Tentamen
Introduktionskurs, D

2015-08-29 kl. 8.30–12.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Timo Hirscher, telefon: 0703 088 304

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 20 poäng. Preliminärt så krävs 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas senast den 21 september . Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret.

Uppgifterna

1. Låt A, B, C vara mängder sådan att (10p)

$$|A| = |B| = |C| = 10, \quad |A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 3.$$

   (a) Bestäm $|A \cup B|$, $|A \Delta B|$ och $|\mathcal{P}(A)|$.

   (b) Vilka är de minsta och största möjliga antalen element i $A \cup B \cup C$? Ge ett exempel på A, B, C i båda fallen.

2. Låt $A \subset \mathbb{R}^2$ ges av $A = [0,\, 1] \times [0,\, 1]$ och låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av (10p)

$$f(x,\, y) = \left(x + \frac{1}{2},\, y - \frac{1}{2}\right).$$

   (a) Gör en skiss av talplanet som visar *tydligt* följande mängder:

$$A,\ f(A),\ A \cap f(A),\ (f \circ f)(A),\ A \cap \mathbb{Z}^2.$$

   (b) Är f bijektiv ? I så fall bestäm dess invers.

Var god vänd!

3. (a) Skriv summan (10p)

$$\frac{4}{3}+1+\frac{6}{7}+\frac{7}{9}+\cdots+\frac{22}{39}$$

med summasymbolen $\sum$.

(b) Beräkna summan

$$\sum_{k=-2}^{1}(k+3)\,2^k.$$

(c) Beräkna summan

$$\sum_{m=1}^{100}\frac{1}{m(m+1)}.$$

(TIPS: $\frac{1}{m(m+1)}=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}$).

4. Låt $f,\ g,\ h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vara följande tre funktioner: (10p)

$$f(x)=5x-7,\quad g(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x,\quad h(x)=\log_2(|x|+1).$$

(a) Funktionen f är uppenbarligen bijektiv. Bestäm dess invers.

(b) Bevisa att g är bijektiv (TIPS: Betrakta derivatan).

(c) Är h injektiv ? Vad är värdemängden till h ?

(d) Skriv formler för funktionerna $g\circ f$ och $f\circ g$.

(e) Är funktionen $g\circ f\circ g$ injektiv och/eller surjektiv ? Motivera ditt svar !

5. (a) Säg att 100 D-teknologer går på en sittning. Bevisa att det måste finnas minst två teknologer med samma antal vänner bland sällskapet. (5p)
(OBS! Antag att vänskap är omsesidigt, dvs jag är din vän om och endast om du är min vän. Man kan inte vara vän med sig själv (per definition).)

(b) För en funktion $f:S\to S$ från en mängd S till sig själv, låt oss beteckna $f^2:=f\circ f$, $f^3:=f\circ f\circ f$, o.s.v. (5p)
Låt nu $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ och $f:S\to S$ vara funktionen som ges av:

$$f(1)=2,\quad f(2)=4,\quad f(3)=6,\quad f(4)=5,\quad f(5)=1,\quad f(6)=3.$$

(i) Bestäm det minsta $n\in\mathbb{Z}_+$ sådan att $f^n=\mathrm{id}_S$.
(ii) Bestäm f^{2015}.

Good (will) hunting!

Lösningar Introduktionskurs D, 150829

1. (a)

$$\begin{aligned}|A\cup B| &= |A|+|B|-|A\cap B| = 10+10-3=17,\\ |A\Delta B| &= |A\cup B|-|A\cap B| = 17-3=14,\\ |\mathcal{P}(A)| &= 2^{|A|}=2^{10}=1024.\end{aligned}$$

(b) För att göra $A\cup B\cup C$ så stor som möjligt borde $A\cap C = B\cap C$ gälla, medan att för att göra unionen så liten som möjligt borde $(A\cap C)\cap(B\cap C)=\phi$ gälla. Detta innebär att

$$\begin{aligned}\max|A\cup B\cup C| &= |A\cup B|+|C|-3=24,\\ \min|A\cup B\cup C| &= |A\cup B|+|C|-(3+3)=21.\end{aligned}$$

Ett exempel då max antas är

$$A=\{1,\,2,\,\ldots,\,10\},\quad B=\{8,\,9,\,10,\,\ldots,\,17\},\quad C=\{8,\,9,\,10,\,18,\,19,\,\ldots,\,24\},$$

medan att ett exempel då min antas är

$$A=\{1,\,2,\,\ldots,\,10\},\quad B=\{8,\,9,\,10,\,\ldots,\,17\},\quad C=\{5,\,6,\,7,\,8,\,9,\,10,\,18,\,19,\,20,\,21\}.$$

2. (a) Se sista sidan i dokumentet.

(b) Ja. $f^{-1}(x,\,y)=\left(x-\frac{1}{2},\,y+\frac{1}{2}\right)$.

3. (a) Notera att $1=\frac{5}{5}$. Vi har

$$\frac{4}{3}+1+\frac{6}{7}+\frac{7}{9}+\cdots+\frac{22}{39}=\sum_{k=1}^{19}\frac{k+3}{2k+1}.$$

(b)

$$\sum_{k=-2}^{1}(k+3)\,2^k = 1\cdot 2^{-2}+2\cdot 2^{-1}+3\cdot 2^0+4\cdot 2^1=\frac{1}{4}+1+3+8=\frac{49}{4}.$$

(c) Med hjälp av tipset kan vi skriva summan som

$$\sum_{m=1}^{100}\frac{1}{m(m+1)}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right).$$

Vi ser att allt kancellerar förutom $\frac{1}{1}-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$.

4. (a) $f^{-1}(x)=\frac{x+7}{5}$.

(b) g är surjektiv ty det är ett polynom av udda grad. Sedan har vi att $g'(x)=x^2+x+1$ och den kvadratiska ekvationen $x^2+x+1=0$ har två icke-reella lösningar $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$. Detta innebär att $g'(x)>0$ för alla $x\in\mathbb{R}$ och således är g strängt växande och därmed injektiv. Eftersom g är både injektiv och surjektiv så är den bijektiv.

(c) h är inte injektiv ty för godtycklig $x\in\mathbb{R}$ gäller $|-x|=|x|$ och således är $h(-x)=h(x)$. Notera att $|x|+1$ antar alla värden i intervallet $[1,\,\infty)$ och eftersom $\log_2 1=0$ och logaritmen är en växande funktion så är $V_h=[0,\,\infty)$.

(d)

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= \frac{1}{3}(5x-7)^3+\frac{1}{2}(5x-7)^2+(5x-7)=\ldots\text{om du vill}\cdots=\\ &= \frac{125}{3}x^3-\frac{325}{2}x^2+215x-\frac{227}{2},\\ (f\circ g)(x) &= 5\cdot\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right)-7=\frac{5}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+5x-7.\end{aligned}$$

(e) Den är både injektiv och surjektiv, alltså bijektiv. Poängen är att både f och g är bijektiva och en sammansättning av bijektiva funktioner är också bijektiv. Vi kan formulera följande sats:

Sats. *Låt S vara en mängd och $f, g : S \to S$ funktioner. Om både f och g är bijektiva så också är $g \circ f$ och $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Jag hittar inte denna sats explicit i boken någonstans, men det är väldigt bra att veta, och jag ska passa på att nämna den när vi går igenom Kapitel 3 igen under TMV 210[1].

5. (a) Vi betraktar tre fall.

FALL 1: Det finns minst 2 teknologer utan några vänner alls.

Då har dessa två samma antal vänner så vi är klara.

FALL 2: Det finns exakt en teknolog utan vänner.

Kalla denna stackars teknolog för X. Var och en av de återstående 99 teknologerna har minst en vän. Ingen av dem har mer än 98 vänner dock, för ingen är vän med X. Så vi har 99 teknologer och bara 98 möjligheter för antalet vänner, så enligt lådprincipen måste det finnas 2 st med samma antal vänner.

FALL 3: Alla har minst en vän.

Så det finns 100 teknologer och alla har någonting mellan 1 och 99 vänner. Enligt lådprincipen igen så måste det finnas 2 st med lika många vänner.

(b) Det är bara att kolla att $n = 4$ är det minsta talet sådan att $f^n = \mathrm{id}_S$. Notera att detta innebär att $f^3 = f^{-1}$. Då har vi att

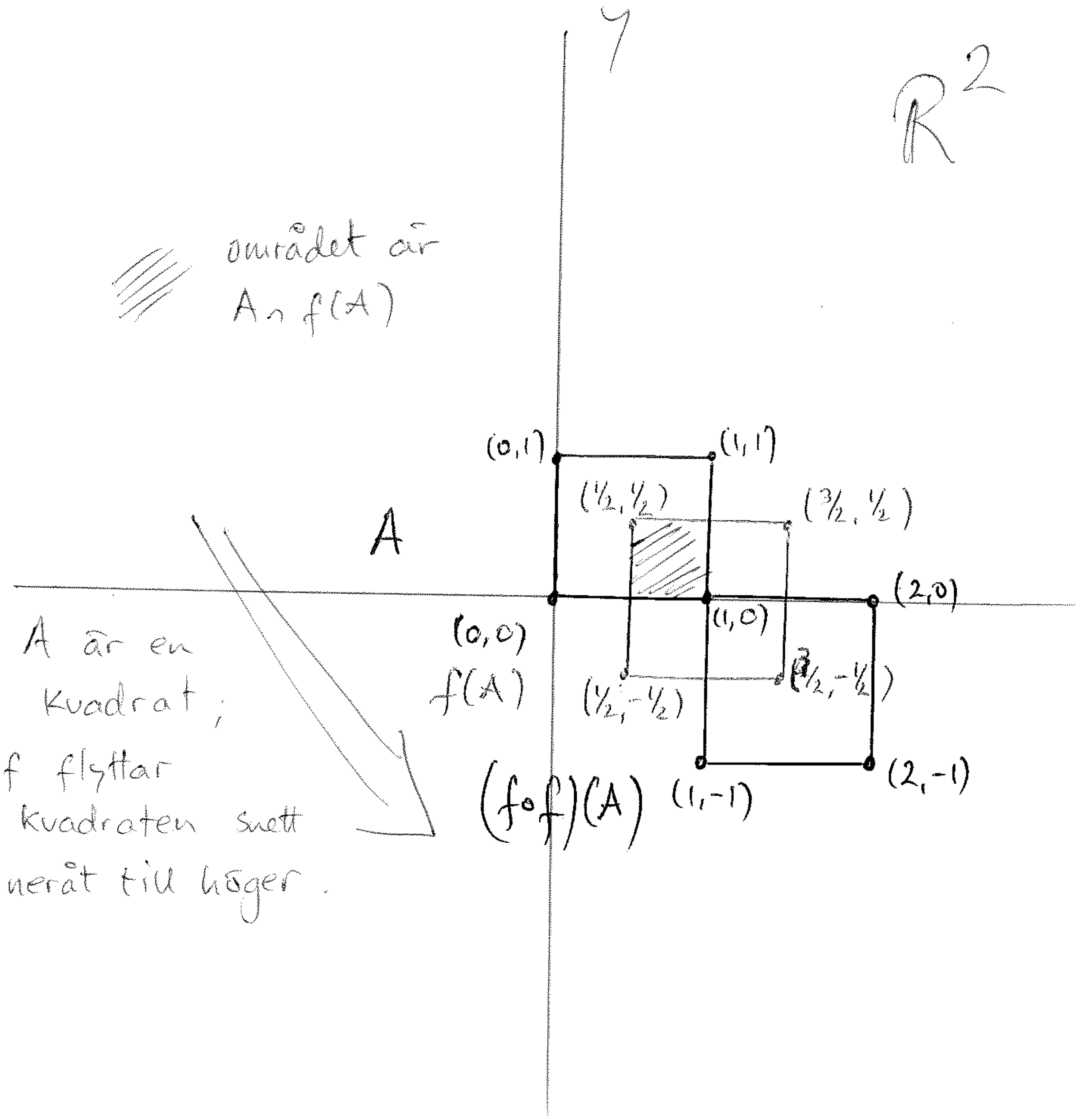
$$f^{2015} = f^{3+4\cdot 503} = f^3 \circ (f^4)^{503} = f^3 \circ (\mathrm{id}_S)^{503} = f^3 \circ \mathrm{id}_S = f^3 = f^{-1}.$$

Således är

$$f^{2015}(1) = 5, \quad f^{2015}(2) = 1, \quad f^{2015}(3) = 6, \quad f^{2015}(4) = 2, \quad f^{2015}(5) = 4, \quad f^{2015}(6) = 3.$$

[1] För ni som redan sett matriser så medför satsen formeln $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, som är fundamental för beräkning med matriser.

Uppgift 2(a)



$$A \cap \mathbb{Z}^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

$$f(A) = [1/2, 3/2] \times [-1/2, 1/2]$$

$$(f \circ f)(A) = [1, 2] \times [-1, 0]$$

$$A \cap f(A) = [1/2, 1] \times [0, 1/2]$$