Matematik Chalmers

Tentamen i TMA225 Tillämpad matematik Kf1, 2012–08–30; KL 14:00-18:00

Telefon: Dawan Mustafa: 0703-088304.
Hjälpmedel: Endast Typgodkänd Kalkylator.
Provet består av 5 uppgifter på max 10 poäng var.
Betygsgränser: **3**: 20-29p, **4**: 30-39p och **5**: 40p- För Lösningar och Granskning: Se Hemsidan

---

1. Betrakta ekvationen $\dot{u}(t) - u(t) = 0, \quad t > 0; \qquad u(0) = 1.$
Bestäm dess globala Galerkin approximation;

$$U(t) = \sum_{j=0}^{q} \xi_j t^j,$$

då

(a) $q = 1$, (b) $q = 2$.

2. Visa följande linjära interpolationsfeluppskattning för en funktion $f \in C^2(0,1)$,

$$||\pi_1 f - f||_{L_\infty(0,1)} \leq \frac{1}{8} \max_{0\leq\xi\leq 1} |f''(\xi)|.$$

3. Betrakta randvärdesproblemet:

(1) $$-u''(x) = 2, \quad 0 < x < 1, \qquad u'(0) = u'(1) = 1.$$

Låt $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$ och $x_2 = 1$ vara en partition av intervallet $[0,1]$ och V_h, $(h = 1/2)$ motsvarande finitelementrum bestående av styckvis kontinuerliga, linjära funktioner.
(a) Bestäm den exakta lösningen u till ekvation (1).
(b) Beräkna, om möjligt, en approximation $U \in V_h$ av u.

4. Låt $\varepsilon > 0$, $||v||^2 := ||v||^2_{L_2(I)} = \int_0^1 |v(x)|^2 dx$. Betrakta differentialekvationen

$$-\varepsilon u''(x) + xu'(x) = f(x), \quad x \in I := (0,1); \qquad u(0) = u'(1) = 0.$$

Visa följande L_2-stabilitetsolikhet: $\varepsilon^2 ||u''||^2 + \varepsilon ||u'||^2 \leq ||f||^2$.

5. Härled en *a priori* feluppskattning för Poissons' ekvation

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

genom att verifiera att finitelementlösningen; $U \in V_h^0$ är den bästa approximativa lösningen i energinormen. Dvs visa att

$$||(u-U)'|| \leq ||(u-v)'|| \quad \forall v \in V_h^0, \qquad \text{med} \quad ||w|| = \Big(\int_0^1 w^2 \, dx \Big)^{1/2},$$

där

$$V_h^0 := \{\text{styckvis linjära kontinuerliga } v \text{ med } \quad v(0) = v(1) = 0\}.$$

LYCKA TILL!

MA

---

void

TMA225 Tillämpad matematik Kf1, 2012–08–30; KL 14:00-18:00. Lösningar.

---

1. Vi sätter in U i ekvationen (obs $\dot{U}(t) = \sum_{j=1}^{q} j\xi_j t^{j-1}$), multiplicerar resultatet med t^i, $i = 1, \dots, q$ och integrara över $(0,1)$:

$$\sum_{j=1}^{q} \xi_j \int_0^1 \Big(j t^{i+j-1} - t^{i+j} \Big)\, dt = \int_0^1 t^i\, dt, \tag{2}$$

där bidragen från $j = 0$ som svarar mot $\xi_0 = u(0) = 1$ finns på HL. Efter integration får vi

$$\sum_{j=1}^{q} \Big(\frac{j}{j+i} - \frac{1}{j+i+1} \Big) \xi_j = \frac{1}{i+1}, \quad i, j = 1, \dots, q. \Longleftrightarrow A\xi = b, \quad \text{där} \tag{3}$$

$$\begin{cases} a_{ij} = \frac{j}{j+i} - \frac{1}{j+i+1}, & i, j = 1, \dots, q. \\ b_i = \frac{1}{i+1}, & i = 1, \dots, q. \end{cases}$$

$$q = 1: \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{6}\xi_1 = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \xi_1 = 3. \quad \Longrightarrow \quad U(t) = 1 + 3t.$$

$$q = 2: \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{11} \\ \frac{10}{11} \end{bmatrix}.$$

Varför

$$U(t) = 1 + \frac{8}{11}t + \frac{10}{11}t^2.$$

2. Enligt Lagrange interpolationssats har vi att

$$||f - \pi_1 f||_{L_\infty(0,1)} \le \frac{1}{2}(x-0)\cdot(1-x) \max_{x\in[0,1]} |f''|.$$

Vidare gäller att $g(x) = x(1-x)$ har maximum då $g'(x) = 0$, dvs då $1\cdot(1-x) + x\cdot(-1) = 0$, eller för $x = 1/2$. Alltså är $\max_{x\in[0,1]}[x(1-x)] = \max_{x\in[0,1]} g(x) = 1/2(1-1/2) = 1/4$. Därmed

$$||f - \pi_1 f||_{L_\infty(0,1)} \le \frac{1}{8}||f||_{L_\infty(0,1)}.$$

3. (a) Med upprep. integration har vi att:

$$-u''(x) = 2 \Longrightarrow u''(x) = -2 \Longrightarrow u'(x) = -2x + A \Longrightarrow u(x) = -x^2 + Ax + B,$$

där konstanterna A och B bestäms ur rand data:

$$\begin{cases} u'(0) & = -0 + A = 1 \Longrightarrow A = 1 \\ u'(1) & = -2 + A = 1 \Longrightarrow A = 3. \end{cases} \tag{4}$$

Dvs, det ursprungliga problemet saknar lösning.

(b)-(c) Vi använder variationsformulering:

$$\int_0^1 -u'' v\, dx = \int_0^1 2\cdot v\, dx. \tag{5}$$

Partiell integration ger

$$
\begin{aligned}
VL = [PI] &= \Big[-u'v \Big]_0^1 - \int_0^1 -u'v\,dx \\
&- u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v'\,dx \qquad (6)\\
&= -v(1) + v(0) + \int_0^1 u'v'\,dx = 2\int_0^1 v\,dx = HL.
\end{aligned}
$$

Variationsformuleringen blir då: sök $u \in V := \{v : ||v|| + ||v'|| < \infty\}$ så att

$$
\int_0^1 u'v'\,dx = 2\int_0^1 v\,dx - v(0) + v(1), \qquad \text{för alla } v \in V \tag{7}
$$

Här introduceras rummet

$$
V_h = \{\text{alla kontinuerliga styckvis linjära funktioner på } T_h\}
$$

med bas funktionerna:

$$
\varphi_0(x) = \begin{cases} -2x+1, & 0 < x < 1/2, \\ 0, & 1/2 < x < 1, \end{cases} \qquad \varphi_1(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1/2, \\ -2x+2, & 1/2 < x < 1, \end{cases}
$$

och

$$
\varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1/2, \\ 2x-1, & 1/2 < x < 1. \end{cases}
$$

Finitelementmetoden (FEM): sök $U \in V_h$ så att

$$
\int_0^1 U'v'\,dx = 2\int_0^1 v\,dx - v(0) + v(1), \qquad \text{för alla } v \in V_h. \tag{8}
$$

Ansätt $U = \xi_0\varphi_0 + \xi_1\varphi_1 + \xi_2\varphi_2$ då är $U' = \xi_0\varphi_0' + \xi_1\varphi_1' + \xi_2\varphi_2'$ och insättning i (FEM) (8) med $v = \varphi_i,\ i = 0,1,2$ ger

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 (\xi_0\varphi_0' + \xi_1\varphi_1' + \xi_2\varphi_2')\varphi_0'\,dx = 2\int_0^1 \varphi_0\,dx - \varphi_0(0) + \varphi_0(1) \\
&\int_0^1 (\xi_0\varphi_0' + \xi_1\varphi_1' + \xi_2\varphi_2')\varphi_1'\,dx = 2\int_0^1 \varphi_1\,dx - \varphi_1(0) + \varphi_1(1) \qquad (9)\\
&\int_0^1 (\xi_0\varphi_0' + \xi_1\varphi_1' + \xi_2\varphi_2')\varphi_2'\,dx = 2\int_0^1 \varphi_2\,dx - \varphi_2(0) + \varphi_2(1)
\end{aligned}
$$

Styvhetsmatrisen blir (värför? räkna själv!)

$$
A = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.
$$

Det leder till ett linjärt ekvationssystem $A\xi = b$ för den okända vektorn $\xi = (\xi_0,\, xi_1,\, \xi_2)$ med högerled:

$$
b = \begin{pmatrix} 2\int_0^1 \varphi_0\,dx - \varphi_0(0) + \varphi_0(1) = 1/2 - 1 + 0 \\ 2\int_0^1 \varphi_1\,dx - \varphi_1(0) + \varphi_1(1) = 1 - 0 + 0 \\ 2\int_0^1 \varphi_2\,dx - \varphi_2(0) + \varphi_2(1) = 1/2 - 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}.
$$

Observera att A är inte inverterbar. Eftersom det inte finns några exakta lösningar kan man inte heller förvänta sig att den approximativa metoden kan ge några lösningar. Alltså problemet är illa ställd från början.

4. Multiplicera ekvationen med $-\varepsilon u''$ och integrera över $I = (0, 1)$:

$$\int_0^1 (-\varepsilon u'')(-\varepsilon u'')\,dx + \int_0^1 (-\varepsilon u'')xu'\,dx = \int_0^1 (-\varepsilon u'')f\,dx. \tag{10}$$

M.h.a. partial integration får vi att

$$\int_0^1 (-\varepsilon u'')xu'\,dx = \varepsilon\Big(\int_0^1 (xu'u'\,dx - [xu'(x)u'(x)]_0^1\Big) = \varepsilon\Big(\int_0^1 (u')^2\,dx + \int_0^1 xu''u'\,dx\Big),$$

dvs

$$-\varepsilon\int_0^1 xu''u'\,dx = \frac{1}{2}\varepsilon||u'||^2.$$

Insättning i (10) och Cauchy-Schwarz olikhet ger

$$||\varepsilon u''||^2 + \frac{1}{2}\varepsilon||u'||^2 \leq \frac{1}{2}||f||^2 + \frac{1}{2}||\varepsilon u''||^2 \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon^2||u''||^2 + \varepsilon||u'||^2 \leq ||f||^2.$$

5. Se kursboken. Eller mina föreläsningsanteckningar.

MA