Tentamen
Introduktionskurs, D

2016-08-27 kl. 8.30–12.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Mattias Lennartsson, telefon: x5325

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 20 poäng. Preliminärt så krävs 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas senast den 19 september . Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret.

Uppgifterna

1. Låt $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ och $C = \{3, 4, 5\}$.

(a) Skriv upp var och en av följande mängder (8p)

$$A \cap (C \backslash B), \quad (A \Delta B) \times C, \quad (A \times B) \cap (A \times C), \quad \mathcal{P}(A \cap B).$$

(b) Bestäm $|\mathcal{P}(C^3)|$ (du behöver inte skriva upp hela mängden). (2p)

2. (a) Låt $D := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x \leq y\}$ och låt $f : D \to \mathbb{N}$ ges av $f(x, y) = x^2 + y^2$. (5p)

i. Är f injektiv ? Förklara.

ii. Är f surjektiv ? Förklara.

(b) Betrakta samma funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ fast nu med definitionsmängd $\mathbb{R}^2$ och målmängd $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. (5p)

i. Är funktionen injektiv ? Förklara.

ii. Är funktionen surjektiv ? Förklara.

iii. Låt $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ges av $A = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 : f(\mathbf{p}) = 1\}$. Beskriv mängden A geometriskt.

Var god vänd!

3. (a) Skriv summan (3p)

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \cdots - \frac{1}{81}$$

med summasymbolen $\sum$.

(b) Beräkna summan (3p)

$$\sum_{t=-1}^{4} \frac{t}{t+2}.$$

(c) Givet att $\sum_{k=1}^{100} k = 5050$, beräkna summan (4p)

$$\sum_{m=1}^{100} \frac{m^2+3m+2}{m+1}.$$

4. Låt $f,\, g : [0,\, \infty) \to [0,\, \infty)$ vara följande funktioner: (10p)

$$f(x) = x^3 - x^2 + x, \quad g(x) = \frac{1}{x+1}.$$

(a) Bevisa att både f och g är injektiva.

(b) Vilken/vilka av f och g är bijektiv ? Förklara.

(c) Skriv en formel för inversfunktionen till g (som en funktion med definitionsmängd $g([0,\, \infty)))$.

(d) Skriv formler för funktionerna $g \circ f$ och $f \circ g$.

5. (a) I en klass med 100 teknologer så finns det 80 st som talar engelska, 70 st som talar tyska och 60 st som talar franska. Om varje teknolog talar minst ett av språken, bestäm det minsta (resp. största) möjliga antal teknologer som talar alla tre språk. Illustrera båda extremfallen i respektive Venndiagram. (5p)

(b) För var och ett av påståendena nedan, avgör om det är sant eller falskt. Om det är sant, motivera varför. Om det är falskt, ge ett motexempel. (5p)

i. Om f och g är två funktioner från en mängd S till sig själv sådana att $g \circ f$ är injektiv så måste även f vara injektiv.

ii. Om f och g är två funktioner från en mängd S till sig själv sådana att $g \circ f$ är injektiv så måste även g vara injektiv.

Good (will) hunting!

Lösningar Introduktionskurs D, 160827

1. (a) i. $C \backslash B = \{5\}$ så $A \cap (C \backslash B) = \phi$.

ii. $A \Delta B = \{1, 4\}$ så

$$(A \Delta B) \times C = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (4, 3), (4, 4), (4, 5)\}.$$

iii.

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\} \text{ och} \\ A \times C &= \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (3, 4), (3, 5)\} \text{ så} \\ (A \times B) \cap (A \times C) &= \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}. \end{aligned}$$

Notera förresten att $(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$.

iv. $A \cap B = \{2, 3\}$ så $\mathcal{P}(A \cap B) = \{\phi, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$.

(b) $|C^3| = |C|^3 = 3^3 = 27$ så $|\mathcal{P}(C^3)| = 2^{27}$.

2. (a) i. Nej för t.ex. $f(0, 5) = 0^2 + 5^2 = 25 = 3^2 + 4^2 = f(3, 4)$.

ii. Nej för det finns t.ex. inga heltal x och y sådana att $x^2 + y^2 = 3$, så $3 \notin f(D)$.

(b) i. Nej. Funktionen var redan icke-injektiv i del (a) så det måste förbli så om vi utökar definitionsmängden.

ii. Ja ty för varje $r \in \mathbb{R}_+$ finns det par (x, y) av reella tal sådana att $x^2 + y^2 = r$. Lösningarna till denna ekvation utgör en cirkel i $\mathbb{R}^2$ med centrum i origo och radie $\sqrt{r}$.

iii. A är enhetscirkeln i $\mathbb{R}^2$.

3. (a) Summan är $\sum_{n=1}^{40} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$.

(b)

$$\sum_{t=-1}^{4} \frac{t}{t+2} = \frac{-1}{-1+2} + \frac{0}{0+2} + \frac{1}{1+2} + \frac{2}{2+2} + \frac{3}{3+2} + \frac{4}{4+2} = -1 + 0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{11}{10}.$$

(c) Konstatera att $m^2+3m+2 = (m+1)(m+2)$ så summan förenklas till $\sum_{m=1}^{100}(m+2)$. Det är alltså summan av alla heltal från 3 till 102 inklusivt. Det är givet att summan av alla heltal från 1 till 100 inklusivt är 5050. Så den första summan måste vara $5050 + 101 + 102 - 1 - 2 = 5250$.

4. (a) Angående f utnyttjar vi dess derivata. Man har $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Lösningarna till den kvadratiska ekvationen $3x^2 - 2x + 1 = 0$ är $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{1 \pm \sqrt{2}\, i}{3}$. Komplexa rötter innebär att $3x^2 - 2x + 1 > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$, dvs $f'(x) > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Så f är en strängt växande funktion och därmed injektiv.

Angående g så är det uppenbart att $x + 1$ är strängt växande för $x \in [0, \infty)$ och därmed är $\frac{1}{x+1}$ strängt avtagande i intervallen. Så g är strängt avtagande och därmed injektiv.

(b) f är också surjektiv ty $f(0) = 0$ och $f(x)$ växer sedan kontinuerligt och utan begränsning. Å andra sidan är $g(0) = 1$ och g avtar sedan och $g(x) \to 0$ då $x \to \infty$, så värdemängden för g är bara $(0, 1]$ och den är ej surjektiv.

Följdaktligen så är f bijektiv men inte g.

(c) Sätt $y = g(x) = \frac{1}{x+1}$. Inversfunktionen lyder $x = \frac{1}{y+1}$ som kan skrivas om på följande vis:

$$x = \frac{1}{y+1} \Rightarrow x(y+1) = 1 \Rightarrow xy + x = 1 \Rightarrow y = \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1.$$

Så $g^{-1}(x) = \frac{1}{x} - 1$.

(d)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{f(x)+1} = \frac{1}{x^3 - x^2 + x + 1}.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = [g(x)]^3 - [g(x)]^2 + g(x) = \frac{1}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} =$$
$$= \frac{1 - (x+1) + (x+1)^2}{(x+1)^3} = \frac{1 - x - 1 + x^2 + 2x + 1}{(x+1)^3} = \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)^3}.$$

5. (a) Jag ger två lösningar för att illustrera hur man ofta kan bevisa ett resultat på flera olika sätt.

Första Lösning: Låt A, B, C beteckna mängderna av teknologer som talar franska, tyska respektive engelska. Det är givet att

$$|A| = 60, \quad |B| = 70, \quad |C| = 80. \tag{1}$$

Det är också givet att varje teknolog talar minst ett av dessa språk, så

$$|A \cup B \cup C| = 100. \tag{2}$$

Enligt sållprincipen för tre mängder,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \tag{3}$$

Insättning av (1) och (2) in i (3) ger

$$100 = 60 + 70 + 80 - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|,$$

så

$$|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| = 110. \tag{4}$$

Vi söker undre och övre gränser på $|A \cap B \cap C|$, dvs på storleken av mängden av teknologerna som talar alla tre språk.

Övre gräns: Vi har såklart att var och en av $A \cap B$, $A \cap C$ och $B \cap C$ är minst lika stor som $A \cap B \cap C$. Detta innebär att VL av (4) är minst $2|A \cap B \cap C|$, så $|A \cap B \cap C| \leq 55$. Alltså högst 55 teknologer talar alla tre språk. Detta extremfall illustreras i den bifogade Figur 1(a).

Undre gräns: Betrakta mängden X av de teknologerna som talar minst två av de tre språken. Vi har

$$|X| = |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - 2|A \cap B \cap C|, \tag{5}$$

där minus 2:an kommer från att elementen i $A \cap B \cap C$ räknas redan en gång i var och en av de tre första termerna i högerledet. Om vi jämför (4) med (5) så härleder vi att

$$|X| = 110 - |A \cap B \cap C|. \tag{6}$$

Men a priori så är $|X| \leq 100$ ty det finns bara 100 teknologer totalt. Alltså, $110 - |A \cap B \cap C| \leq 100$ som medför att $|A \cap B \cap C| \geq 10$. Så minst 10 teknologer talar alla tre språk. Detta extremfall illusteras i den bifogade Figur 1(b).

Andra Lösning: Låt S vara mängden av alla 100 teknologerna och
$T = \{\text{engelska, tyska, franska}\}$, dvs T är en mängd med tre element, nämligen de tre olika språken i uppgiften. Skapa mängden

$$U := \{(s, t) \in S \times T : s \text{ talar } t\}.$$

Genom att räkna antal par i U vars andra del är engelska, tyska respektive franska ser vi att $|U| = 80 + 70 + 60 = 210$. Å andra sidan, låt x beteckna antalet personer som talar alla tre språk. För var och en av dessa x personer finns tre element i U med denna person som första del, och för var och en av de $100 - x$ resterande finns mellan 1 och 2. Det följer att $3x + (100 - x) \leq |U| = 210$ och $3x + 2(100 - x) \geq |U| = 210$, med likhet endast om ingen talar exakt 2 språk, respektive exakt 1 språk. Förenkling ger $x \leq 55$ respektive $x \geq 10$. Figur 1 visar hur dessa extremfall kan uppnås.

(b) i. Sant. För om f inte var injektiv skulle det innebära att det fanns $x_1 \neq x_2 \in X$ sådana att $f(x_1) = f(x_2)$. Men då skulle även

$$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$$

gälla, så $g \circ f$ skulle inte heller vara injektiv.

ii. Falskt. För att $g \circ f$ ska vara injektiv så räcker det att f är det samt att g är injektiv på delen $f(X)$ av dess definitionsmängd. Det spelar ingen roll hur g beter sig på delen $X \backslash f(X)$ av dess definitionsmängd.
Om X är en ändlig mängd och f är injektiv så måste $|f(X)| = |X|$ gälla, så $f(X) = X$ och i detta fall så måste även g vara injektiv. Men denna analys fallerar om X är oändlig. Som ett konkret motexempel, tag $X = \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$ och $g(x) = \lfloor x/2 \rfloor$. Det är klart att f är injektiv, men g är inte det ty t.ex. $g(0) = 0 = \lfloor 1/2 \rfloor = g(1)$. Men g är injektiv på de jämna talen och dessa utgör värdemängden $f(X)$. Precist så är $(g \circ f)(x) = x$ för alla $x \in \mathbb{N}$, så $g \circ f$ är injektiv.