MATEMATISKA INSTITUTIONEN CTH och GU

Skrivning TMA225 Tillämpad Matematik Kf1 20 januari 2007 f V

Provet består av totalt fyra (4) uppgifter. Max poäng: 100 Varje deluppgift ger maximalt 5p. Betygsgränser: 3: 40p, 4: 60p, 5: 80p. Det krävs att lösningarna är välskrivna med ordentliga motiveringar. Slarvigt skrivna lösningar kan ge poängavdrag.

Hjälpmedel: Inga

Telefonvakt: Oscar Marmon 0762-721860 I FÖRSTA HAND
CHRISTER BORELL 0704-063461 I ANDRA HAND

1. Låt Ω vara en konvex polygon i planet. Låt Γ vara randen till Ω. Låt vidare f vara en given begränsad funktion i $L^2(\Omega)$. Betrakta Poissons ekvation i 2D

$$(1) \qquad \begin{cases} -\mathrm{div}\nabla u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \Gamma. \end{cases}$$

(a) Gör en variationsformulering av (1).

(b) Gör en FEM-formulering av (1).

(c) Härled ekvationssystemet för FEM-problemet till (1).

(d) Definiera begreppet Galerkinortogonalitet.

(e) Finita elementlösningen till (1) existerar och är entydig. Ge en motivering utgående från systemet i (c) till detta.

2. Låt $\lambda_a(x) = \frac{b-x}{b-a}$ och $\lambda_b(x) = \frac{x-a}{b-a}$.

(a) Visa att $\lambda_a(x) + \lambda_b(x) = 1$.

(b) Visa att $a\lambda_a(x) + b\lambda_b(x) = x$.

(c) Låt $a = 1$ och $b = 2$. Rita en figur av $\lambda_a(x)$, $\lambda_b(x)$ och $\lambda_a(x) + \lambda_b(x)$.

3. Låt $I = [0, 2]$. Låt τ_h vara en uniform indelning av I i fyra delintervall $I_i = [x_i, x_{i+1}]$., $i = 1, 2, 3, 4$. Låt V_h vara rummet av kontinuerliga, styckvis linjära funktioner på I, där varje v i V_h är linjär på varje I_i. Låt vidare $f(x) = 4 - x^2$.

(a) Rita in f och nodinterpolanten $\pi_h f$ i samma graf och ange $\pi_h f$'s värde i nodpunkter-

VAR GOD VÄND!

na.

(b) Bestäm $\pi_h f(x)$ explicit på delintervallet I_1.

(c) Beräkna $||f - \pi_h f||_{L^\infty(I_1)}$.

(d) Använd feluppskattningsformeln för att uppskatta $||f - \pi_h f||_{L^\infty(I_1)}$.

(e) Definiera L^2-projektionen $P_h f$ till f på V_h.

(f) Utan att räkna ut något, härled ekvationssystemet för beräkning av $P_h f$.

4. Låt $I = [0, 1]$. Låt τ_h vara en uniform indelning av I i två delintervall $I_i = [x_i, x_{i+1}]$., $i = 1, 2$. Låt V_h vara rummet av kontinuerliga, styckvis linjära funktioner på I, där varje v i V_h är linjär på varje I_i med tillägget att $v(0) = v(1) = 0$. Betrakta tvåpunkts randvärdesproblemt

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in I, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

(a) Gör en variationsformulering av (2).

(b) Gör en FEM-formulering av (2).

(c) Härled ekvationssystemet för FEM-problemet till (2).

(d) Antag att $f(x) = 1$. Lös (2) analytiskt.

(e) Lös FEM-problemet i (c) för hand med $f(x) = 1$.

(f) Rita en figur med den exakta (analytiska) lösningen och FEM-lösningen.

Lösningsskissen TMA 220 070120

1 a.) $$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx$$

b) $$\int_\Omega \nabla U_h(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx$$

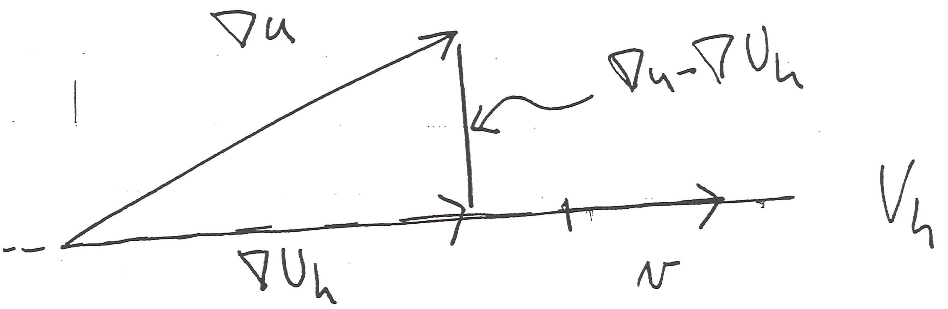
c) $$\sum c_j \int_\Omega \nabla \varphi_j(x) \cdot \nabla \varphi_i(x)\, dx = \int_\Omega f\, \varphi_i(x)\, dx$$

d) $$-\Delta u = f$$

$$-\Delta U_h = f$$

$$\int_\Omega (\nabla u - \nabla U_h, v)\, dx = 0$$

$$v \in V_h$$

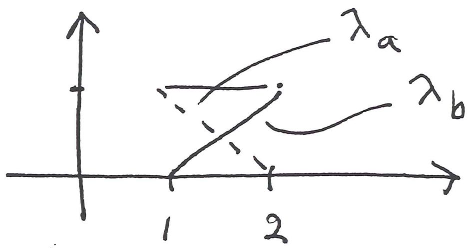


e) with f nice since the stiffness matrix $A = (a_{ij}) = \int \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i$ is pos def

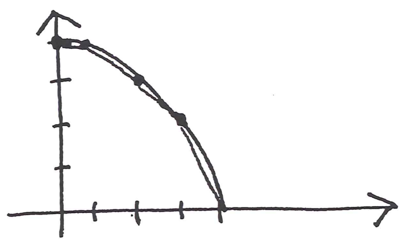
2. a) $\lambda_a(x) + \lambda_b(x) = \frac{b-x}{b-a} + \frac{x-a}{b-a} = 1$

b) $a\lambda_a(x) + b\lambda_b(x) = \frac{ab - ax + bx - ab}{b-a} = x$

c)



3. a)



$\pi_h f(0) = 4$

$\pi_h f(0.5) = 3.75$

$\pi_h f(1) = 3$

$\pi_h f(1.5) = 1.75$

$\pi_h f(2) = 0$

b)

På I_1 har vi $\pi_h f(x) = f(0)\lambda_0(x) + f(0.5)\lambda_{0.5}(x)$

$$= 4 \cdot \frac{0.5-x}{0.5-0} + 3.75\,\frac{x-0}{0.5-0}$$

$$= 4 - 0.5x$$

c) $\|f - \pi_h f\|_{L^\infty(I_1)} = \max_{0 \le x \le 0.5} |f(x) - \pi_h f(x)| =$

$$\max_{0 \le x \le 0.5} |4 - x^2 - (4 - 0.5x)| = \max_{0 \le x \le 0.5} |0.5x - x^2|$$

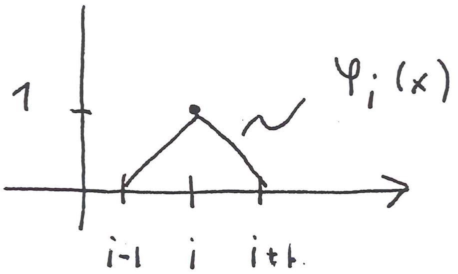
maximum i $x = 0.25$ $\qquad = 0.0625$

d) $\|f - \pi_h f\|_{L^\infty(I_1)} \leq \frac{1}{8}(0.5)^2 \max_{x \in I_1} |f''(x)|$

$= \frac{1}{8} \cdot 0.25 \cdot 2 = 0.0625$

e) $\int_0^2 (f - P_h f, v)\, dx = 0$ för alla $v \in V_h$.

f) Sätt $P_h f = \sum_{i=1}^{5} c_i \varphi_i(x)$



Välj $v = \varphi_j(x)$

Vi får

$$\int_0^2 \left(\sum_{i=1}^{5} c_i \varphi_i(x) \right) \varphi_j(x)\, dx = \int_0^2 f(x) \varphi_j(x)\, dx$$

$$\sum_{i=1}^{5} c_i \int_0^2 \varphi_i(x) \varphi_j(x)\, dx = \int_0^2 f(x) \varphi_j(x)\, dx \qquad j = 1, \ldots, 5$$

Som kan skrivas som

$$Ac = b$$

$A = (a_{ij}) = \int_0^2 \varphi_i \varphi_j \quad b_i = \int_0^2 f \varphi_j \quad c = (c_i)$

4. (2) $\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

a) Låt $V = H_0^1(0,1)$. Finn $u \in V$ så att

(*) $$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$$

för varje $v \in V$

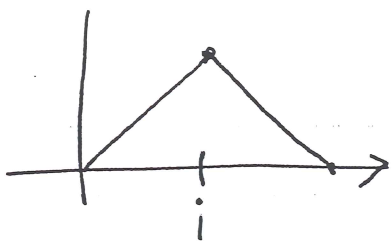
(*) VL fås efter partiell integration.

(b) $V_h \subset V$. Finn $U_h \in V_h$ så att

$$\int_0^1 U_h'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,v(x)\,dx$$

för varje $v \in V_h$

(c) Ansätt $U_h(x) = \sum_i c_i \varphi_i(x)$



Homogena randdata

$\Rightarrow$ en basfunktion räcker

$$c_i \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_i'(x)\,dx = \int_0^1 f\,\varphi_i(x)\,dx$$

MATEMATISKA VETENSKAPER CTH och GU

Skrivning TMA225 Tillämpad Matematik Kf1 2 juni 2007 V em

Provet består av totalt tre (3) uppgifter. Max poäng: 100 Varje deluppgift ger maximalt 5p. Betygsgränser: 3: 40p, 4: 60p, 5: 75p. Det krävs att lösningarna är välskrivna med ordentliga motiveringar. Slarvigt skrivna lösningar kan ge poängavdrag.

Hjälpmedel: Inga

Telefonvakt: Georgios Foufas 0762-721860

1. Låt f och g vara två kontinuerliga funktioner på ett intervall $I \subset \mathbb{R}$.

(a) Definiera funktionsrummet $L^2(I)$.

(b) Definiera skalärprodukten (f, g) i rummet $L^2(I)$.

(c) Definiera normen $\|\cdot\|_{L^2(I)}$.

(d) Visa att funktionerna $f(x) = \sin(x)$ och $g(x) = \cos(x)$ är ortogonala på $I = [0, \pi]$.

2. Låt $I = [0, 1]$. Låt τ_h vara en uniform indelning av I i två delintervall $I_i = [x_i, x_{i+1}]$., $i = 1, 2$. Låt V_h vara rummet av kontinuerliga, styckvis linjära funktioner på I, där varje v i V_h är linjär på varje I_i. Låt vidare $u(x) = 1 - (x - 1)^2$.

(a) Rita in u och nodinterpolanten $\pi_h u$ i samma graf och ange $\pi_h u$'s värde i nodpunkterna.

(b) Bestäm $\pi_h u(x)$ explicit på delintervallen I_1 och I_2.

(c) Beräkna $\|u - \pi_h u\|_{L^\infty(I_1)}$.

(d) Använd feluppskattningsformeln för att uppskatta $\|u - \pi_h u\|_{L^\infty(I_1)}$.

(e) Beräkna $\|u - \pi_h u\|_{L^2(I_1)}$

(f) Argumentera varför $\|u - \pi_h u\|_{L^\infty(I_1)} \leq C_1$ medför att $\|u - \pi_h u\|_{L^2(I_1)} \leq C_2$ för konstanter C_1 och C_2.

(g) Definiera L^2-projektionen $u_h \equiv P_h u$ till u på V_h.

(h) Visa att $\|u - u_h\|_{L^2(I_1)} \leq \|u - v\|_{L^2(I_1)}$ för alla $v \in V_h$.

(i) Härled ekvationssystemet för beräkning av u_h och beräkna vektorn u_h.

(j) Rita nu en figur med u, $\pi_h u$ och u_h i samma graf. Använd linjal när Du ritar koordinatsystemet och olika färger för u, $\pi_h u$ och u_h.

3. Låt $I = [0,1]$. Låt τ_h vara en uniform indelning av I i två delintervall $I_i = [x_i, x_{i+1}]$., $i = 1, 2$. Låt V_h vara rummet av kontinuerliga, styckvis linjära funktioner på I, där varje v i V_h är linjär på varje I_i med tillägget att $v(0) = v(1) = 0$. Betrakta tvåpunkts randvärdesproblemt

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & x \in I, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Gör en variationsformulering av (2).

(b) Gör en FEM-formulering av (2).

(c) Härled ekvationssystemet för FEM-problemet till (2).

(d) Antag att $f(x) = x - x^2 + 2$. Visa att den exakta lösningen till (2) ges av $u(x) = x(1-x)$.

(e) Lös FEM-problemet i (c) för hand med $f(x) = x - x^2 + 2$.

(f) Rita en figur med den exakta (analytiska) lösningen och FEM-lösningen.

4. Har denna kurs ökat eller minskat ditt intresse för matematik/tillämpad matematik? Ge kort kommentar.

Trevlig sommar!!

Nils

1 (a) $L^2(I) = \left\{ v : \int_I v^2(x)\,dx < \infty \right\}$

(b) $(f,g)_{L^2(I)} = \int_I f(x)g(x)\,dx$

(c) $\|f\|_{L^2(I)} = \left(\int_I (f(x))^2\,dx \right)^{1/2}$

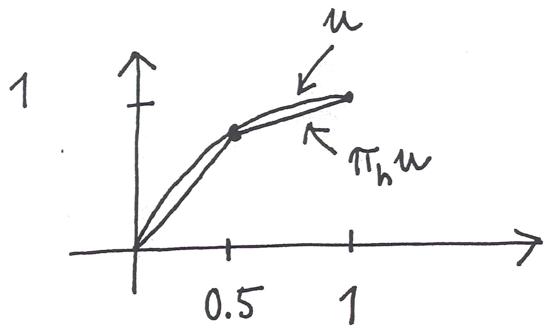
(d) $\int_0^\pi f(x)g(x)\,dx = \int_0^\pi \sin(x)\cos(x)\,dx$

$= \int_0^\pi \frac{1}{2}\sin(2x)\,dx = \left[-\frac{1}{4}\cos(2x) \right]_0^\pi$

$= 0$

2. $u(x) = 1 - (x-1)^2$

(a)



noder: $N_1 = 0$

$N_2 = 0.5$

$N_3 = 1$

$\pi_h u(N_1) = 0$

$\pi_h u(N_2) = 0.75$

$\pi_h u(N_3) = 1$

(b) På $I_1 = [0, 0.5]$. Rät linje på 2 punkts form

$$k_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0.75}{0.5} = 1.5$$

$$y - 0 = k_1 (x - 0) \iff y = 1.5x$$

På $I_2 = [0.5, 1]$

$$k_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5$$

$$y - 1 = k_2 (x - 1) \iff y = 0.5x + 0.5$$

Slutsats: $\pi_h u(x) = \begin{cases} 1.5x, & x \in I_1 \\ 0.5x + 0.5, & x \in I_2 \end{cases}$

(c) $\|u - \pi_h u\|_{L^\infty(I_1)} = \max_{x \in I_1} |u(x) - \pi_h u(x)|$

$$u(x) - \pi_h u(x) = 1 - (x-1)^2 - 1.5x$$

$$= 0.5x - x^2 = r(x)$$

Maximera $r(x)$ på I_1.

$r'(x) = 0.5 - 2x = 0$ då $x = 0.25$

$r''(x) = -2 \Rightarrow r$ har lokalt maximum

i $x = 0.25$

$$r(0.25) = 0.125 - 0.0625 = 0.0625$$

Slutsats: $\|u - \pi_h u\|_{L^\infty(I_1)} = 0.0625$

(d) Formeln säger att

$$\|u - \pi_h u\|_{L^\infty(I_1)} \leq \frac{1}{8}(0.5)^2 \max_{x \in I_1} |u''(x)|$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = 0.0625$$

(f) $\|u - \pi_h u\|^2_{L^2(I_1)} = \int_{I_1} |u - \pi_h u|^2 \, dx \leq$

$$\leq \int_{I_1} (\max |u - \pi_h u|)^2 \, dx = |I_1| \, \|u - \pi_h u\|^2_{L^\infty(I_1)}$$

$$\leq |I_1| \, C_1^2 = C_2^2$$

(e)

$$\|u-\pi_h u\|^2_{L^2(I_1)} = \int_0^{0.5} (0.5x - x^2)^2 \, dx$$

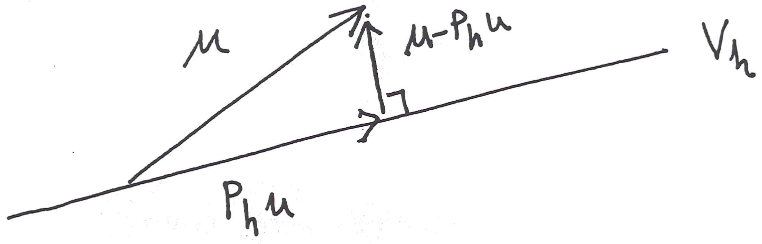
$$= \int_0^{0.5} \left(\frac{1}{4}x^2 - x^3 + x^4 \right) dx = \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_0^{0.5}$$

$$= \frac{1}{960}$$

$$\Rightarrow \|u-\pi_h u\|_{L^2(I_1)} = \frac{1}{\sqrt{960}} \approx 0.0323$$

(g) L^2-projektionen $P_h u$ av u på V_h ges av

$$(1) \quad \int_I (u - P_h u) \cdot v \, dx = 0 \quad \text{för varje } v \in V_h$$



(h)
$$\|u - u_h\|^2_{L^2(I_1)} = (u - u_h, u - u_h)$$

$$= (u - u_h, u - v) + \underbrace{(u - u_h, v - u_h)}_{=0}$$

$= 0$ ty $u - u_h$ är ortogonal mot alla element i V_h och $v - u_h \in V_h$

Cauchy-Schwarz

$$\leq \|u - u_h\| \, \|u - v\|$$

$$\Rightarrow \|u - u_h\| \leq \|u - v\|$$

Notera speciellt att

$$\|u - u_h\|_{L^2(I_1)} \leq \|u - \pi_h u\|_{L^2(I_1)} \leq C_2 .$$

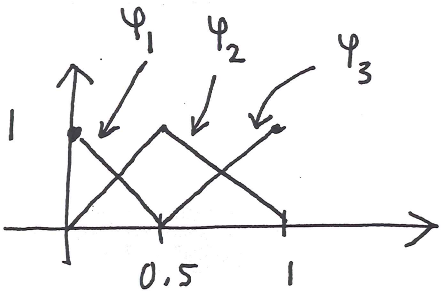
(i) Ansats $u_h(x) = \sum_{i=1}^{3} c_i \varphi_i(x)$ och

välj $v = \varphi_j(x)$, $j = 1,2,3$ i (1).

Vi får

$$\int_{I} P_h u \, v \, dx = \int_{I} u \, v \, dx$$

$$\sum_{i=1}^{3} c_i \underbrace{\int_{I} \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx}_{S_{ij}} = \int_{I} \underbrace{u(x)\varphi_j(x)\,dx}_{b_j}, \quad j = 1,2,3$$



$$S_{11} = \int_0^1 \varphi_1\varphi_1 \, dx = \frac{1}{6} \approx 0.1667$$

$$S_{12} = \int_0^1 \varphi_1\varphi_2 \, dx = \frac{1}{12} \approx 0.0833$$

$$b_1 = \int_0^1 u(x)\varphi_1 \, dx \approx 0.0729$$

$$S_{21} = S_{12} = 0.0833$$

$$b_2 \approx 0.3542$$

$$S_{31} = S_{13} = 0$$

$$b_3 \approx 0.2396$$

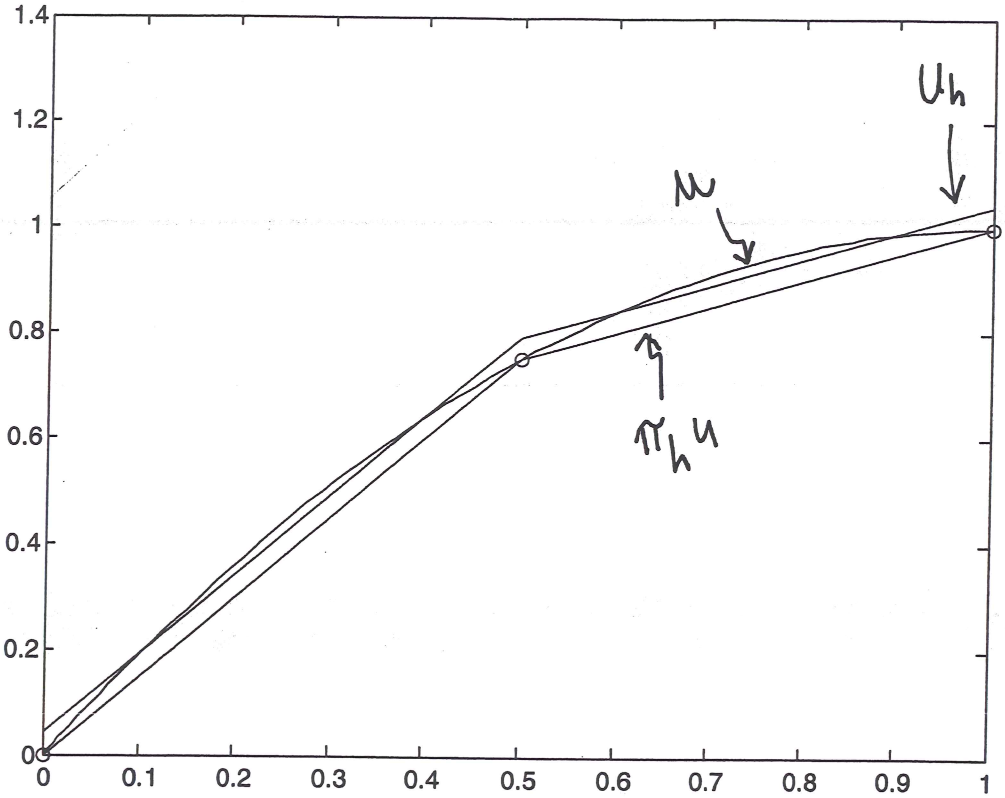
$$S_{22} = \int_0^1 \varphi_2\varphi_2 \, dx = 2 S_{11} \approx 0.3333$$

$$S_{23} = S_{32} = S_{21} = S_{12} = 0.0833$$

$$S_{33} = S_{11} = 0.1667$$

$$c = U_h = S \setminus b \approx \begin{pmatrix} 0.0417 \\ 0.7917 \\ 1.0417 \end{pmatrix}$$

(j)



3. (a) Multiplicera (2) med en test funktion $v \in V$ och integrera över I.

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)\,dx + \int_0^1 u(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$$

Partiell integration i VL ger

$$-\left[u'(x)v(x)\right]_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 u(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$$

Välj nu $V = H_0^1(0,1) = \{v \in L^2(0,1) : v' \in L^2(0,1) \text{ och } v(0) = v(1) = 0\}$

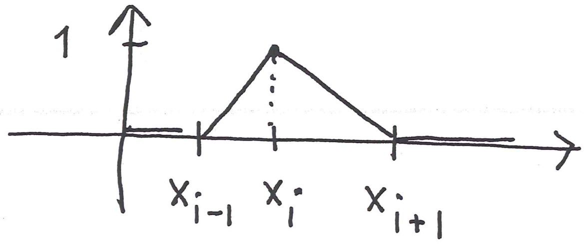
Vi ser att randintegralen försvinner och vi får variationsproblemet : Finn $u \in V$ $(= H_0^1(0,1))$ så att

$$(V) \quad \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 u(x)v(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$$

för alla $v \in V$

(b) Gör en indelning (mesh) τ_h av $[0,1]$. $\tau_h : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$

Låt $V_h \subset H_0^1(0,1)$ vara det ändligt-dimensionella rum som ges av $V_h = \text{span}\{\varphi_0, \dots, \varphi_N\}$, där φ_i är basfunktioner (hatt) funktioner



Låt $u_h(x) = P_h u(x)$ L^2-projektionen av $u \in H_0^1(0,1)$ på V_h.

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^{N} c_i \varphi_i(x).$$

Anm: $V_h \subset H_0^1(0,1)$ har dessutom

(*) $c_0 = c_N = 0$ ty $v(0) = v(1) = 0$ för v i detta delrum V_h.

Med variationsformuleringen (V) i gott minne får vi: FEM: Finn $u_h \in V_h$:

(F) $$\int_0^1 u_h' v' \, dx + \int_0^1 u_h v \, dx = \int_0^1 f v \, dx \quad \text{för alla } v \in V_h$$

(c) Vi sätter in $u_h(x) = \sum_{i=0}^{N} c_i \varphi_i(x)$

och $v = \varphi_j(x)$ i (F).

$$\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{N} c_i \varphi_i(x)\right) \varphi_j'(x)\,dx + \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{N} c_i \varphi_i(x)\right)\varphi_j(x)\,dx = \int_0^1 f\varphi_j\,dx$$

Enligt (*) har vi $c_0 = c_N = 0$. Vi summerar därför från $i=1$ till $i=N-1$.

Omkastning av integration, summering och derivering ger

$$\text{(FS)} \quad \sum_{i=1}^{N-1} c_i \left[\int_0^1 \varphi_i' \varphi_j'\,dx + \int_0^1 \varphi_i \varphi_j\,dx \right] = \int_0^1 f\varphi_j\,dx$$

för $j = 1, \ldots, N-1$.

Notera nu att (FS) är ett system av algebraiska ekvationer på formen

$$(S + M)c = b$$

med styvhetsmatris S, $S_{ij} = \int_0^1 \varphi_i' \varphi_j'\,dx$

massmatris M, $M_{ij} = \int_0^1 \varphi_i \varphi_j\,dx$

lastvektor b, $b_j = \int_0^1 f\varphi_j\,dx$

och lösning c, $c = (c_1, \ldots, c_{N-1})$

(d) Vi sätter $u(x) = x(1-x)$ i VL

$u'(x) = 1-2x$

$u''(x) = -2$

$$-u''(x) + u(x) = 2 + x - x^2 = f(x)$$

Vidare ger $u(x) = x(1-x)$ att $u(0) = u(1) = 0$

Det visar att $u(x) = x(1-x)$ löser (2) exakt.

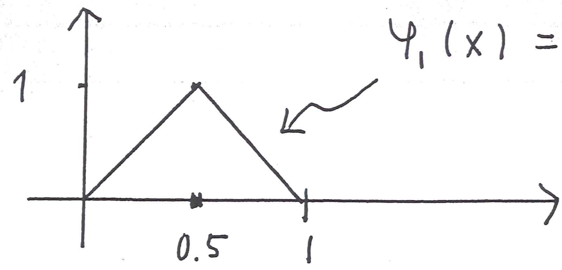
(e) Med två delintervall och homogena randdata får vi bara ett element att integrera.

$$S = S_{11} = \int_0^1 \varphi_1'^2(x)\,dx$$

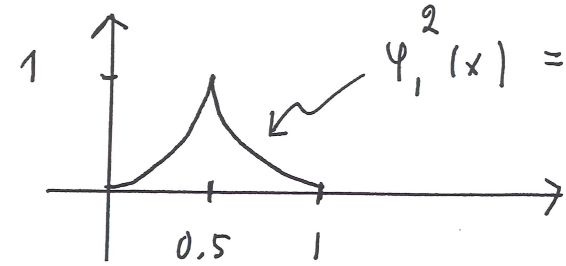
$$M = M_{11} = \int_0^1 \varphi_1^2(x)\,dx$$

$$b = b_1 = \int_0^1 f(x)\varphi_1(x)\,dx$$

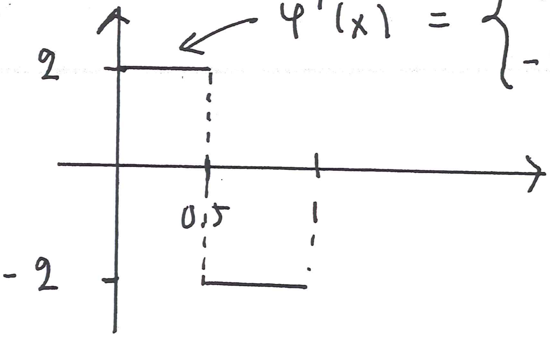
(e) forts.



$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2-2x, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



$$\varphi_1^2(x) = \begin{cases} 4x^2, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ (2-2x)^2, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



$$\varphi'(x) = \begin{cases} 2, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -2, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Vi har integralerna

$$M_1 = \int_0^1 \varphi_1^2(x)\,dx \underset{\text{symmetri}}{=} 2\int_0^{0.5} 4x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$S_1 = \int_0^1 (\varphi_1'(x))^2\,dx = \int_0^1 4\,dx = 4$$

$$b_1 = \int_0^1 f(x)\varphi_1(x)\,dx = \int_0^{0.5} (x-x^2+2)2x\,dx + \int_{0.5}^1 (x-x^2+2)(2-2x)$$

$$= \text{räkna för hand} = \frac{53}{48}$$

Anm: Att räkna ut b_1 för hand är en nyttig övning i bråkräkning. Ni kan dessutom testa om jag räknat rätt.

Vi får ekvationen för nodvärdet c_1 som

$$\frac{13}{3} c_1 = \frac{53}{48} \Rightarrow c_1 = \frac{53}{208} \approx 0.2548$$

Exakta värdet är 0.25 för $u(0.5)$ med $u(x) = x(1-x)$.

(f)