MATEMATISKA VETENSKAPER CTH och GU

Skrivning TMA225 Tillämpad Matematik Kf1 1 juni, 2010 V em

Provet består av totalt tre (3) uppgifter. Max poäng: 100 Varje deluppgift ger maximalt 5p. Betygsgränser: 3: 40p, 4: 60p, 5: 75p. Det krävs att lösningarna är välskrivna med ordentliga motiveringar. Slarvigt skrivna lösningar kan ge poängavdrag.

Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa

Telefonvakt: Karin Kraft 0703-088304

1. En reell geometrisk serie är på formen

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$$

där a och r är reella konstanter. Låt oss anta att $a \neq 0$.

(a) För vilka r konvergerar serien? Visa detta. Vad blir summan?

(b) Beräkna summan av serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}.$$

(c) Definiera begreppet potensserie och konvergensradie för en funktion f.

(d) Resonemanget i uppgift (a) kan användas för att visa att funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

kan utvecklas i en potensserie för $x \in I$, där I är ett intervall i $(-\infty, +\infty)$. Bestäm detta intervall och skriv upp potensserien för derivatan $f'(x)$ på detta intervall.

(e) Låt $f = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, vara en periodisk funktion med period T. Definiera f's Fourierserie och Fourierkoefficienter.

(f) Låt f vara periodisk med period 2π och definierad av $f(t) = \pi - |t|$ för $-\pi \leq t \leq \pi$. Rita upp f på intervallet $-3\pi \leq t \leq 3\pi$.

(g) Beräkna Fourierkoefficienterna a_0, a_1 och b_1 för funktionen f i uppgift (f).

2. Låt $I = [0, 2\pi]$. Låt τ_h vara en uniform indelning av I i fyra delintervall $I_i = [x_i, x_{i+1}]$.,

$i = 1, 2, 3, 4$. Låt V_h vara rummet av kontinuerliga, styckvis linjära funktioner på I, där varje v i V_h är linjär på varje I_i. Låt $u(x) = \cos(x)$ i uppgift (a)-(e).

(a) Rita in u och nodinterpolanten $\pi_h u$ i samma graf och ange $\pi_h u$'s värde i nodpunkterna.

(b) Nodinterpolanten $\pi_h u$ på I_i kan skrivas som

$$\pi_h u(x) = u(x_i)\lambda_i(x) + u(x_{i+1})\lambda_{i+1}.$$

Bestäm $\lambda_1(x)$ och $\lambda_2(x)$ samt $\pi_h u(x)$ på I_1.

(c) Beräkna $\|u - \pi_h u\|_{L^\infty(I_1)}$.

(d) Använd feluppskattningsformeln för att uppskatta $\|u - \pi_h u\|_{L^\infty(I_1)}$.

(e) Beräkna $\|u - \pi_h u\|_{L^2(I_1)}$

(f) Definiera L^2-projektionen $w_h \equiv P_h w$ till en funktion w på V_h.

(g) Visa att $\|w - w_h\|_{L^2(I_1)} \leq \|w - v\|_{L^2(I_1)}$ för alla $v \in V_h$.

(h) Härled ekvationssystemet för beräkning av w_h.

3. Låt $I = [0, 1]$. Låt τ_h vara en uniform indelning av I i två delintervall $I_i = [x_i, x_{i+1}]$., $i = 1, 2$. Låt V_h vara rummet av kontinuerliga, styckvis linjära funktioner på I, där varje v i V_h är linjär på varje I_i med tillägget att $v(0) = v(1) = 0$. Betrakta tvåpunkts randvärdesproblemt

$$(1) \qquad \begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in I, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

(a) Gör en variationsformulering av (1).

(b) Gör en FEM-formulering av (1).

(c) Härled ekvationssystemet för FEM-problemet till (1).

(d) Låt $f(x) = -2$. Lös (1) analytiskt.

(e) Lös FEM-problemet i (c) för hand med $f(x) = -2$. Rita sedan in den analytiska lösningen i (d) och den approximativa i (e) i samma graf.

Kort feedback på kursen

.

1. Vad tycte du bäst om av teori och projektarbete?

2. Hur har boken fungerat för teori och i studio?

3. Har kursen ökat eller minskat ditt intesse för tillämpad matematik?

Tack och Trevlig Sommar

Nils och Hermann