Låt A vara styvhetsmatrisen i en Finita element-formulering på intervallet $[0,1]$, med matriselementen

$$A_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx,$$

där $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N-1}$ är styckvis linjära hattfunktioner på den likformiga indelningen av intervallet $[0,1]$ med steglängd $h = 1/N$.

Följande två satser visar att A är inverterbar.

Sats 1 *Styvhetsmatrisen A är positivt definit.*

Bevis Vi skall visa att $\eta \neq 0 \Rightarrow \eta^T A\eta > 0$ (där $\eta \in \mathbb{R}^{N-1}$). Välj därför ett $\eta \neq 0$. Då gäller att

$$\begin{aligned} \eta^T A\eta &= \sum_{i,j=1}^{N-1} \eta_i A_{ij}\eta_j = \sum_{i,j=1}^{N-1} \int_0^1 \eta_i\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\eta_j dx \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{N-1} \eta_i\varphi_i'(x)\right)\left(\sum_{j=1}^{N-1} \eta_j\varphi_j'(x)\right) dx = \int_0^1 |v'(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

där $v(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \eta_j\varphi_j(x)$. Alltså är $\eta^T A\eta > 0$ om $v' \neq 0$ (där 0 är noll-funktionen, dvs $v'(x) \neq 0$ någonstans på intervallet).

Det räcker därför att visa att $\eta \neq 0 \Rightarrow v' \neq 0$. Antag motsatsen, nämligen att $\eta \neq 0$ och $v' = 0$. Då finns ett k med $\eta_k \neq 0$. Eftersom v är styckvis linjär och $v' = 0$ på intervallet $[x_k, x_{k+1}]$ måste vi då även ha $\eta_{k+1} = v(x_{k+1}) = v(x_k) = \eta_k$. Vidare måste också $\eta_{k+2} = \eta_{k+1} = \eta_k$ o.s.v. till $\eta_{N-1} = \eta_k \neq 0$. På intervallet $[x_{N-1}, x_N]$ är då $v'(x) = \eta_{N-1}\varphi_{N-1}'(x) \neq 0$, vilket motsäger antagandet att $v' = 0$. Alltså gäller att $v' \neq 0$ och satsen är bevisad. ■

Sats 2 *Varje positivt definit matris är inverterbar.*

Bevis Låt $A \in \mathbb{R}^{M\times M}$ vara positivt definit. Vi vet att

$$A \text{ är inverterbar} \Leftrightarrow \text{rang } A = M \Leftrightarrow \dim N(A) = 0 \Leftrightarrow (Ax = 0 \Rightarrow x = 0).$$

Men då A är positivt definit gäller att

$$Ax = 0 \Rightarrow x^T Ax = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Alltså är A inverterbar. ■