Tentamen
Introduktionskurs, D

2017-08-26 kl. 8.30–12.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Raad Salman, telefon: x5325 (alt. Peter Hegarty, 0766377873)

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs preliminärt 20 poäng. Preliminärt så krävs 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas senast den 11 september. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret.

Uppgifter

1. Definiera följande mängder:

$$A = \{1, \text{fisk}, \{\emptyset\}, 0\},$$
$$B = \{A, \emptyset, \{0, 1\}, 1\}, \qquad \text{(Mängden } A \text{ är alltså ett element i mängden } B\text{)}$$
$$C = \mathcal{P}(\{0, 1\}).$$

Bestäm, genom att lista alla element, följande mängder. Ingen motivering krävs. (10p)

(a) $A \cap B$

(b) $A \cap C$

(c) $B \cap C$

(d) $\mathcal{P}(A) \cap B$.

2. Bevisa eller motbevisa följande påståenden med *tydlig* motivering !

(a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ (5p)

(b) $(A^c \cup B^c)^c \cap C = (A^c \cup B^c \cup C^c)$ (5p)

Använder du Venndiagram måste du visa hur diagrammen för höger- och vänsterled byggs upp av sina delar A, A^c, B etc.

Var god vänd!

3. Definiera följande funktioner:

$$f_1 : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$$
$$x \mapsto x + 3,$$

$$f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$x \mapsto x + 3,$$

$$f_3 : [0, \infty) \to [0, \infty)$$
$$x \mapsto x^4,$$

$$f_4 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$$
$$x \mapsto x^4,$$

(a) För var och en av funktionerna f_1, f_2, f_3 och f_4, avgör om funktionen är surjektiv, injektiv och/eller bijektiv. Motivera! (7p)

I det/de fall där funktionen är injektiv, ange en formel för dess invers, inklusive definitionsmängd, målmängd och värdemängd.

(b) Beskriv funktionen $f_3^{-1} \circ f_4$, inklusive dess definitionsmängd, värdemängd och målmängd. (3p)

4. (a) Beräkna

$$\sum_{k \in A} \frac{1}{k-2}$$

där $A = \{-3, -2, -1, \ldots, 6, 7\} \setminus \{2\}$. (4p)

(b) Skriv följande summa med hjälp av summasymbolen Σ.

$$4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9 + \cdots + 81 + 100$$

(4p)

5. Om $f : X \to X$ är en funktion från en mängd till sig själv och $n \in \mathbb{N}$ så betecknar vi med f^n den n-faldiga sammansättningen av f med sig själv, alltså $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n gånger). (6p)

Låt nu $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$ och f vara följande funktion:

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 4, \quad f(4) = 5, \quad f(5) = 3,$$
$$f(6) = 7, \quad f(7) = 8, \quad f(8) = 9, \quad f(9) = 10, \quad f(10) = 6.$$

Bestäm f^{2017}.

6. Bestäm på ett “smart” sätt (dvs utan att kolla alla talen ett i taget) antalet heltal bland 1, 2, ..., 2017 som är varken delbara med 2, 3 eller 5. (6p)

Lycka till!

Lösningar Introduktionskurs D, 170826

1. (a) $A \cap B = \{1\}$.

(b) $A \cap C = \phi$.

(c) $B \cap C = \{\phi, \{0, 1\}\}$.

(d) $\mathcal{P}(A) \cap B = \{\phi, \{0, 1\}, A\}$.

2. (a) Påståendet är sant. Vi har

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \setminus C) \Leftrightarrow \\ (x \in A) \wedge (x \in (B \setminus C)) \Leftrightarrow \\ (x \in A) \wedge ((x \in B) \wedge (x \notin C)) \Leftrightarrow \\ [(x \in A) \wedge (x \in B)] \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow \\ [(x \in A) \wedge (x \in B)] \wedge [(x \notin A) \vee (x \notin C)], \text{ ty } x \in A \text{ redan, } \Leftrightarrow \\ x \in (A \cap B) \wedge x \notin (A \cap C) \Leftrightarrow \\ x \in (A \cap B) \setminus (A \cap C), \quad \text{v.s.v.} \end{aligned}$$

För ett alternativt bevis med hjälp av Venndiagram, se Figur 1.

(b) Påståendet är falskt. Notera att

$$(A^c \cup B^c)^c = (A^c)^c \cap (B^c)^c = A \cap B,$$

som innebär att VL är $A \cap B \cap C$. Å andra sidan, HL är samma sak som $(A \cap B \cap C)^c$. Så HL är VL:s komplement och enda sättet på vilket de kan vara lika är om universumet är den tomma mängden.

3. (a) i. f_1 är injektiv men inte surjektiv, för värdemängden är $V_1 = \{n \in \mathbb{Z}_+ : n \geq 4\}$. Dess invers är den funktion $f_1^{-1} : V_1 \to \mathbb{Z}_+$ som ges av $f_1^{-1}(x) = x - 3$.

ii. f_2 är bijektiv. Dess invers är den funktion $f_2^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ som ges av $f_2^{-1}(x) = x - 3$.

iii. f_3 är bijektiv. Dess invers är den funktion $f_3^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ som ges av $f_3^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$.

iv. f_4 är inte injektiv ty $f(-x) = f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Den är däremot surjektiv, precis som f_3.

(b) Sätt $g := f_3^{-1} \circ f_4$ för enkelhets skull. Då gäller att $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ och ges av $g(x) = |x|$.

4. (a)

$$\begin{aligned} \sum_{k \in A} \frac{1}{k-2} &= \frac{1}{-3-2} + \frac{1}{-2-2} + \frac{1}{-1-2} + \frac{1}{0-2} + \frac{1}{1-2} \\ &\quad + \frac{1}{3-2} + \frac{1}{4-2} + \frac{1}{5-2} + \frac{1}{6-2} + \frac{1}{7-2} \\ &= -\frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = 0. \end{aligned}$$

(b) Summan kan skrivas som $\sum_{k=-2}^{10} k^2$.

5. f kan betraktas som en "konjunktion" av tre s.k. "cykler", som ges symboliskt av

$$1 \to 2 \to 1, \qquad 3 \to 4 \to 5 \to 3, \qquad 6 \to 7 \to 8 \to 9 \to 10 \to 6.$$

Den första cykeln har "period" 2 och eftersom 2017 är ett udda tal så gäller att $f = f^1$ och f^{2017} har samma verkan i denna cykel, alltså $f^{2017}(1) = 2$, $f^{2017}(2) = 1$.

Den andra cykeln har period 3 och eftersom $2017 = 3 \times 672 + 1$ så gäller att $f = f^1$ och f^{2017} har samma verkan i denna cykel, alltså $f^{2017}(3) = 4$, $f^{2017}(4) = 5$, $f^{2017}(5) = 3$.

Den tredje cykeln har period 5 och eftersom $2017 = 5 \times 403 + 2$ så gäller att f^2 och f^{2017} har samma verkan i denna cykel, alltså $f^{2017}(6) = 8$, $f^{2017}(8) = 10$, $f^{2017}(10) = 7$, $f^{2017}(7) = 9$, $f^{2017}(9) = 6$.

6. I denna lösning är det bekvämt att använda följande notation: För ett reellt tal x så betecknar vi med $\lfloor x \rfloor$ det största heltalet som är mindre än eller lika med x, dvs

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

Detta kallas för *heltalsdelen* till x. Notera att $\lfloor x \rfloor = x$ om och endast om $x \in \mathbb{Z}$.

Låt $X = \{1, 2, \ldots, 2017\}$ och betrakta följande tre delmängder till X:

$$\begin{aligned} A &= \{n \in X : \ n \text{ är delbart med } 2\}, \\ B &= \{n \in X : \ n \text{ är delbart med } 3\}, \\ C &= \{n \in X : \ n \text{ är delbart med } 5\}. \end{aligned}$$

Vi söker

$$|X \setminus (A \cup B \cup C)| = |X| - |A \cup B \cup C| = 2017 - |A \cup B \cup C|.$$

Notera först att

$$|A| = \lfloor \frac{2017}{2} \rfloor = 1008, \quad |B| = \lfloor \frac{2017}{3} \rfloor = 672, \quad |C| = \lfloor \frac{2017}{5} \rfloor = 403.$$

Nästa observation är att

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{n \in X : \ n \text{ är delbart med } 6\}, \\ A \cap C &= \{n \in X : \ n \text{ är delbart med } 10\}, \\ B \cap C &= \{n \in X : \ n \text{ är delbart med } 15\}, \\ A \cap B \cap C &= \{n \in X : \ n \text{ är delbart med } 30\}. \end{aligned}$$

Således gäller

$$|A \cap B| = \lfloor \frac{2017}{6} \rfloor = 336, \quad |A \cap C| = \lfloor \frac{2017}{10} \rfloor = 201, \quad |B \cap C| = \lfloor \frac{2017}{15} \rfloor = 134, \quad |A \cap B \cap C| = \lfloor \frac{2017}{30} \rfloor = 67.$$

Enligt sållprincipen gäller då

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 1008 + 672 + 403 - 336 - 201 - 134 + 67 = 1479. \end{aligned}$$

Slutligen: $|X| - |A \cup B \cup C| = 2017 - 1479 = 538$.