TMA226 Matematisk fördjupning, Kf lp4 2013/2014
Peter Kumlin
Mathematics
Chalmers & GU

Lösningsförslag till övningstentan för TMA226

Uppgift 1: Låt $C^2([0,1])$ beteckna det reella vektorrummet av alla reellvärda två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner på intervallet $[0,1]$ med den vanliga punktvisa additionen och multiplikationen med reella tal. Beteckna detta vektorrum V. Bestäm de reella tal a, b för vilka

$$U = \{f \in V : f(0) + af(1) = b\}$$

bildar ett underrum i V.

Lösning: För $f, g \in U$ och $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gäller att $\alpha f + \beta g \in C^2([0,1])$ enligt kända deriveringsregler. Vi noterar att nollelementet $\mathbb{0}$ i V ges av $\mathbb{0}(x) = 0,\ x \in [0,1]$. Eftersom U är ett underrum i V måste $\mathbb{0} \in U$ och alltså gäller

$$0 + a \cdot 0 = b, \text{ dvs } b = 0.$$

För $f, g \in U$ gäller $f(0) + af(1) = 0$ och $g(0) + ag(1) = 0$. Detta medför att

$$\begin{aligned}
&\alpha(f(0) + af(1)) + \beta(g(0) + ag(1)) = 0, \quad \text{dvs} \\
&(\alpha f(0) + \beta g(0)) + a(\alpha f(1) + \beta g(1)) = 0, \quad \text{dvs} \\
&(\alpha f + \beta g)(0) + a(\alpha f + \beta g)(1) = 0
\end{aligned}$$

Slutsats: U är ett underrum i V om och endast om $a \in \mathbb{R}, b = 0$.

Svar: $a \in \mathbb{R}, b = 0$

Uppgift 2: Låt $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ beteckna två godtyckliga vektorer i $\mathbb{R}^n$ och sätt

$$\langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \rangle = \Sigma_{k=1}^n 2^k x_k y_k.$$

Avgör om $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bildar en skalärprodukt för det reella vektorrummet $\mathbb{R}^n$.

Lösning: Vi noterar att $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ och $\mathbb{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. Ska visa att de tre axiomen för skalärprodukt är uppfyllda.
Axiom 1: $\langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (x_1, x_2, \ldots, x_n) \rangle \geq 0$ med likhet om och endast om $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbb{0}$.
För $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gäller

$$\langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (x_1, x_2, \ldots, x_n) \rangle = \Sigma_{k=1}^n 2^k x_k^2 \geq 0$$

med likhet om och endast om $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.
Axiom 2:

$$\langle \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \beta(y_1, y_2, \ldots, y_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n) \rangle =$$

$$= \alpha\langle(x_1, x_2, \ldots, x_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n)\rangle + \beta\langle(y_1, y_2, \ldots, y_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n)\rangle$$

för alla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ och $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$.
Antag att $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ och $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$. Vi har

$$\langle\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \beta(y_1, y_2, \ldots, y_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n)\rangle =$$
$$= \langle(\alpha x_1 + \beta y_1, \ldots, \alpha x_n + \beta y_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n)\rangle =$$
$$= \Sigma_{k=1}^n 2^k(\alpha x_k + \beta y_k)z_k = \Sigma_{k=1}^n(\alpha 2^k x_k z_k + \beta 2^k y_k z_k) =$$
$$= \alpha\Sigma_{k=1}^n 2^k x_k z_k = \beta\Sigma_{k=1}^n 2 y_k z_k =$$
$$= \alpha\langle(x_1, x_2, \ldots, x_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n)\rangle + \beta\langle(y_1, y_2, \ldots, y_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n)\rangle.$$

Axiom 3: $\langle(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)\rangle = \langle(y_1, y_2, \ldots, y_n), (x_1, x_2, \ldots, x_n)\rangle$ för alla $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Antag att $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Då gäller

$$\langle(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)\rangle = \Sigma_{k=1}^n 2^k x_k y_k =$$
$$= \Sigma_{k=1}^n 2^k y_k x_k = \langle(y_1, y_2, \ldots, y_n), (x_1, x_2, \ldots, x_n)\rangle.$$

Svar: $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definierar en skalärprodukt

Uppgift 3: Bestäm en ON-bas för $\mathbb{R}^3$ med skalärprodukten

$$\langle(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3.$$

Bestäm en vektor på formen $(0, 1, a)$ för något reellt tal a som är ortogonal mot $(0, 1, 0)$. Du får utgå ifrån att uttrycket ovan definierar en skalärprodukt!

Lösning: Sätt $\mathbb{v}_1 = (1, 0, 0), \mathbb{v}_2 = (0, 1, 0), \mathbb{v}_3 = (0, 0, 1)$ (t.ex.). Bilda en ON-bas med hjälp av Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod. Notera att

$$\|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2}.$$

Detta ger $\|\mathbb{v}_1\| = 1$. Sätt $\mathbb{e}_1 = \mathbb{v}_1 = (1, 0, 0)$. Vidare sätt

$$\mathbb{u}_2 = \mathbb{v}_2 - \langle\mathbb{v}_2, \mathbb{e}_1\rangle\mathbb{e}_1 = (0, 1, 0).$$

Vi noterar att $\|\mathbb{u}_2\| = \sqrt{2}$. Sätt $\mathbb{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0) = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Sätt

$$\mathbb{u}_3 = \mathbb{v}_3 - \langle\mathbb{v}_3, \mathbb{e}_1\rangle\mathbb{e}_1 - \langle\mathbb{v}_3, \mathbb{e}_2\rangle\mathbb{e}_2 = (0, 0, 1).$$

Vi får $\|\mathbb{u}_3\| = \sqrt{2}$. Sätt $\mathbb{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1) = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. En ON-bas ges av $\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3$. Slutligen gäller att $(0, 1, a)$ är ortogonal mot $(0, 1, 0)$ om och endast om

$$0 + 2 - 0 - a - 0 = 0$$

vilket ger $a = 2$.

Svar: t.ex. $\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3$ och $a = 2$

Uppgift 4: Härled variationsformulering och finita element-formulering, samt beräkna styvhets- och massmatris och högerledsvektor för den styckvis linjära finita element-approximationen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{4}u''(x) - 3u(x) = -1, & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0,1]$ med steglängd $h = 1/3$. Formulera det resulterande linjära ekvationssystemet (lösningen behöver ej beräknas).

Lösning: Variationsformulering: Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1(0,1)$ och integrera över intervallet $[0,1]$. Partialintegration ger

$$-\left[\frac{1}{4}u'(x)v(x)\right]_0^1 + \frac{1}{4}\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - 3\int_0^1 u(x)v(x)dx = -\int_0^1 v(x)dx.$$

Med insättning av randdata $v(0) = v(1) = 0$ fås variationsformuleringen: Hitta $u \in H_0^1(0,1)$ så att

$$\frac{1}{4}\int_0^1 u'(x)v'(x)dx - 3\int_0^1 u(x)v(x)dx = -\int_0^1 v(x)dx, \qquad \forall v \in H_0^1(0,1)$$

Motsvarande finita element-problem är:

Hitta $U \in V_h^0 = \{\varphi : \varphi$ är kontinuerlig och styckvis linjär på $\mathcal{T}_h, \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$ så att

$$\frac{1}{4}\int_0^1 U'(x)\varphi'(x)dx - 3\int_0^1 U(x)\varphi(x)dx = -\int_0^1 \varphi(x)dx, \qquad \forall \varphi \in V_h^0. \quad (1)$$

Vi ansätter $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ där

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 3x, & x \in [0,1/3) \\ 2-3x, & x \in [1/3,2/3) \\ 0, & x \in [2/3,1] \end{cases} \qquad \text{och} \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1/3) \\ 3x-1, & x \in [1/3,2/3) \\ 3-3x, & x \in [2/3,1] \end{cases}$$

är hattfunktionerna svarande mot nodpunkterna $x_j = j/3$, $j = 1,2$.

Vi sätter in $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ i (1) och väljer testfunktioner $\varphi = \varphi_i$, $i = 1,2$. Vi får då ekvationssystemet

$$\left(\frac{1}{4}\begin{bmatrix} \int_0^1(\varphi_1')^2dx & \int_0^1 \varphi_1'\varphi_2'dx \\ \int_0^1 \varphi_2'\varphi_1'dx & \int_0^1(\varphi_2')^2dx \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} \int_0^1(\varphi_1)^2dx & \int_0^1 \varphi_1\varphi_2dx \\ \int_0^1 \varphi_2\varphi_1dx & \int_0^1(\varphi_2)^2dx \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\int_0^1 \varphi_1dx \\ -\int_0^1 \varphi_2dx \end{bmatrix}.$$

Beräkning av matriselementen ger

$$\left(\frac{1}{4h}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{3h}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{bmatrix} = -h\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix},$$

eller, med $h = 1/3$,

$$\begin{bmatrix} 5/6 & -11/12 \\ -11/12 & 5/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

(Lösningen är $\xi_1 = \xi_2 = 4$.)

Uppgift 5: Avgör om följden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ där $a_1 = 2$ och

$$a_{n+1} = \frac{3}{2 + a_n},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

är konvergent, och om så är fallet beräkna dess gränsvärde.

Lösning: Vi noterar att givet $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{3}{2+a_n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ gäller $a_n > 0$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$. En liten kalkyl ger

$$a_1 = 2, a_2 = \frac{3}{4}, a_3 = \frac{12}{11}, a_4 = \frac{33}{34}, a_5 = \frac{102}{101}, \ldots$$

Det verkar gälla att $a_1, a_3, a_5, \ldots$ är en avtagande talföljd (och $a_2, a_4, \ldots$ är en växande talföljd). **Om** vi har visat att $(a_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$ är avtagande gäller att $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1}$ existerar då följden är nedåt begränsad. Gränsvärdet, beteckna det med a, fås då av

$$a \leftarrow a_{2k+1} = \frac{3}{2 + \frac{3}{2+a_{2k-1}}} = \frac{6 + 3a_{2k-1}}{7 + 2a_{2k-1}} \to \frac{6 + 3a}{7 + 2a}, k \to \infty.$$

Vi har $a \geq 0$ och $a = \frac{6+3a}{7+2a}$, dvs $a \geq 0$ och $a^2 + a - 3$. Detta ger $a = 1$. Vi ser vidare att

$$a_{2k} = \frac{3}{2 + a_{2k-1}} \to 1, k \to \infty.$$

Alltså $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergerar med gränsvärdet 1 **om** vi kan visa att $(a_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$ är avtagande.
Steg 1: $a_1 \geq a_3$ sant (trivialt).
Steg 2: Antag att $a_{2k-1} \geq a_{2k+1}$ sant. Ska visa att $a_{2k+1} \geq a_{2k+3}$ sant. Liten kalkyl ger

$$a_{2k+1} - a_{2k+3} = \frac{6 + 3a_{2k-1}}{7 + 2a_{2k-1}} - \frac{6 + 3a_{2k+1}}{7 + 2a_{2k+1}} = \frac{13(a_{2k-1} - a_{2k+1})}{(7 + 2a_{2k-1})(7 + 2a_{2k+1})} \geq 0.$$

Steg 3: Induktionsprincipen ger $a_{2k-1} \geq a_{2k+1}$ för $k = 1, 2, 3, \ldots$ och påståendet visat.

Svar: 1

Uppgift 6: För vilka reella tal x är serien

$$\Sigma_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k k \ln k} x^k$$

absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent?

Lösning: Sätt $a_k = \frac{1}{2^k k \ln k}$, $k = 2, 3, \ldots$
Steg 1: Beräkna konvergensradien R för potensserien
Vi har

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{2} \frac{1}{k^{\frac{1}{k}} (\ln k)^{\frac{1}{k}}} \to \frac{1}{2},\ k \to \infty.$$

Alltså gäller

$$R = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Av detta följer att potensserien är absolutkonvergent för $|x| < 2$ och divergent för $|x| > 2$.
Steg 2: Studera konvergensen för $x = \pm 2$
$x = 2$: $\Sigma_{k=2}^{\infty} a_k 2^k = \Sigma_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ som är en positiv divergent serie eftersom $\Sigma_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$ är konvergent om och endast om $p > 1$.
$x = -2$: $\Sigma_{k=2}^{\infty} a_k (-1)^k = \Sigma_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k \ln k}$ är en alternerande serie som inte är absolutkonvergent enligt ovan. Då $(\frac{1}{k \ln k})_{k=2}^{\infty}$ är en avtagande följd (trivialt) med gränsvärdet 0 (trivialt) ger Leibniz konvergenskriterium att serien konvergerar.
Av detta följer att potensserien är divergent för $x = 2$ och betingat konvergent för $x = -2$.

Svar: absolutkonvergent för $|x| < 2$, betingar konvergent för $x = -2$ och divergent för övrigt

Uppgift 7 och 8: Se kurslitteraturen