MATEMATISKA VETENSKAPER CTH och GU

Övnings-skrivning Tillämpad Matematik Kf1 14 maj 2007

Provet består av totalt tre (3) uppgifter. Max poäng: 95 Varje deluppgift ger maximalt 5p. Betygsgränser: 3: 40p, 4: 60p, 5: 75p. Det krävs att lösningarna är välskrivna med ordentliga motiveringar. Slarvigt skrivna lösningar kan ge poängavdrag.

Hjälpmedel: Inga

Telefonvakt:

1. Låt $I = [0, 1]$. Låt τ_h vara en uniform indelning av I i två delintervall $I_i = [x_i, x_{i+1}]$., $i = 1, 2$. Låt V_h vara rummet av kontinuerliga, styckvis linjära funktioner på I, där varje v i V_h är linjär på varje I_i. Låt vidare $u(x) = 1 - (x - 1)^2$.

(a) Rita in u och nodinterpolanten $\pi_h u$ i samma graf och ange $\pi_h u$'s värde i nodpunkterna.

(b) Bestäm $\pi_h u(x)$ explicit på delintervallen I_1 och I_2.

(c) Beräkna $\|u - \pi_h u\|_{L^\infty(I_1)}$.

(d) Använd feluppskattningsformeln för att uppskatta $\|u - \pi_h u\|_{L^\infty(I_1)}$.

(e) Argumentera varför $\|u - \pi_h u\|_{L^\infty(I_1)} \leq C_1$ medför att $\|u - \pi_h u\|_{L^2(I_1)} \leq C_2$ för konstanter C_1 och C_2.

(f) Definiera L^2-projektionen $u_h \equiv P_h u$ till u på V_h.

(g) Visa att $\|u - u_h\|_{L^2(I_1)} \leq \|u - v\|_{L^2(I_1)}$ för alla $v \in V_h$.

(h) Härled ekvationssystemet för beräkning av u_h och beräkna vektorn u_h.

(i) Rita nu en figur med u, $\pi_h u$ och u_h i samma graf. Använd linjal när Du ritar koordinatsystemet och olika färger för u, $\pi_h u$ och u_h.

2. Låt $I = [0, T]$. Gör en uniform indelning av intervallet i M stycken delintervall (tidssteg). Låt $k_n = k = t_n - t_{n-1}$ och $I_n = (t_{n-1}, t_n]$. Betrakta systemet av ODE's (Tidsbero-

ende FEM tex.)

$$(1) \qquad \begin{cases} Mu'(t) + S(t)u(t) = f(t), & 0 < t \leq T, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Inför lämpliga beteckningar och

(a) beskriv bakåt Euler metoden eller $dG(0)$ för systemet (1).

(b) beskriv Crank-Nicholson metoden eller $cG(1)$ för systemet (1).

3. Låt $I = [0, 1]$. Låt τ_h vara en uniform indelning av I i två delintervall $I_i = [x_i, x_{i+1}]$., $i = 1, 2$. Låt V_h vara rummet av kontinuerliga, styckvis linjära funktioner på I, där varje v i V_h är linjär på varje I_i med tillägget att $v(0) = v(1) = 0$. Betrakta tvåpunkts randvärdesproblemt

$$(2) \qquad \begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & x \in I, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

(a) Gör en variationsformulering av (2).

(b) Gör en FEM-formulering av (2).

(c) Härled ekvationssystemet för FEM-problemet till (2).

(d) Antag att $f(x) = x - x^2 + 2$. Visa att den exakta lösningen till (2) ges av $u(x) = x(1-x)$.

(e) Lös FEM-problemet i (c) för hand med $f(x) = x - x^2 + 2$.

(f) Rita en figur med den exakta (analytiska) lösningen och FEM-lösningen.

(g) Skriv randvillkoret i (2) som ett Robin randvillkor om vi har $u(0) = 1$ och $u(1) = 2$.

(h) Skriv randvillkoret i (2) som ett Robin randvillkor om vi har $u'(0) = 1$ och $u(1) = 0$.