Matematik Chalmers

Tentamen i TMA225 Tillämpad matematik Kf1, 2012–05–29; KL 14:00-18:00

Telefon: David Witt-Nyström: 0703-088304.
Hjälpmedel: Endast Typgodkänd Kalkylator.
Provet består av 5 uppgifter på max 10 poäng var.
Betygsgränser: **3**: 20-29p, **4**: 30-39p och **5**: 40p- För Lösningar och Granskning: Se Hemsidan

---

1. Beräkna styvhetmatris, massmatris och lastvektorn för styckvis linjära finitelement approximationen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -u'' + 3u = 1, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, & \end{cases}$$

på en partition $\mathcal{T}_h : x_0 = 0,\ x_1 = 1/3,\ x_2 = 2/3,\ x_3 = 1, (h = 1/3)$, av intervallet $[0, 1]$.

2. Visa att om $0 < b - a \leq 1$, så är $\|f\|_{L_1(a,b)} \leq \|f\|_{L_2(a,b)} \leq \|f\|_{L_\infty(a,b)}$, där

$$\|f\|_{L_p(a,b)} := \Big(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \Big)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \qquad \|f\|_{L_\infty(a,b)} := \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

3. a) Bestäm en a priori feluppskattning för

$$\begin{cases} -u'' + cu' = f, & 0 < x < 1, \qquad b \geq 0 \\ u(0) = u(1) = 0, & \end{cases}$$

i energinormen $||e||_E = ||e'||$. Där $|| \cdot ||$ är L_2-normen, dvs $||w||^2 = \int_0^1 w(x)^2 \, dx$.
b) För vilka c värden blir felet minimal?

4. Betrakta en-dimensionell värmeledning

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, & t > 0, \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0, & & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & 0 < x < 1. & \end{cases}$$

a) Visa att $\|u(\cdot,t)\|$ och $\|u_x(\cdot,t)\|$ ökar inte med tiden.
b) Visa att $\|u_x(\cdot,t)\| \to 0$, då $t \to \infty$.
c) Ge fysikalisk tolkning av a) och b).
Använd L_2-normen: $\|w(\cdot,t)\| = \Big(\int_0^1 |w(x,t)|^2 \, dx \Big)^{1/2}$, tag $w = u$, $w = u_x$.

5. a) Betrakta differential ekvationen

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in I = (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

a) Beskriv variarionsformuleringen:

$$\text{(VF)}: \qquad \int_I u'v' \, dx = \int_I fv \, dx, \qquad \forall v \in V_0,$$

b) Visa att $(VF) \Longleftrightarrow (MP)$: lösning u som satisfierar i (VF) minimerar energifunktionalen $F(w)$ (dvs $F(u) \leq F(w), \quad \forall w \in V_0$), där

$$\text{(MP)}: \qquad F(w) = \frac{1}{2} \int_I w_x^2 \, dx - \int_I fw \, dx.$$

LYCKA TILL!

MA

---

void

TMA225 Tillämpad matematik Kf1, 2012–05–29; KL 14:00-18:00. Lösningar.

---

1. Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1 = \{v : ||v|| + ||v'|| < \infty,\ v(0) = v(1) = 0\}$ och integrera över $I = [0, 1]$,

$$\int_0^1 u'v'\,dx - [u'(x)v(x)]_0^1 + 3\int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 v\,dx, \qquad \forall v \in H_0^1.$$

Gemon att sätta in randdata får vi variationsformuleringen: Finn $u \in H_0^1$ så att

$$\text{(VF)} \qquad \int_0^1 u'v'\,dx + 3\int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 v\,dx, \qquad \forall v \in H_0^1.$$

Motsvarande finitelementmetoden är:

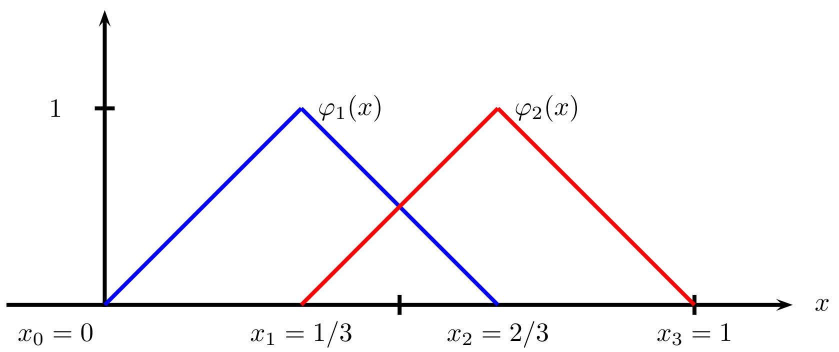
Finn $U \in V_h = \{v : v$ är kontinuerlig styckvis linjär på $\mathcal{T}_h,\ v(0) = v(1) = 0\}$ så att

$$\text{(FEM)} \qquad \int_0^1 U'v'\,dx + 3\int_0^1 Uv\,dx = \int_0^1 v\,dx, \qquad \forall v \in V_h.$$

Vi har att $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ där

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \le x \le 1/3 \\ 2-3x, & 1/3 \le x \le 2/3 \\ 0, & 2/3 \le x \le 1 \end{cases} \qquad \text{och} \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1/3 \\ 3x-1, & 1/3 \le x \le 2/3 \\ 3-3x, & 2/3 \le x \le 1 \end{cases}$$

är båda hela basfunktioner på paritionen $\mathcal{T}_h$, $\xi_1 = U(x_1)$ och $\xi_2 = U(x_2)$.



Vi sätter in $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$, $v = \varphi_1(x)$ och $v = \varphi_2(x)$ i (FEM) och får 2×2 linjär ekvationssystem för ξ_1 och ξ_2 som $M\xi = b$ med

$$M = \left[\begin{pmatrix} \int_0^1 {\varphi_1'}^2 & \int_0^1 \varphi_2'\varphi_1' \\ \int_0^1 \varphi_1'\varphi_2' & \int_0^1 {\varphi_2'}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1\varphi_1 & \int_0^1 \varphi_2\varphi_1 \\ \int_0^1 \varphi_1\varphi_2 & \int_0^1 \varphi_2\varphi_2 \end{pmatrix}\right],$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad b = \begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1 \\ \int_0^1 \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Vi räknar de numeriska värdena för styvhet-, konvektion-, resp. massmatris för φ_1 och φ_2 och får

$$\left[\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 3\frac{h}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix},$$

vilket slutligen ger, med $h = 1/3$, att

$$S(\text{Styvhet}) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad M(\text{Mass}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(\text{Last}) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L_1(a,b)} &= \int_a^b |f(x)|\,bx = \int_a^b 1\cdot|f(x)|\,bx \le \{\text{C-S}\} \le \Big(\int_a^b 1^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_a^b f^2(x)\,dx\Big)^{1/2}\\
&= \sqrt{b-a}\Big(\int_a^b f^2(x)\,dx\Big)^{1/2} = \sqrt{b-a}\|f\|_{L_2(a,b)}\\
&\le \sqrt{b-a}\Big(\int_a^b \max_{x\in[a,b]} f^2(x)\,dx\Big)^{1/2} = \sqrt{b-a}\Big(\int_a^b \max_{x\in[a,b]} |f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}\\
&= \sqrt{b-a}\max_{x\in[a,b]}|f(x)|\cdot\Big(\int_a^b dx\Big)^{1/2} = (b-a)\|f\|_{L_\infty(a,b)}.
\end{aligned}$$

Alltså vi har visat att

$$\|f\|_{L_1(a,b)} \le \sqrt{b-a}\|f\|_{L_2(a,b)} \le (b-a)\|f\|_{L_\infty(a,b)}.$$

Om nu $0 < (b-a) \le 1$ då är $0 < \sqrt{b-a} \le 1$, och därför får vi

$$\|f\|_{L_1(a,b)} \le \|f\|_{L_2(a,b)} \le \|f\|_{L_\infty(a,b)}.$$

3. Vi multiplicerar differentialekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1(I),\ I = (0,1)$ och integrerar över I. Partial integration och randdata leder till följande *variation problem*: Finn $u \in H_0^1(I)$ så att

$$\int_I (u'v' + cu'v) = \int_I fv, \quad \forall v \in H_0^1(I). \tag{1}$$

En finitelement Metod med $cG(1)$ formuleras som: Finn $U \in V_h^0$ så att

$$\int_I (U'v' + cU'v) = \int_I fv, \quad \forall v \in V_h^0 \subset H_0^1(I), \tag{2}$$

där

$$V_h^0 = \{v : v \text{ is piecewise linear and continuous in a partition of } I,\ v(0) = v(1) = 0\}.$$

Låt $e = u - U$, då ger (1)-(2)

$$\int_I (e'v' + ce'v) = 0, \quad \forall v \in V_h^0. \tag{3}$$

A priori feluppskattning: Vi använder oss av $e(0) = e(1) = 0$, och får

$$\int_I e'e = \int_I \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(e^2) = (e^2)|_0^1 = 0. \tag{4}$$

Så kan vi skriva

$$\begin{aligned}
\|e\|_E^2 &= \int_I (e'e') = \int_I (e'e' + ce'e) = \int_I \Big(e'(u-U)' + ce'(u-U)\Big)\\
&= \{v = U - \pi_h u \text{ in}(3)\} = \int_I \Big(e'(u-\pi_h u)' + ce'(u-\pi_h u)\Big)\\
&\le \|(u-\pi_h u)'\|\|e'\| + c\|u-\pi_h u\|\|e'\| = \{\|u-\pi_h u\|_E + c\|u-\pi_h u\|\}\|e\|_E.
\end{aligned}$$

Med Poincare:s olikhet får vi

$$\|e\|_E \le (c+1)\|u-\pi_h u\|_E = (c+1)\|(u-\pi_h u)'\| \le (c+1)\|hu''\|.$$

(b) Vi ser att felet är minst då $c = 0$, dvs om det inte finns någon konvektionsterm.

4. a) Multiply the equation by u, integrate over $(0,1)$. Integrating by parts and using the boundary conditions we have

$$0 = \int_0^1 \dot{u}u\,dx - \int_0^1 u''u\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2\,dx + \int_0^1 \Big(u'\Big)^2\,dx - u'(1,t)u(1,t) + u'(0,t)u(0,t)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u||^2 + ||u'||^2$$

This implies that

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u||^2 = -||u'||^2 \leq 0,$$

with equality only if $u_0 = 0$. Thus u is decreasing.

Multiplying the equation by u'' would yiels

$$0 = \int_0^1 \dot{u}u''\,dx - \int_0^1 (u'')^2\,dx = [\dot{u}u']_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\frac{\partial}{\partial t}(u')^2 + 2(u'')^2\Big)\,dx.$$

Now since $u(0,t) = 0$ we get $\dot{u}(0,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(u(0,t)\Big) = 0$ which together with $u'(1,t) = 0$ gives that

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'||^2 - ||u''||^2 \leq 0,$$

and hence u' is decreasing as well.

b) Time integration of the first equality in a) yields:

$$||u(\cdot,T)||^2 + 2\int_0^T ||u'||^2\,dt = ||u(\cdot,0)||^2 = C.$$

To get a convergent integral as $T \to \infty$ it is necessary to have $||u'||^2 \to 0$.

c) In the absence of a heat source, the temperature and heat flux are decreasing (non-increasing) in time, in particular the heat flux tends to 0 as $T \to \infty$.

5. Se kursboken. Eller mina föreläsningsanteckningar.

MA