Differentialekvationer och Tekniska Beräkningar del A

RÄKNEUPPGIFTER, LÄSVECKA 1.

Vektorrummet av linjära funktioner på ett intervall.

1. Låt $\lambda_a(x) = \frac{b-x}{b-a}$ och $\lambda_b(x) = \frac{x-a}{b-a}$. Visa att

$$\lambda_a(x) + \lambda_b(x) = 1; \quad a\lambda_a(x) + b\lambda_b(x) = x.$$

Ge en geometrisk tolkning genom att rita $\lambda_a(x)$, $\lambda_b(x)$, $\lambda_a(x) + \lambda_b(x)$, $a\lambda_a(x)$, $b\lambda_b(x)$, $a\lambda_a(x) + b\lambda_b(x)$ i samma figur.

Vektorrummet av styckvis linjära, kontinuerliga funktioner på ett intervall.

2. Låt $0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = 1$, där $x_1 = 1/6$ och $x_2 = 1/2$, vara en indelning av intervallet $[0, 1]$ i tre delintervall.
a) Bestäm analytiska uttryck för "hattfunktionerna" $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ i V_h (rummet av kontinuerliga, styckvis linjära funktioner på denna indelning). Rita också en figur.
b) Vilken är dimensionen av V_h?
c) Rita mesh-funktionen $h(x)$.

Linjär interpolation.

3. Låt $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ vara en Lipschitzkontinuerlig funktion. Bestäm den linjära interpolanten $\pi f \in \mathcal{P}(0, 1)$ och rita f och πf i samma figur, då
a) $f(x) = x^2$,
b) $f(x) = \sin(\pi x)$.

Styckvis linjär, kontinuerlig interpolation.

4. Låt $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ vara en Lipschitzkontinuerlig funktion. Bestäm den styckvis linjära, kontinuerliga interpolanten $\pi_h f \in V_h$, med $h(x)$ och V_h som i Uppgift 2, och rita f och $\pi_h f$ i samma figur, då
a) $f(x) = x^2$,
b) $f(x) = \sin(\pi x)$.
Är det en lämplig indelning vi har valt för att approximera dessa funktioner? Kan du tänka ut en bättre i fall a) respektive b) om kravet är att det skall vara tre delintervall?

Interpolationsfel.

5. Låt $h(x)$ vara mesh-funktionen i Uppgift 2. Beräkna $||f - \pi_h f||_{L_\infty(0,1)}$ samt $\frac{1}{8}||h^2 f''||_{L_\infty(0,1)}$, då
a) $f(x) = x^2$,
b) $f(x) = \sin(\pi x)$.
Tips: För att beräkna $||f - \pi_h f||_{L_\infty(0,1)}$ behöver du maximera funktionen $g(x) = |f(x) - \pi_h f(x)|$ på varje delintervall och ta ut det största av dessa tre maxima. Du kan kontrollera dina svar genom att också göra beräkningarna i *Piecewise Polynomial Lab.*

Om du tror du kommit på bättre indelningar i slutet på Uppgift 4, så gör om beräkningarna för dessa. Utnyttja gärna *Piecewise Polynomial Lab*!

Date: 12 mars 2003, Niklas Ericsson. Matematik, Chalmers.