

## Extrauppgifter, vecka 3

1. Ge exempel på minst en funktion som ligger i  $L^2(0, 1)$  och minst en som inte ligger i  $L^2(0, 1)$ .
2. Samma som 1., fast för  $H^1(0, 1)$ .
3. Samma uppgift för  $H_0^1(0, 1)$ .
4. Visa att  $H^1(0, 1)$  är ett linjärt rum, och att  $H_0^1(0, 1)$  är ett delrum till  $H^1(0, 1)$ .
5. En norm i ett funktionsrum ger ett sätt att beräkna storleken på funktionerna. Sätt  $f(x) = x$  och  $g(x) = 2x^4$ . Beräkna  $\|f\|_{L^1(0,1)}$  och  $\|g\|_{L^1(0,1)}$ , samt  $\|f\|_{L^2(0,1)}$  och  $\|g\|_{L^2(0,1)}$ . Vilken funktion är störst,  $f$  eller  $g$ ?  
(Kom ihåg att  $\|f\|_{L^1(0,1)} = \int_0^1 |f(x)| dx$  och  $\|f\|_{L^2(0,1)} = (\int_0^1 |f(x)|^2 dx)^{1/2}$ )
6. Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -u''(x) = 1, & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

- (a) Beräkna den analytiska lösningen  $u(x)$ .
- (b) Beräkna ortogonala projektionen av  $u$  på underrummet som spänns av funktionerna  $v_1(x) = \sin \pi x$  och  $v_2(x) = \sin 2\pi x$ .