Matematik Chalmers

Tentamen i TMA225 Tillämpad matematik Kf1, 2013–01–19; KL 8:30-12:30

Telefon: Magnus Önnheim : 0703-088304.
Hjälpmedel: Endast Typgodkänd Kalkylator.
Provet består av 5 uppgifter på max 10 poäng var.
Betygsgränser: **3**: 20-29p, **4**: 30-39p och **5**: 40p- För Lösningar och Granskning: Se Hemsidan

---

1. Bestäm interpolationsfelet

$$e = \int_0^1 \Big(\pi_1 f(x) - f(x)\Big)\, dx,$$

då $f(x) = x^2$, $0 \le x \le 1$ och $\pi_1 f(x)$ är den styckvis linjära interpolanten av $f(x)$ i partitionen $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, och $x_2 = 1$, av intervallet $[0,1]$.

2. Bestäm styvhetmatris, massmatris och lastvektorn för den styckvis linjära finitelemenapproximationen av randvärdesproblemet,

$$-u'' + u = 4, \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = 0, \quad u'(1) = 3,$$

i partitionen $\mathcal{T}_h : x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1, (h = 1/2)$, av intervallet $[0,1]$.

3. Visa en *a priori* feluppskattning för den styckvis linjära Galerkin approximationen till problemet

$$-u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

i energinormen $||v||_E$ med $||v||_E^2 = ||v||^2_{L_2(I)} + ||v'||^2_{L_2(I)}$.

4. Visa följande variant av Poincare's olikhet:

$$||v||^2 \le v(0)^2 + v(1)^2 + ||v'||^2, \qquad ||w||^2 = \int_0^1 w^2(x)\, dx$$

då v är en kontinuerlig deriverbar funktion på $(0,1)$, t.ex. genom att patialintegrera $\int_0^{1/2} v(x)^2\, dx$ och $\int_{1/2}^1 v(x)^2\, dx$ samt notera att $(x - 1/2)$ har derivatan 1.

5. Låt $V_0 := \{v : \int_I v'^2(x)\, dx < \infty, \quad v(0) = v(1) = 0\}$. Betrakta randvärdesproblemet

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in I := (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

med motsvarande variationsformulering: Finn $u \in V_0$, så att

$$\text{(VF)} \qquad \int_I u'(x) v'(x)\, dv = \int_I f(x) v(x)\, dx, \qquad \forall v \in V_0.$$

Visa att lösningen $u \in V_0$ till (VP) minimerar (energin) funktionalen

$$F(w) = \frac{1}{2}\int_I w'(x)^2\, dv - \int_I f(x) w(x)\, dx, \qquad \forall v \in V_0.$$

LYCKA TILL!

MA

void

TMA225 Tillämpad matematik Kf1, 2013–01–19; KL 8:30-12:30. Lösningar.

---

1. Vi har $\pi_1 f(0) = f(0) = 0$, $\pi_1 f(1/2) = f(1/2) = (1/2)^2 = 1/4$ och $\pi_1 f(1) = f(1) = (1)^2 = 1$. Vi har ochså att $\pi_1 f$ är linjär på båda intervallen $(0, 1/2)$ och $(1/2, 1)$. Värför har vi att

$$\pi_1 f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \le x \le 1/2, \\ \frac{1}{2}(3x-1), & 1/2 \le x \le 1. \end{cases}$$

Vi räknar fram felet

$$\begin{aligned} e &= \int_0^1 \Big(\pi_1 f(x) - f(x)\Big)\, dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{2}x\, dx + \int_{1/2}^1 \frac{1}{2}(3x-1)dx - \int_0^1 x^2\, dx \\ &= \frac{1}{4}[x^2]_0^{1/2} + \frac{1}{12}[(3x-1)^2]_{1/2}^1 - \frac{1}{3}[x^3]_0^1 = \frac{1}{16} + \frac{5}{16} - \frac{1}{3} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

2. Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1 = \{v : ||v|| + ||v'|| < \infty,\ v(0) = 0\}$ och integrera över $I = [0, 1]$,

$$\int_0^1 u'v'\, dx - [u'(x)v(x)]_0^1 + \int_0^1 uv\, dx = 4\int_0^1 v\, dx, \qquad \forall v \in H_0^1.$$

Gemon att sätta in randdata får vi variationsformuleringen: Finn $u \in H_0^1$ så att

$$\text{(VF)} \qquad \int_0^1 u'v'\, dx + \int_0^1 uv\, dx = 4\int_0^1 v\, dx + u'(1)v(1) = 4\int_0^1 v\, dx + 3v(1), \qquad \forall v \in H_0^1.$$

Motsvarande finitelementmetoden är:

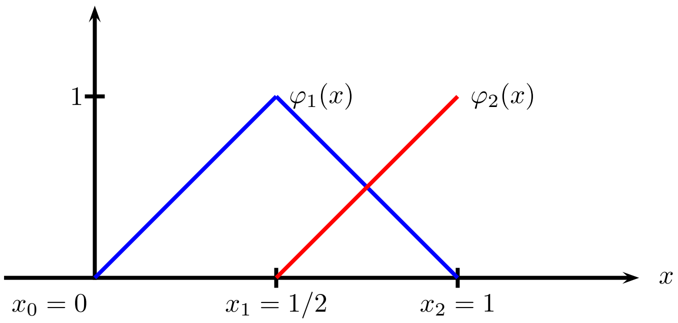
Finn $U \in V_h^0 = \{w : w$ är kontinuerlig styckvis linjär på $\mathcal{T}_h,\ w(0) = 0\}$ så att

$$\text{(FEM)} \qquad \int_0^1 U'v'\, dx + \int_0^1 Uv\, dx = 4\int_0^1 v\, dx + 3v(1), \qquad \forall v \in V_h^0.$$

Vi har att $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ med bass funktioner

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1/2 \\ 2-2x & 1/2 \le x \le 1 \end{cases} \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 1/2 \\ 2x-1 & 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

på paritionen $\mathcal{T}_h$ och $\xi_1 = U(x_1)$ och $\xi_2 = U(x_2)$. Vi sätter in $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ i FEM,



och "testar" mot bas funktioner i V_h^0: $v = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2$. Vi får en 2×2 linjär ekvationssystem för ξ_1 och ξ_2 på formen $A\xi = \mathbf{b}$, med $A = S + M$, där S och M är styvhets- och mass-matriser och $\mathbf{b}$ är lastvektor, dvs

$$A = \left[\begin{pmatrix} \int_0^1 {\varphi_1'}^2 & \int_0^1 \varphi_1'\varphi_2' \\ \int_0^1 \varphi_2'\varphi_1' & \int_0^1 {\varphi_2'}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1\varphi_1 & \int_0^1 \varphi_1\varphi_2 \\ \int_0^1 \varphi_2\varphi_1 & \int_0^1 \varphi_2\varphi_2 \end{pmatrix}\right]$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = 4 \begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1 \\ \int_0^1 \varphi_2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \varphi_1(1) \\ \varphi_2(1) \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vi räknar fram numeriska formen av den slutgiltiga linjära ekvationssystemet för φ_1 och φ_2 och får

$$A = \left[\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

vilket slutligen ger, med $h = 1/2$ att i ekvationen $A\xi = \mathbf{b}$, dvs $(S + M)\xi = \mathbf{b}$ vi har att

$$S = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad M = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

3. Varitionsformuleringen blir (efter partiell integration)

$$(VF) \qquad \int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 fv\,dx, \qquad \forall v \in H_0^1.$$

Låt nu

$$V_h^0 =: \{v : \ v \text{ linjär, styckvis kontinuerlig och } v(0) = v(1) = 0\} \subset H_0^1.$$

Finit element formulering: Finn $U \in V_h^0$ så att

$$(FEM) \qquad \int_0^1 U'v'\,dx + \int_0^1 Uv\,dx = \int_0^1 fv\,dx, \qquad \forall v \in V_h^0.$$

Nu (VF)-(FEM) ger <u>Galerkin ortogonalitet:</u>

$$(G\perp) \qquad \int_0^1 (u-U)'v'\,dx + \int_0^1 (u-U)v\,dx = 0, \qquad \forall v \in V_h^0.$$

Relevant norm för uppskattning av felet $e = u - U$, blir då energinormen:

$$\|e\|_E := \Big(\int_0^1 (e')^2\,dx + \int_0^1 e^2\,dx \Big)^{1/2}.$$

Då har vi med $v \in V_h^0$ att

$$\begin{aligned}
\|e\|_E^2 =& \|(u-U)'\|^2 + \|u-U\|^2 \\
=& \int_0^1 (u-U)'(u-v+v-U)'\,dx + \int_0^1 (u-U)(u-v+v-U)\,dx \\
=& \int_0^1 (u-U)'(u-v)'\,dx + \int_0^1 (u-U)(u-v)\,dx \\
&+ \int_0^1 (u-U)'(v-U)'\,dx + \int_0^1 (u-U)(v-U)\,dx \{\text{denna rad =0 pga } G\perp\} \\
=& \int_0^1 (u-U)'(u-v)'\,dx + \int_0^1 (u-U)(u-v)\,dx \\
\le& \{\text{Cauchy-Schwartz}\} \le \|(u-U)'\|\|(u-v)'\| + \|u-U\|\|u-v\| \\
\le& \frac{1}{2}\|(u-U)'\|^2 + \frac{1}{2}\|(u-v)'\|^2 + \frac{1}{2}\|u-U\|^2 + \frac{1}{2}\|u-v\|^2.
\end{aligned}$$

Alltså

$$\|e\|_E^2 = \|(u-U)'\|^2 + \|u-U\|^2 \le \|(u-v)'\|^2 + \|u-v\|^2, \quad \forall v \in V_h^0.$$

Välj nu $v = \pi_h u$. $\pi_h u$ är den linjära interpolanten av u. Genom att använda feluppskattningar för interpolanten får vi

$$\begin{aligned}
\|e\|_E^2 &\le \|(u-\pi_h u)'\|^2 + \|u-\pi_h u\|^2 \\
&\le C_i^2\|hu''\|^2 + C_i^2\|hu'\|^2 \le \Big(C_i\|hu''\| + C_i\|hu'\| \Big)^2.
\end{aligned}$$

Alltså vi har följande a priori feluppskattning:

$$\|e\|_E \leq C_i\Big(\|hu''\| + \|hu'\|\Big) = \mathcal{O}(h).$$

4. Genom att partial integrera över intervallen $80, 1/2)$ och $(1/2, 1)$, och använda Cauchy-Schwarz, får vi att

$$\begin{aligned}
||v||^2 &= \int_0^1 v(x)^2\,dx = \int_0^{1/2} 1\cdot v(x)^2\,dx + \int_{1/2}^1 1\cdot v(x)^2\,dx \\
&= [(x-1/2)v(x)^2]_0^{1/2} + [(x-1/2)v(x)^2]_{1/2}^1 - \int_0^1 ([(x-1/2)2v(x)v^(x)\,dx \\
&\leq \frac{1}{2}v(0)^2 + \frac{1}{2}v(1)^2 + ||v||||v'|| \leq \{\text{Cauchy-Schwarz}\} \leq \\
&\leq \frac{1}{2}\Big(v(0)^2 + v(1)^2 + ||v'||^2\Big) + \frac{1}{2}||v||^2.
\end{aligned}$$

5. Se kursboken. Eller mina föreläsningsanteckningar.

MA