R} \to [-1,1] \\
\cos: &\quad \mathbb{R} \to [-1,1] \\
\tan: &\quad \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \text{ ett heltal}\} \to \mathbb{R} \\
\cot: &\quad \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \text{ ett heltal}\} \to \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Här betyder $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \text{ ett heltal}\}$ alla reella tal utom de som är på formen $k\pi$ med k ett heltal. Observera att vi angivit respektive funktions värdemängd som målmängd. Man skulle lika gärna kunnat ange alla de reella talen som målmängd också för sinus och cosinus.

När vi utgick ifrån enhetscirkeln så tänkte vi oss att en punkt på cirkeln kan representeras av (oändligt många) olika vinklar som skiljer sig åt av ett helt antal varv, dvs. en multipel av 2π radianer. T ex så representerar vinklarna $\pi/2$, $\pi/2+2\pi$ och $\pi/2-2\pi$ alla punkten $(0,1)$. Detta betyder att funktionerna blir **periodiska** med **perioden** 2π, dvs. att $f(x+2\pi) = f(x)$. I figur 59 finns grafen till sinus- och cosinusfunktionen och man ser tydligt det periodiska beteendet. Vi såg också i enhetscirkeln att det fanns andra likheter för olika värden på vinkeln. För sinus hade vi t ex att $\sin(\pi - x) = \sin x$ och att $\sin(-x) = -\sin x$, dvs. att sinus är en udda funktion.

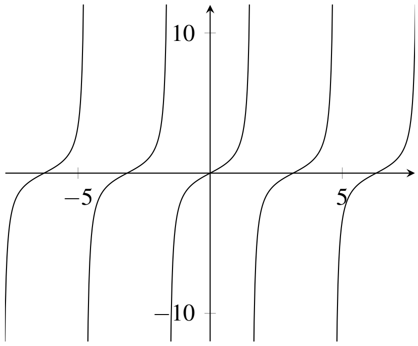


Figur 59: Delar av grafen till $\sin x$ (heldragen) och $\cos x$ (streckad).

Vi sammanfattar några av de viktigaste egenskaperna för de trigonometriska funktionerna nedan.

$\sin(x+2\pi) = \sin x$	$\sin(-x) = -\sin x$ (udda)	$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(x+2\pi) = \cos x$	$\cos(-x) = \cos x$ (jämn)	$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\tan(x+\pi) = \tan x$	$\tan(-x) = -\tan x$ (udda)	$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$
$\cot(x+\pi) = \cot x$	$\cot(-x) = -\cot x$ (udda)	$\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

Du ska kunna tolka dessa likheter geometriskt, dels i enhetscirkeln och dels på funktionsgrafen. Observera speciellt att perioden för tangens och cotangens är π vilket man kan skönja i figur 60.



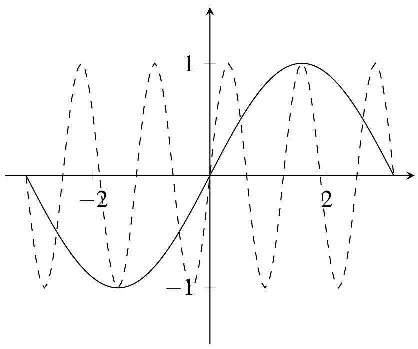
Figur 60: Delar av grafen till $\tan x$.

En viktig sak att tänka på är att när man sätter samman en trigonometrisk funktion med en annan funktion så ändras bl.a. perioden.

Exempel. I figur 61 finns grafen till funktionerna som ges av $f_1(x) = \sin x$ och $f_2(x) = \sin(5x)$. Vi observerar att f_2 svänger mycket snabbare. Vi får att

$$f_2(x) = \sin(5x) = \sin(5x+2\pi) = \sin\left(5\left(x+\frac{2\pi}{5}\right)\right) = f_2\left(x+\frac{2\pi}{5}\right),$$

så perioden för denna blir $\frac{2\pi}{5}$. Allmänt så kan vi på samma sätt visa att $\sin kx$ har perioden $\frac{2\pi}{k}$. □



Figur 61: Delar av grafen av $f_1(x) = \sin x$ (heldragen) och $f_2(x) = \sin 5x$ (streckad).

4.7.2 Inversa trigonometriska funktioner

De trigonometriska funktionerna är ju praktexempel på funktioner som inte är injektiva, då de ju antar samma värden oändligt många gånger (se avsnitt 4.1). Därmed har de ju inga inverser. Vad man kan göra är samma trick som vi använde t.ex. då vi observerade att kvadratroten var invers till funktionen $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ med $f(x) = x^2$. Vi minskar definitionsmängden så att funktionen blir injektiv på detta mindre intervall.

Exempel. I figur 59 ser vi att sinusfunktionen har ett minimum i $-\pi/2$ (vi har ju att $\sin(-\pi/2) = -1$) och är strängt växande till $\pi/2$ (eftersom att $\sin\pi/2 = 1$). (Detta inser man också om man tittar på definitionen av sinus i enhetscirkeln.) Eftersom sinusfunktionen är kontinuerlig betyder det att den antar varje värde mellan -1 och 1 precis en gång när x ligger i intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$. Om man alltså definierar en funktion

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1], \text{ med } f(x) = \sin x,$$

så kommer den att vara strängt växande med $[-1,1]$ som värdemängd. Alltså har den en invers

$$f^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \text{ med } f^{-1}(y) = x \text{ där } y = \sin x.$$

Med andra ord så svarar denna inversa funktion $f^{-1}(y)$ på frågan: Vilken vinkel x i intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ har $\sin x = y$?

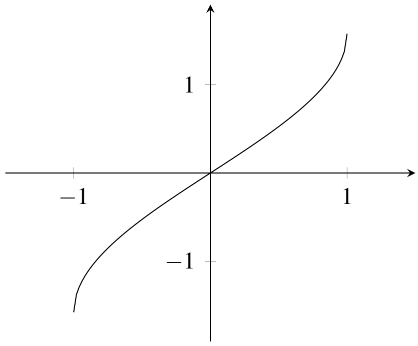
Vi har t.ex. att $f^{-1}(1/\sqrt{2}) = \pi/4$, eftersom $\sin\pi/4 = 1/\sqrt{2}$ (och $\pi/4$ ligger i rätt intervall). $\square$

Motsvarande konstruktion som vi gjorde för sinusfunktionen i exemplet kan man göra för samtliga trigonometriska funktioner genom att välja lämpliga intervall. Funktionerna man får kallas för de inversa trigonometriska funktionerna och heter **arcus sinus**, **arcus cosinus** etc. Ordet arcus betyder båge, och funktionerna anger båglängden (dvs. vinkeln mätt i radianer) som motsvarar värdet av sinusfunktionen (respektive cosinus etc). Vi sammanfattar i följande tabell:

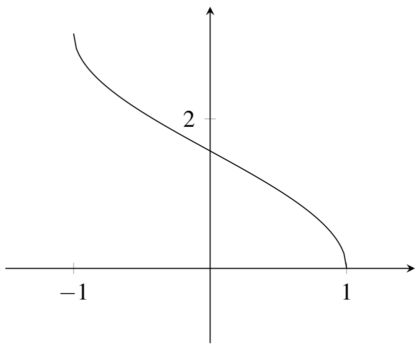
- Sinus på $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ har invers $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- Cosinus på $[0,\pi]$ har invers $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$
- Tangens på $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ har invers $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- Cotangens på $(0,\pi)$ har invers $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$

Observera att det på minräknare ofta står $\sin^{-1}$ istället för arcsin etc.

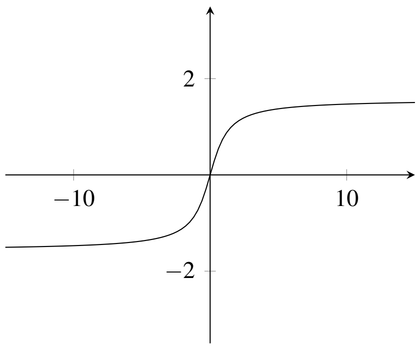
I figur 62, 63 och 64 finns graferna till arcus sinus, arcus cosinus och arcus tangens.



Figur 62: Grafen av $\arcsin x$.



Figur 63: Grafen av $\arccos x$.



Figur 64: Centrala delen av grafen av $\arctan x$.

Övningar

4.7.1 Vilka av följande funktioner är jämna, udda eller inget av dem.

a. $f(x) = \sin(2x)$ b. $f(x) = \sin(x^2)$ c. $f(x) = (\sin x)^2$

d. $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ e. $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ f. $f(x) = \sin x + \cos x$

4.7.2 Antag att vi vet att $\sin\frac{\pi}{7} = c$. Ange följande trigonometriska funktionsvärden uttryckta med hjälp av c.

a. $\sin(6\pi/7)$	b. $\sin(-\pi/7)$	c. $\sin(29\pi/7)$
d. $\cos(\pi/7)$	e. $\tan(\pi/7)$	f. $\tan(8\pi/7)$

4.7.3 Beräkna följande värden för de inversa trigonometriska funktionerna. Var noga med att välja vinkel i rätt intervall för de olika funktionerna.

a. $\arcsin 1$	b. $\arccos 1$	c. $\arctan 1$
d. $\arcsin(1/2)$	e. $\arccos(1/2)$	f. $\arcsin(-1/2)$

FACIT

1.1.1 a. $7956 = 21 \cdot 378 + 18$ b. $7497 = 21 \cdot 357 + 0$
c. 7497 är delbart med 21

1.1.2 a. $3^2 \cdot 5 \cdot 11$ b. $2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$
c. $3 \cdot 83$

1.1.3 a. 319 b. -564

1.1.4 a. $a + 2 \cdot a \cdot b$
b. $2 \cdot a \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot b \cdot b - 2 \cdot a \cdot a - 2 \cdot a \cdot b = 2a^2b + 2ab^2 - 2a^2 - 2ab$

1.1.5 a. $-2 < 4 < 5 < 11$ b. $d, b, -a, -c$

1.2.1 a. $1/8$ b. $-281/28$ c. $-196/33$
d. $17/20$ e. $251/24$ f. $344/255$

1.2.2 a. $13/12$ b. $-11/420$

1.2.3 a. $1/4$ b. $3/34$ c. $39/22$
d. 24 e. $38/15$ f. $10/57$
g. $273/128$ h. $11011/1536$

1.2.4 a. -2 b. $253/340$ c. $-1349/1968$

1.2.5 a. $c > b > d > a$ b. $b > a > c > d$

1.3.1 a. 25 b. 32 c. 81
d. -64 e. 1 f. 100
g. 1 h. 1

1.3.2 a. $1/4$ b. $-1/27$ c. 1

1.3.3 a. 2^{-6} b. 2^2 c. 2^{-4}

1.3.4 a. $4/21$ b. -72

1.4.1 a. Ja.
b. Ja, det sanna påståendet “2 är mindre än 3” är en av möjligheterna i “2 är mindre än 3 *eller* 2 lika med 3”. Alternativt kan man hänvisa till att motsatsen $2 > 3$ är ett falskt påstående.
c. Nej.

1.4.2 a. $c - a = (c - b) + (b - a) > 0$
b. Exemplet
c. $(b + d) - (a + c) = (d - c) + (b - a) > 0$
d. $b \cdot c - a \cdot c = (b - a) \cdot c > 0$
e. $a \cdot c - b \cdot c = (a - b) \cdot c = -(b - a) \cdot c = (b - a) \cdot -c > 0$

1.4.3 T.ex. $3 < 4$ och $2 < 6$ men $(3-2) < (4-6)$ gäller inte.

1.4.4 a. $2,125$
b. $1,166666\ldots$
c. $-0,2142857142857\ldots$

1.4.5 a. $-7/3$ b. $284/333$ c. $31/25$

1.5.1 a. 7 b. 7 c. 0

1.5.2 a. -2 och 0 b. -4.5 och 10.5 c. -4
d. -1 och 4 e. Inget tal satisfierar ekvationen

1.5.3 a. $-1 \le x \le 3$ b. $-8 < x < 2$ c. $x < -8$ eller $x > 2$
d. $x = -2$ e. $-1 \le x < 0$ eller $4 < x \le 5$
f. $x \ne -1$

1.6.1 a. 0.7 b. 300 c. $15\sqrt{2}$
d. $\sqrt{2}/5$ e. $\sqrt{3}$ f. $10-\sqrt{2}$

1.6.2 a. ± 5 b. $\pm\sqrt{5}$ c. $\pm 2/3$
d. $\pm 2\sqrt{6}/3$ e. 0

1.6.3 a. $\sqrt{6}/3$ b. $\sqrt{21}/7$ c. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
d. $\sqrt{11}+3$ e. $-(2+\sqrt{5})$ f. $3-2\sqrt{2}$

1.7.1 a. 3 b. $1/2$ c. 2
d. $1/2$ e. 9 f. $1/9$
g. 5

1.7.2 a. $3^{1/3}$ b. $2^{1/2}$ c. $-2\cdot 3^{1/3}$
d. $3^{1/12}$ e. $2^{1/10}$ f. $5^{1/8}$
g. $2^{2/3}$ h. $2\cdot 3^{1/3}$

1.7.3 a. $3a$ b. $x^{1/4}$ c. $x^{1/15}$
d. $a^{1/2}$ e. $a^{5/12}$ f. $x^{3/4}$

1.8.1 a. $9t-u-9v$ b. $2a+12c+73x$

1.8.2 a. $p+r$ b. $3b+2c$
c. $4a-2c$

1.8.3 a. $20x^2z^8$ b. $-27a^4b^5c^4$
c. $14p^3q^9r^4s^2$

1.8.4 a. $27x^6y^3$ b. $-128a^8b^7c^6$
c. $a^{4p}b^{7p}$

1.8.5 a. $2x^2+3xy-2y^2$ b. $2x^3+x^2y-5xy^2+2y^3$
c. a^5+x^5 d. $-2x^4+x^3+2x^2-13x+6$

1.8.6 a. $9a^2-24ab+16b^2$ b. $a^6+4a^3b^2+4b^4$
c. $2m^8+32$

1.8.7 a. $36-x^2$ b. a^4-y^2
c. $x^{12}-81$

1.8.8 a. $y^3+9y^2x+27yx^2+27x^3$ b. $27x^3+54x^2y^2+36xy^4+8y^6$
c. $x^{12}-18x^9+108x^6-216x^3$

1.8.9 a. $(x-a^2)(x+a^2)$ b. $x^2(3x+5)(3x-5)$
c. $(x+9)^2$ d. $x^2y(x-2y)^2$
e. $x(x-1)(x^2+x+1)$ f. $3(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$
g. $-x^2(x^2+1)(x+1)(x-1)$ h. $2x^2y(3y^2-2x)(9y^4+6y^2x+4x^2)$

1.8.10 a. $x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1$
b. $1-7y+21y^2-35y^3+35y^4-21y^5+7y^6-y^7$
c. $32x^5+80x^4a^2+80x^3a^4+40x^2a^6+10xa^8+a^{10}$
d. $x^6y^{12}-18x^5y^{10}z+135x^4y^8z^2-540x^3y^6z^3+1215x^2y^4z^4-1458xy^2z^5+729z^6$

1.8.11 a. $3a^6/8c^2$ b. $8y/9x$
c. $(2a+y)/2a$ d. $3xy+5y-2x$

1.8.12 a. $2/(b-a)$
b. $x^2(1+2x)/(1-2x)$
c. $-1/(x-y)^2$
d. $(b^4+3)/(b^4-3)=(b^4+3)/((b-\sqrt[4]{3})(b+\sqrt[4]{3})(b^2+\sqrt{3}))$
e. $(a^2+ab+b^2)/(a-b)$
f. $(a+1)/a$
g. $(x^2+4)/(x^2+2x+4)$

1.8.13 a. a^2-ab+b^2 b. $a^3+a^2b+ab^2+b^3$
c. Kan inte förkortas d. $-(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$

1.8.14 a. $x-y^2$ b. $(x^2+1)(x-1)/(x(x^2-x+1))$
c. x/y d. $1/2$

1.8.15 a. $18/(x(x+3)(x-3))$
b. $(2x^2-7x-2)/(2x(x-4))$
c. $-1/(x(x+1)(x-1))$
d. $(8-2x^2-x^3)/(4(x-2)(x+2)(x^2+2x+4))$

1.8.16 a. $|c+2|$, gäller för alla reella c
b. Om $c>0$ är $\frac{c}{|c|}=1$, och om $c<0$ är $\frac{c}{|c|}=-1$.
c. 1, gäller för $c>0$
d. $-c\sqrt{9-c}$, gäller för $c<9$
e. $1/\sqrt{c-2}$, gäller för $c>2$
f. Om $c>0$ är $\frac{|c|\sqrt{c+2}}{c}=\sqrt{c+2}$. Om $-2\le c<0$ är $\frac{|c|\sqrt{c+2}}{c}=-\sqrt{c+2}$.

2.1.1 a. $x = 7$ b. $x = -3/7$ c. Alla tal.
d. Inga lösningar. e. $5/4$ f. $-4/3$

2.1.2 a. $y = 3x - 7$ b. $y = (2x - 3)/11$

2.2.1 a. 1 och -4
b. -1 och 3
c. -1 och $3/2$
d. 0 och $-3/7$
e. $3/2$
f. $-(3 + \sqrt{29})/10$ och $-(3 - \sqrt{29})/10$
g. $-(3 + \sqrt{29})/10$ och $-(3 - \sqrt{29})/10$

2.2.2 a. $(x+2)^2 - 3$ b. $(2x-9)^2 + 19$
c. $39 - (x+6)^2$

2.2.3 a. $(x-2)(x+3)$
b. $-2(x-1)(x+4)$
c. $(x - 1/2 - \sqrt{5}/2)(x - 1/2 + \sqrt{5}/2)$
d. $x^2 + x + 1$

2.2.4 a. $x^2 + 3x - 10 = 0$ b. $6x^2 - x - 2 = 0$
c. $x^2 - 2x - 4 = 0$

2.3.1 a. 1 och -4 b. $6 + 3\sqrt{3}$ och $6 - 3\sqrt{3}$
c. Inga reella lösningar

2.3.2 a. $(1 + \sqrt{5})/2$ och $(1 - \sqrt{5})/2$ b. Inga reella lösningar

2.3.3 a. 9 b. 2
c. Ingen rot d. 2
e. 4 f. 12
g. 3 h. $(5 - \sqrt{13})/6$
i. 6

2.3.4 a. 2, -2, $\sqrt{3}$ och $-\sqrt{3}$ b. 5, -5, 7 och -7
c. 2 och -2 d. $\sqrt{6}$ och $-\sqrt{6}$
e. $\sqrt{6}/2$ och $-\sqrt{6}/2$

2.3.5 a. 9 b. $19 - 6\sqrt{10}$
c. 1 och 4

2.4.1 a. $x = 3,5,\ y = 1$
b. $x = 4,\ y = 1$
c. $x = -2,\ y = 2$
d. saknar lösning
e. oändligt många lösningar av formen: $x = t,\ y = 3 - 5t$ för alla reella t
f. $s = 3,\ t = 1$
g. $x = 2,\ y = 3$
h. $x = 3,\ y = 5,\ z = 2$
i. $x = 10,\ y = -0,04,\ z = 0,06$
j. $a = -1,\ b = 1,\ c = 2$
k. $x = 1,\ y = -2,\ z = 3$

2.4.2 Han var 48 år.

2.5.1 a. $(x-1)/(x+4)$ b. $(x+2)/(x^2+2x-3)$

2.5.2 a. $\left\{0, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$ b. $\{-2,1,3\}$
c. $\left\{-2, \frac{-5-\sqrt{21}}{2}, \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\right\}$ d. $\{2\}$

2.5.3 a. 1 är en trippelrot b. 1 (enkelrot)
c. 1 och -1 är trippelrötter

2.5.4 a. $(x+2)(x-1)(x-3)$ b. $(x+2)\left(x+\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)\left(x+\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)$
c. $(x-2)(-3+x-x^2)$

3.1.1 a. $180^\circ,\ \pi$ b. $45^\circ,\ \pi/4$ c. $120^\circ,\ 2\pi/3$
d. $60^\circ,\ \pi/3$ e. $270^\circ,\ 3\pi/2$ f. $420^\circ,\ 7\pi/3$

3.1.2 a. $\pi/2$ b. $\pi/6$ c. $\pi/4$
d. $3\pi/2$ e. $\pi/10$ f. $5\pi/6$
g. $11\pi/18$

3.1.3 a. 540° b. 90° c. 135°
d. 75°

3.1.4 a. $2\pi/3$ b. $25\pi/6$ c. $20\pi/9$

3.1.5 a. 120° b. 108° c. $(1-\frac{2}{n}) \cdot 180^\circ$

3.1.6 a. $\sqrt{39}/2$ l.e. b. $5\sqrt{39}/4$ a.e. c. $5\sqrt{39}/8$ l.e.

3.1.7 2 längdenheter, dvs. M är mittpunkten på sidan AB

3.2.1 a. 6 b. $\sqrt{13}$
c. 5 d. 10
e. $\sqrt{13}$

3.2.2 a. $(0,-2)$ b. $(0,9/2)$

3.2.3 a. $(1+\sqrt{3},-2\sqrt{3})$ eller $(1-\sqrt{3},2\sqrt{3})$
b. $\big((1+3\sqrt{3})/2,(3-3\sqrt{3})/2\big)$ eller $\big((1-3\sqrt{3})/2,(3+3\sqrt{3})/2\big)$

3.2.4 a. $3y=2x$ b. $2x+3y=7$
c. $y=3$ d. $x+2=0$

3.2.5 a. $2x-y-1=0$ b. $3x+2y=0$
c. $y=0$ d. $x+4y-2=0$
e. $21x+45y-19=0$ f. $7x+2=0$

3.2.6 a. $(-3,4)$
b. $(-6/7,4/7)$
c. saknar skärningspunkt (parallella linjer)
d. sammanfallande linjer

3.2.7 Bevis

3.2.8 a. $2x-y-4=0$ b. $3x+y-3=0$
c. $x=0$

3.2.9 a. $5x-2y=0$ b. $3x+y+2=0$
c. $9x-5y-3=0$ d. $4x+y=0$

3.2.10 a. $x^2+y^2=81$ b. $(x-2)^2+(y+3)^2=49$
c. $(x+6)^2+y^2=25/4$

3.2.11 a. $x^2+2x+y^2-6y=0$ b. $x^2+2x+y^2-6y+2=0$
c. $x^2+2x+y^2-6y=63$

3.2.12 Cirkeln med medelpunkt och radie
a. origo, $R=\sqrt{3}$ b. $(0,2)$, $R=3$
c. $(1,-3/4)$, $R=5/4$ d. $(-2,1/2)$, $R=1/2$
e. $(1/2,-2/3)$, $R=4/3$

3.2.13 a. $(1,3)$ och $(0,-2)$ b. $(0,-2)$, tangering
c. ingen skärningspunkt

3.2.14 a. $x^2+y^2+4x+4y=2$ b. punkterna ligger i rät linje
c. $x^2+y^2-3y-19=0$

3.3.1 a. $1/2$ b. $1/2$ c. $1/4$
d. $2-\sqrt{3}$

3.3.2 a. $a=3/2,\ b=3\cdot\sqrt{3}/2$
b. $A=B=45^\circ$,
c. $a=\sqrt{5/3},\ c=\sqrt{20/3}$
d. $a=5/2,\ b=5\cdot\sqrt{3}/2$,
e. $a=12/5,\ b=9/5$

3.3.3 a. $\cos v = 4/5$, $\tan v = 3/4$
b. $\cos v = \sqrt{5}/3$, $\tan v = 2/\sqrt{5}$
c. $\sin v = 2\sqrt{2}/3$, $\tan v = 2\sqrt{2}$
d. $\sin v = \sqrt{21}/5$, $\tan v = \sqrt{21}/2$
e. $\sin v = 1/\sqrt{5}$, $\cos v = 2/\sqrt{5}$
f. $\sin v = 24/25$, $\cos v = 7/25$
g. $\sin v = 10/\sqrt{149}$, $\cos v = 7/\sqrt{149}$

3.3.4 a. tredje | b. andra | c. andra
d. fjärde | e. andra | f. andra
g. första

3.3.5 a. -1 | b. -1 | c. $\sqrt{3}/2$
d. $\sqrt{3}/2$ | e. 0 | f. 1

3.3.6 Bevis

3.3.7 a. $2\sqrt{2}/3$
b. $\sqrt{21}/5$
c. $\sqrt{5}/3$ (första kvadranten) eller $-\sqrt{5}/3$ (andra kvadranten)

3.3.8 a. $0,8$
b. $\sqrt{21}/5$ (första kvadranten) eller $-\sqrt{21}/5$ (fjärde kvadranten)

3.3.9 a. $-1/\sqrt{15}$
b. $-\sqrt{91}/3$
c. $1/\sqrt{3}$ (tredje kvadranten) eller $-1/\sqrt{3}$ (fjärde kvadranten)
d. $\sqrt{77}/2$ (första kvadranten) eller $-\sqrt{77}/2$ (fjärde kvadranten)

3.3.10 a. $\sin v = -2/\sqrt{5}$, $\cos v = -1/\sqrt{5}$
b. $\sin v = 1/\sqrt{10}$, $\cos v = -3/\sqrt{10}$
c. $\begin{cases} \sin v = 5/\sqrt{26},\ \cos v = -1/\sqrt{26} & \text{(andra kvadranten) eller} \\ \sin v = -5/\sqrt{26},\ \cos v = 1/\sqrt{26} & \text{(fjärde kvadranten)} \end{cases}$
d. $\begin{cases} \sin v = 1/\sqrt{5},\ \cos v = -2/\sqrt{5} & \text{(andra kvadranten) eller} \\ \sin v = -1/\sqrt{5},\ \cos v = 2/\sqrt{5} & \text{(fjärde kvadranten)} \end{cases}$

3.3.11 a. $-1/2$ | b. $\sqrt{3}/2$ | c. $-\sqrt{3}/2$
d. -1 | e. $1/\sqrt{2}$ | f. $-1/2$
g. $-1/2$ | h. $1/\sqrt{3}$ | i. $-1/\sqrt{2}$
j. $-\sqrt{3}$

3.3.12 a. $c = 2$, $B = 30$ och $C = 90$
b. $A = 30^\circ$, $B = 30^\circ$, $b = 1$
c. $c = \sqrt{3}$, $A = 90^\circ$ och $B = 60^\circ$
d. $a = 1$, $B = 45^\circ$ och $C = 90^\circ$

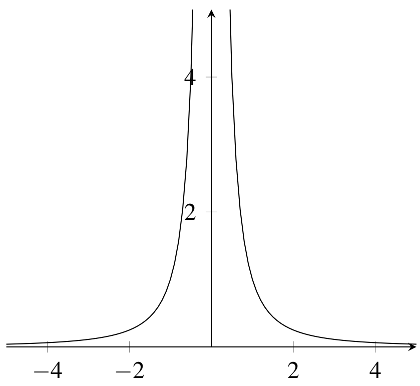
3.3.13 a. 4
b. $4\sqrt{3}$

3.3.14 a. $35\sqrt{3}/4$ | b. 6 | c. $9/4$

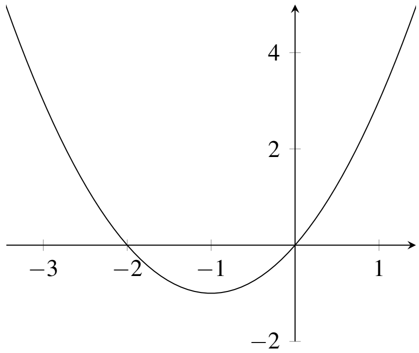
4.1.1 a. Den är injektiv för den är en linje med riktningkoefficient $p/1000$ och alltså strängt växande.
b. Den är injektiv om och endast om alla Lisas vattenmeloner har olika vikt. Troligen är den det (om inte Lisa har väldigt många vattenmeloner i sitt fruktstånd) men vi vet inte säkert.
c. Vi har att $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{Q}_+$ och $g \circ f(x)$ är melonen x pris i kronor, om exempelvis v är en melon som väger exakt 1 kilo så är $g \circ f(v) = g(f(v)) = g(1000) = \frac{p \cdot 1000}{1000} = p$.
d. Det hänger på om f är injektiv, dvs. om alla melonerna har olika vikt. Om så är fallet så är också $g \circ f$ injektiv, annars inte.
e. Den är inte definierad, eftersom g ger rationella tal som inte går att stoppa in i f som vill ha vattenmeloner.

4.1.2 a. Strängt växande och därmed injektiv, udda samt har sig själv som invers. Värdemängd: $\mathbb{R}$.
b. Varken växande eller avtagande, ej injektiv men jämn ty $b(-x) = 1/(-x)^2 = 1/x^2 = b(x)$ och saknar därför invers. Värdemängd: $\mathbb{R}_+$. Se figur 65.
c. Varken växande eller avtagande, ej injektiv ty t ex $c(-2) = c(0) = 0$ så saknar invers, ej udda eller jämn (t ex $c(-2) = 0$ och $c(2) = 8$. Värdemängd: $[-1, \infty)$. Se figur 66.
d. Strängt växande och därmed injektiv, varken udda eller jämn då bara definierad för icke-negativa tal. Inversen ges av $d^{-1} : [1, \infty) \to [0, \infty)$ med $d^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$. Värdemängd: $[1, \infty)$. Se figur 67.
e. Strängt växande och därmed injektiv, varken udda eller jämn då t ex $e(-1) = 0$ och $e(1) = 2$. Inversen ges av $e^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $e^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Värdemängd: $\mathbb{R}$. Se figur 68.

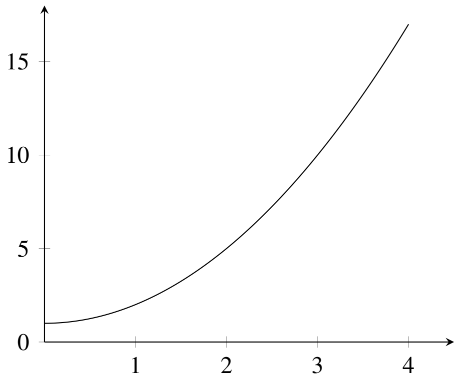
4.1.3 $f \circ f(x) = (x^2-1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$
$f \circ g(x) = 1/(1+x^2)^2 - 1 = -x^2(2+x^2)/(1+x^2)^2$
$g \circ f(x) = 1/(1+(x^2-1)^2) = 1/(2-2x^2+x^4)$
$g \circ g(x) = (1+x^2)^2/((1+x^2)^2+1) = (1+2x^2+x^4)/(2+2x^2+x^4)$



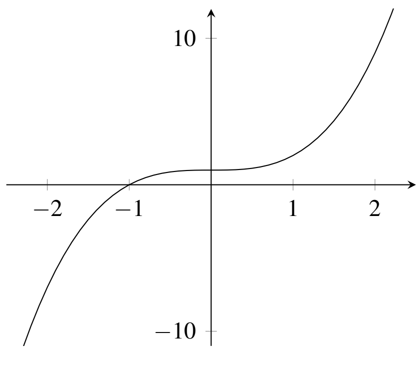
Figur 65: Grafen till funktionen i uppgift 4.1.2a



Figur 66: Grafen till funktionen i uppgift 4.1.2b



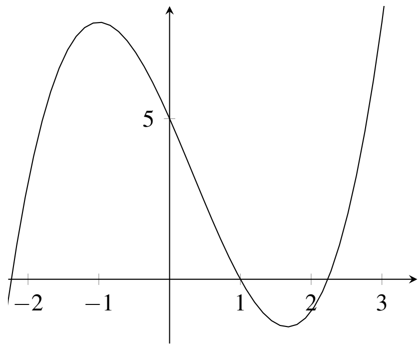
Figur 67: Grafen till funktionen i uppgift 4.1.2c



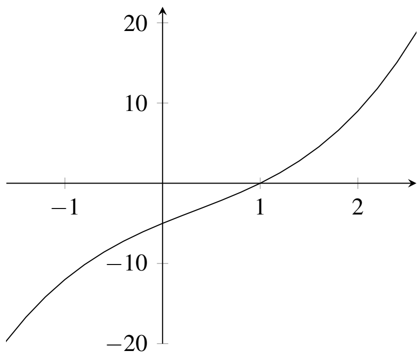
Figur 68: Grafen till funktionen i uppgift 4.1.2d

4.2.1 a. $p(x) = x^2 + 2x - 7 = (x+1)^2 - 8$ ger rötterna $-1 \pm \sqrt{8} = -1 \pm 2\sqrt{2}$, minimum $p(-1) = -8$ så värdemängden är $[-8, \infty)$.
b. $p(x) = x^2 - 3x + 6 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}$ ger att det saknas (reella) rötter, minimum $p(\frac{3}{2}) = \frac{15}{4}$ så värdemängden är $[\frac{15}{4}, \infty)$.
c. $p(x) = 5 - 4x - x^2 = -(x+2)^2 + 9$ ger rötterna -5 och 1, maximum $p(-2) = 9$ så värdemängden är $(-\infty, 9]$.

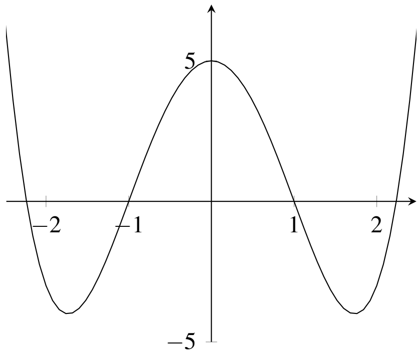
4.2.2 a. Nollställen i $\{-\sqrt{5}, 1, \sqrt{5}\}$. Funktionen går mot $-\infty$ respektive ∞ då x går mot $-\infty$ respektive ∞ (se figur 69).
b. Nollställe i 1. Funktionen går mot $-\infty$ respektive ∞ då x går mot $-\infty$ respektive ∞ (se figur 70).
c. Nollställe i $\{-\sqrt{5}, -1, 1, \sqrt{5}\}$. Funktionen går mot ∞ då x går mot $-\infty$ eller ∞ (se figur 71).



Figur 69: Grafen till funktionen i uppgift 4.2.2a

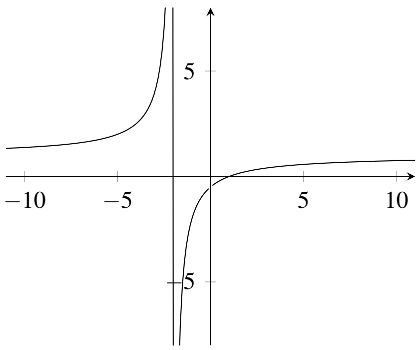


Figur 70: Grafen till funktionen i uppgift 4.2.2b

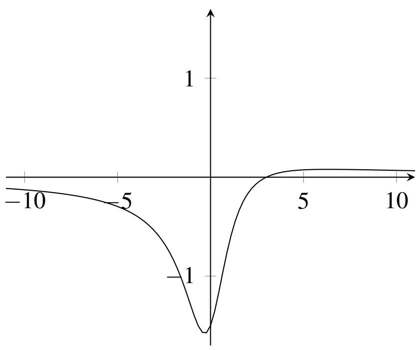


Figur 71: Grafen till funktionen i uppgift 4.2.2c

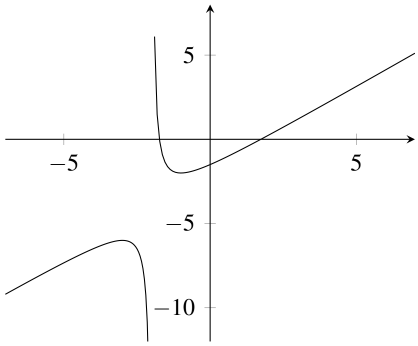
4.3.1 a. Nollställe i 1 och funktionen är definierad för alla tal utom -2 (se figur 72).
b. Nollställe i 3 och funktionen är definierad för alla tal) (se figur 73).
c. Nollställen i $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ och funktionen är definierad för alla tal utom -2) (se figur 74).
d. (Reella) nollställen saknas och funktionen är definierad för alla tal utom $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$) (se figur 75).



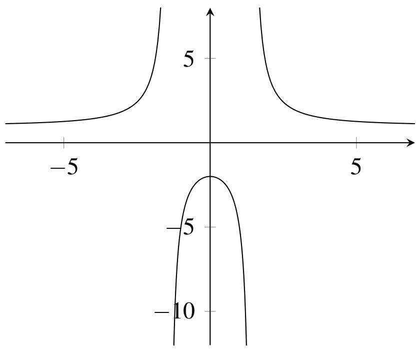
Figur 72: Grafen till funktionen i uppgift 4.3.1a



Figur 73: Grafen till funktionen i uppgift 4.3.1b



Figur 74: Grafen till funktionen i uppgift 4.3.1c



Figur 75: Grafen till funktionen i uppgift 4.3.1d

4.4.1 a. Grafen är ritad i figur 76,

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{om } x \geq -2, \\ -(x+2) & \text{om } x < -2. \end{cases}$$

b. Grafen är ritad i figur 77,

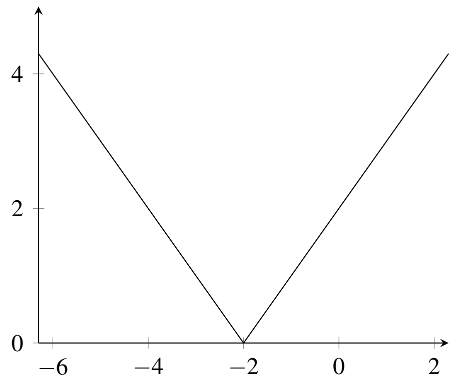
$$|5x-2| = \begin{cases} 5x-2 & \text{om } x \geq \frac{2}{5}, \\ -(5x-2) & \text{om } x < \frac{2}{5}. \end{cases}$$

c. Grafen är ritad i figur 78,

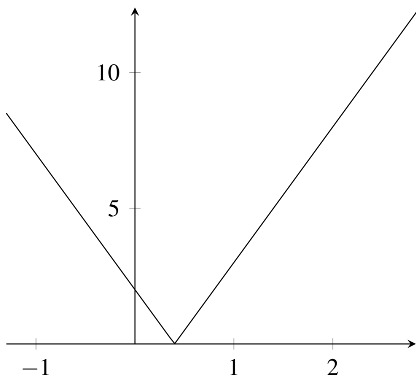
$$\left|x^2-4\right| = \begin{cases} x^2-4 & \text{om } x \leq -2 \text{ och } x \geq 2, \\ -(x^2-4) & \text{om } -2 < x < 2. \end{cases}$$

d. Grafen är ritad i figur 79,

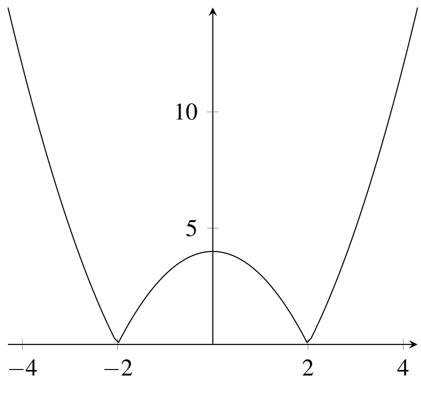
$$|2x-2|+|2x+1| = \begin{cases} (2x-2)+(2x+1) = 4x-1 & \text{om } x \geq 1, \\ -(2x-2)+(2x+1) = 3 & \text{om } -\frac{1}{2} < x < 1, \\ -(2x-2)-(2x+1) = -4x+1 & \text{om } x \leq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$



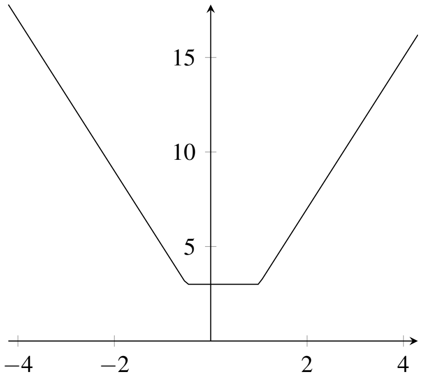
Figur 76: Grafen till funktionen i uppgift 4.4.1a



Figur 77: Grafen till funktionen i uppgift 4.4.1b



Figur 78: Grafen till funktionen i uppgift 4.4.1c



Figur 79: Grafen till funktionen i uppgift 4.4.1d

4.5.1 $f_1(x) = x^{-1/5}$: glesa prickar. Invers $f_1^{-1} = f_3$. Maximal definitionsmängd: $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$
$f_2(x) = x^5$: streckad. Invers $f_2^{-1} = f_4$. Maximal definitionsmängd: $\mathbb{R}$
$f_3(x) = x^{-5}$: täta prickar. Invers $f_3^{-1} = f_1$. Maximal definitionsmängd: $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$
$f_4(x) = x^{1/5}$: heldragen. Invers $f_4^{-1} = f_2$. Maximal definitionsmängd: $\mathbb{R}$

4.6.1 Det är bara bara a) och e) som stämmer.

4.6.2	a. 3	b. -2	c. 4
	d. 0.7	e. $\frac{1}{4}$	f. 2
4.6.3	a. 2	b. $\frac{1}{2}$	c. -1
	d. -2	e. 7	f. $\frac{1}{3}$
4.6.4	a. $x = 1$	b. $x = 10$	c. $x = e^2$
	d. $x = 0.0001$	e. $x = 10\sqrt{10}$	
4.6.5	a. 2	b. 0	c. $\ln 2$

4.7.1	a. udda	b. jämn	c. jämn
	d. jämn	e. udda	f. inget
4.7.2	a. c	b. $-c$	c. c
	d. $\sqrt{1-c^2}$	e. $c/\sqrt{1-c^2}$	f. $c/\sqrt{1-c^2}$
4.7.3	a. $\pi/2$	b. 0	c. $\pi/4$
	d. $\pi/6$	e. $\pi/3$	f. $-\pi/6$

Sakregister

absolutbelopp, 24
allmänna konjugatregeln, 38
andragradsekvation, 47
areasatsen, 93
aritmetikens fundamentalsats, 5
associativitet, 1
avståndsformeln, 76
avtagande, 103

cirkel, 70
cirkelbåge, 72
cirkelskiva, 70
cosinus, 85
cosinussatsen, 94
cotangens, 85

decimalutveckling, 20
definitionsmängd, 99
delar, 4
delare till, 4
delas av, 4
delbart med, 4
delmängd, 1
distributiva lagen, 2
divisor till, 4
dubbelrot, 51, 63

ekvationssystem, 55
ekvivalenta ekvationer, 44
element, 1
eliminationsmetoden, 56
enhetscirkeln, 81
enpuktsformeln, 78
Erathostenes primtalssåll, 6
exponentialfunktion, 113

förkorta, 10
förlänga, 10
förstagradsekvation, 46
faktor i, 4
faktorsatsen, 59
falsk rot, 44, 52
funktion, 98

grad av polynom, 59
graf, 99

heltal, 1
hypotenusa, 73

identitetsfunktionen, 103
injektiv, 100
intervall, 22
invers, 100
irrationella tal, 20

jämn funktion, 104
jämna tal, 5

katet, 73
koefficient, 59
kommutativitet, 1
kongruenta, 65
konjugat, 27
konjugatregeln, 35
koordinater, 75
koordinatsystem, 74
korda, 81
kuberingsregler, 35
kvadrant, 75
kvadratkomplettering, 48
kvadratrot, 18, 26
kvadreringsregler, 35
kvot, 3

lösa ut, 44
likformiga, 67
linjär ekvation, 46
linje, 64
logaritmfunktion, 115

mängd, 1
målmängd, 99
medelpunkt, 70, 80
mindre än, 2, 22
minsta gemensamma nämnare, 11
multipel av, 4

n-te roten, 30
naturliga logaritmen, 116
naturliga tal, 1
negativa heltal, 1
nollställe, 59
nollställets multiplicitet, 63
normal, 80

om och endast om, 14
origo, 75

parallella linjer, 79
Pascals triangel, 38
periodicitet, 88
polynom, 59
polynomfunktion, 105
potens, 16, 31
potensfunktion, 111
precis när, 14
primtal, 4
Pythagoras sats, 73

rät linje, 58
rät vinkel, 65
rätvinklig, 93
rötter, 26
radie, 70, 80
rationell funktion, 107
rationella tal, 10
relativt prima, 10
rest, 3
riktningskoefficient, 77

sammansättning, 101
sammansatta tal, 4
sidovinklar, 65
sinus, 85
sinussatsen, 94
spetsig vinkel, 65
spetsvinklig, 93
större än, 2, 22
sträcka, 64
strängt avtagande, 103
strängt växande, 103
stråle, 64
substitutionsmetoden, 56
supplementvinklar, 65

tallinjer, 75
tangens, 85
topptriangel, 67
topptriangelsatsen, 67
trappstegsform, 57
trigonometriska ettan, 86
trubbig vinkel, 65
trubbvinklig, 93
tvåpunktsformeln, 78

udda funktion, 104
udda tal, 5

värdemängd, 99
växande, 103
vertikalvinklar, 65

x-axeln, 75

y-axeln, 75