Matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Introduktionskurs D, TMA220, 2013-08-31.
Tentamen i Introduktionskurs Datavetenskapligt program, MMGD00, 2013-08-31.
Inga hjälpmedel är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Kurt Persson, 0703-088304.
Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 20 poäng sammanlagt.

---

1. Låt $A = \{x \in \mathbb{Z} : |x| < \pi\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ och $C = \{x \in \mathbb{N} : (x-1)(x+2) = 0\}$.
   (a) Räkna upp elementen i A respektive C. (Kontrollera noggrant vilket universum som är angivet.)
   (b) Vad är $A \cup C$?
   (c) Vad är $A \cap C$?
   (d) Vad är $B \cap A$?
   (e) Vad är $\mathcal{P}(C)$? (10p)

2. (a) Skriv summan
   $$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{8}{7} + \frac{16}{9} + \ldots + \frac{256}{17}$$
   med summasymbolen $\sum$.
   (b) Vilket är det minsta talet N sådant att
   $$\sum_{i=3}^{N} \frac{1}{i} > 1.$$
   Motivera ditt svar. (8p)

3. (a) Låt A och B vara ändliga mängder. Bevisa att $|A| = |B|$ om det existerar en bijektiv funktion $f\colon A \to B$.
   (b) För mängder med oändligt antal element säger man per definition att $|A| = |B|$ om det existerar en bijektiv funktion $g\colon A \to B$. Detta ger ett mer sofistikerat sätt att jämföra oändliga mängder än att säga att $|A| = |B|$ om $|A| = \infty$ och $|B| = \infty$. Låt $\mathbb{Z}^{\text{even}}$ vara mängden av alla jämna heltal. Visa att $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}^{\text{even}}|$.
   (c) På liknande sätt definierar man att $|A| \leq |B|$ om det existerar en injektiv funktion $f\colon A \to B$. Visa att $|\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{R}|$. (10p)

Var god vänd!

4. Vi definierar en funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ med $f(x) = 2 - x$. (Kom ihåg att om f är en funktion så är f^n upprepad sammmansättning så att t.ex. $f^2 = f \circ f$ och $f^3 = f \circ f \circ f$.)

   (a) Bestäm f^2.

   (b) Bestäm f^n för godtyckligt positivt heltal n.

(6p)

5. Vi definierar en funktion $f \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ som utför följande operation

$$f(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, g(a_2)),$$

där $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en bijektiv funktion. Bestäm om f är bijektiv och bestäm i så fall inversen till f. (6p)

6. Vi låter $\mathbb{Z}^3$ vara alla ordnade trippler av heltal och element i $\mathbb{Z}^3$ skrivs som (a, b, c) där $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Precis som för $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ spelar ordningen av elementen i trippeln roll så t.ex. $(1, 2, 3) \neq (3, 2, 1)$. Vi definierar en binär operator $\star$ på $\mathbb{Z}^3$ genom

$$(a_1, a_2, a_3) \star (b_1, b_2, b_3) = (a_1 b_1, a_1 b_2 + a_2 b_3, a_3 b_3).$$

   (a) Är operatorn kommutativ?

   (b) Är operatorn associativ?

   (c) Finns det någon identitet? Bestäm i så fall den.

(10p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 20 september. Tentorna kommer att visas vid lämpligt tillfälle som meddelas på hemsidan och kan sedan om man missar detta avhämtas på expeditionen på Institutionen för matematiska vetenskaper som har öppet vardagar (utom onsdag) 9.00-13.00.

LYCKA TILL! Kurt & Stefan.