MATEMATISKA VETENSKAPER CTH och GU

Skrivning TMA225 Tillämpad Matematik Kf1 1 juni, 2010 V em

Provet består av totalt tre (3) uppgifter. Max poäng: 100 Varje deluppgift ger maximalt 5p. Betygsgränser: 3: 40p, 4: 60p, 5: 75p. Det krävs att lösningarna är välskrivna med ordentliga motiveringar. Slarvigt skrivna lösningar kan ge poängavdrag.

Hjälpmedel: Typgodkänd räknedosa

Telefonvakt: Karin Kraft 0703-088304

1. En reell geometrisk serie är på formen

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$$

där a och r är reella konstanter. Låt oss anta att $a \neq 0$.

(a) För vilka r konvergerar serien? Visa detta. Vad blir summan?

(b) Beräkna summan av serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}.$$

(c) Definiera begreppet potensserie och konvergensradie för en funktion f.

(d) Resonemanget i uppgift (a) kan användas för att visa att funktionen

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

kan utvecklas i en potensserie för $x \in I$, där I är ett intervall i $(-\infty, +\infty)$. Bestäm detta intervall och skriv upp potensserien för derivatan $f'(x)$ på detta intervall.

(e) Låt $f = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, vara en periodisk funktion med period T. Definiera f's Fourierserie och Fourierkoefficienter.

(f) Låt f vara periodisk med period 2π och definierad av $f(t) = \pi - |t|$ för $-\pi \leq t \leq \pi$. Rita upp f på intervallet $-3\pi \leq t \leq 3\pi$.

(g) Beräkna Fourierkoefficienterna a_0, a_1 och b_1 för funktionen f i uppgift (f).

2. Låt $I = [0, 2\pi]$. Låt τ_h vara en uniform indelning av I i fyra delintervall $I_i = [x_i, x_{i+1}]$.,

$i = 1, 2, 3, 4$. Låt V_h vara rummet av kontinuerliga, styckvis linjära funktioner på I, där varje v i V_h är linjär på varje I_i. Låt $u(x) = \cos(x)$ i uppgift (a)-(e).

(a) Rita in u och nodinterpolanten $\pi_h u$ i samma graf och ange $\pi_h u$'s värde i nodpunkterna.

(b) Nodinterpolanten $\pi_h u$ på I_i kan skrivas som

$$\pi_h u(x) = u(x_i)\lambda_i(x) + u(x_{i+1})\lambda_{i+1}.$$

Bestäm $\lambda_1(x)$ och $\lambda_2(x)$ samt $\pi_h u(x)$ på I_1.

(c) Beräkna $\|u - \pi_h u\|_{L^\infty(I_1)}$.

(d) Använd feluppskattningsformeln för att uppskatta $\|u - \pi_h u\|_{L^\infty(I_1)}$.

(e) Beräkna $\|u - \pi_h u\|_{L^2(I_1)}$

(f) Definiera L^2-projektionen $w_h \equiv P_h w$ till en funktion w på V_h.

(g) Visa att $\|w - w_h\|_{L^2(I_1)} \leq \|w - v\|_{L^2(I_1)}$ för alla $v \in V_h$.

(h) Härled ekvationssystemet för beräkning av w_h.

3. Låt $I = [0, 1]$. Låt τ_h vara en uniform indelning av I i två delintervall $I_i = [x_i, x_{i+1}]$., $i = 1, 2$. Låt V_h vara rummet av kontinuerliga, styckvis linjära funktioner på I, där varje v i V_h är linjär på varje I_i med tillägget att $v(0) = v(1) = 0$. Betrakta tvåpunkts randvärdesproblemt

$$(1) \qquad \begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in I, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

(a) Gör en variationsformulering av (1).

(b) Gör en FEM-formulering av (1).

(c) Härled ekvationssystemet för FEM-problemet till (1).

(d) Låt $f(x) = -2$. Lös (1) analytiskt.

(e) Lös FEM-problemet i (c) för hand med $f(x) = -2$. Rita sedan in den analytiska lösningen i (d) och den approximativa i (e) i samma graf.

Svar ○ lösningsskisser TMA225 1/6-2010

1. (a) $|r| < 1$, $S = \dfrac{a}{1-r}$

(b) $S = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{1-1/9} = \dfrac{3}{8}$

(c) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$

konvergensradie R: konvergens för $|x-x_0| < R$

divergens för $|x-x_0| > R$

(d) I ges av $|x| < 1$.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots$$

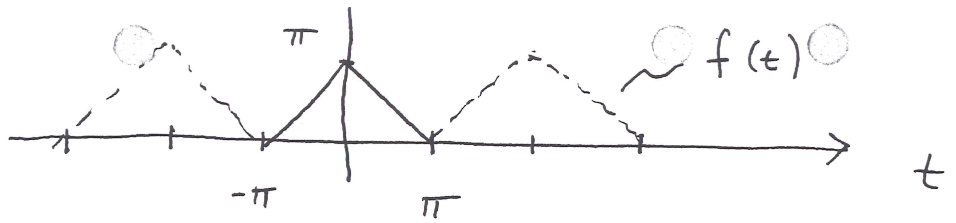
$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$$

(e) $$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega t)\, dt \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega t)\, dt \qquad k = 1, 2, \ldots$$

1 (f)

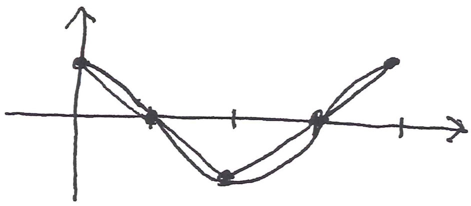


(g) f jämn så $b_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |t|)\, dt = \pi$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |t|) \cos(t)\, dt = \frac{4}{\pi}$$

2 (a)

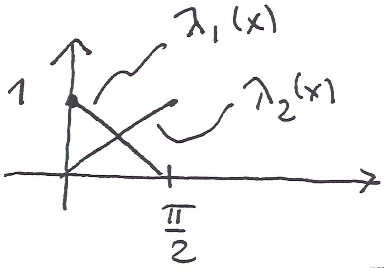


$\Pi_h u(0) = 1$ $\Pi_h u(\frac{3\pi}{2}) = 0$

$\Pi_h u(\frac{\pi}{2}) = 0$ $\Pi_h u(2\pi) = 0$

$\Pi_h u(\pi) = -1$

(b)



$\lambda_1(x) = 1 - \frac{2}{\pi} x$

$\lambda_2(x) = \frac{2}{\pi} x$

$$\Pi_h u(x) = 1 \cdot \left(1 - \frac{2}{\pi} x\right) + 0 \cdot \frac{2}{\pi} x$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi} x$$

(c) Sätt $g(x) = \cos x - \left(1 - \frac{2}{\pi} x\right)$

$$= \cos x - 1 + \frac{2}{\pi} x$$

$$g'(x) = -\sin x + \frac{2}{\pi}$$

$$g' = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{2}{\pi}$$

$x = \arcsin \frac{2}{\pi}$ $\frac{2}{\pi} \in I_1$ max där

2 (c) forts.

$$g\left(\frac{2}{\pi}\right) \approx 0.1765$$

(d) $\|u - \Pi_h u\|_{L^\infty(I_1)} \leq \frac{1}{8} \cdot h^2 \max_{x \in I_1} |u''(x)|$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot 1 \approx 0.3084$$

(e) $\|u - \Pi_h u\|^2_{L^2(I_1)} = \int_0^{\pi/2} \left(\cos(x) - 1 - \frac{2}{\pi}x\right)^2 dx$

$$\approx 0.0358$$

$\|u - \Pi_h u\|_{L^2(I_1)} \approx 0.1891$

(f) $P_h w = w_h$ ges av $(w - w_h, v)_{L^2(I)} = 0 \quad \forall v \in V_h$

(g) $\|w - w_h\|^2_{L^2(I_1)} = (w - w_h, w - w_h) =$

$$= (w - w_h, w - v) + \underbrace{(v - w_h, w - w_h)}_{= 0 \text{ ortogonalitet}}$$

$$\underbrace{\leq}_{\text{Cauchy-Schwarz}} \|w - w_h\|_{L^2(I_1)} \|w - v\|_{L^2(I_1)} \Rightarrow \|w - w_h\|_{L^2(I)} \leq \|w - v\|_{L^2} \quad \forall v \in V_h$$

(h) Sätt $w_h = \sum_{i=1}^{5} \xi_i \varphi_i(x)$, $v = \varphi_j(x)$ $j = 1, \dots, 5$

$$\int_I (w - w_h) v \, dx = 0 \Leftrightarrow \int_I \left(\sum \xi_i \varphi_i\right) \varphi_j \, dx = \int_I w \varphi_j \Leftrightarrow M\xi = b$$

$$M_{ij} = \int \varphi_i \varphi_j \quad b_j = \int w \varphi_j$$

3 (a) Bestäm $u \in H_0^1(I)$:

$$\int_I u'v'\,dx = \int_I fv\,dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

(b) Mesh : $0 \le x_0 < x_1 \dots < x_N = 1$

$V_h \subset H_0^1(\Omega)$. Bestäm $u_h \in V_h$:

$$\int_I u_h'v'\,dx = \int_I fv\,dx \quad \forall v \in V_h$$

(c) Sätt $u_h(x) = \sum \xi_i \varphi_i \qquad v = \varphi_j \qquad$ som 2 (h)

$$S\xi = b \qquad S_{ij} = \int \varphi_i' \varphi_j'\,dx$$

$$b_j = \int f \varphi_j\,dx$$

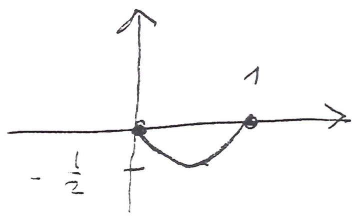
(d) $\begin{cases} -u'' = -2 & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

Integration $\Rightarrow \quad u(x) = x^2 + cx + d$

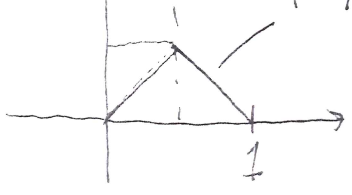
$u(0) = 0 \Rightarrow d = 0$

$u(1) = 0 \Rightarrow c = -1$

$u(x) = x^2 - x$



(e) En nod



VL : $S = \int_0^1 (\varphi')^2\,dx = 4$

$\Rightarrow \quad \xi = -\frac{1}{2}$

$b = \int_0^1 -2\cdot\varphi = -2$