TMA226 Matematisk fördjupning, Kf lp4 2013/2014

Peter Kumlin
Mathematics
Chalmers & GU

Lösningsförslag till tentamen för TMA226 den 2/6 2014

Uppgift 1: Låt V beteckna vektorrummet av alla polynom av grad högst 3 på $\mathbb{R}$ med reella koefficienter och med den vanliga punktvisa additionen och multiplikationen med reella tal. Avgör för vilka positiva heltal n som

$$U = \{p \in V : (p(-1))^n = p(1)\}$$

bildar ett underrum i V.

Lösning: För $n = 1$ noterar vi att $p, q \in U$ medför $p(-1) - p(1) = 0$ och $q(-1) - q(1) = 0$. Då gäller för godtyckliga $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ att

$$(\alpha p + \beta q)(-1) - (\alpha p + \beta q)(1) = 0.$$

Alltså gäller $\alpha p + \beta q \in U$ och U är ett underrum i V.

För $n \geq 2$ noterar vi att (t.ex.) polynomet $p(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, tillhör U och uppfyller villkoret $(p(-1))^n - p(1) = 0$. Men då $2^n \neq 2$ gäller

$$((2p)(-1))^n - (2p)(1) = 2^n - 2 \neq 0.$$

Alltså gäller $p \in U$ men $2p \notin U$. U är ej ett underrum i V.

Svar: $n = 1$

Uppgift 2: Låt V vara som i föregående uppgift och låt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ beteckna den avbildning som ges av

$$\langle p, q \rangle = \Sigma_{k=0}^{3}\, p(k)q(k) \quad p, q \in V.$$

Visa att denna avbildning definierar en skalärprodukt på V. Låt vidare W beteckna underrummet i V (med skalärprodukten ovan) bestående av alla polynom av grad högst 1. Bestäm en ON-bas för W. Utgå t.ex. från $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ och använd Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod.

Lösning: Vi noterar att $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ och $\mathbb{0}(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Ska visa att de tre axiomen för skalärprodukt är uppfyllda.
Axiom 1: För $p \in V$ gäller

$$\langle p, p \rangle = \Sigma_{k=0}^{3}(p(k))^2 \geq 0.$$

Vidare har vi $\langle p, p \rangle = 0$ om och endast om $p(0) = p(1) = p(2) = p(3) = 0$. Men ett icke-trivialt polynom av grad högst 3 kan ha högst 3 olika nollställen.

Alltså följer att $\langle p, p\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; p = \mathbb{0}$.
Axiom 2: För $p, q, r \in V$ och $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gäller

$$\langle \alpha p + \beta q, r\rangle = \Sigma_{k=0}^{3}(\alpha p + \beta q)(k)r(k) = \Sigma_{k=0}^{3}(\alpha p(k) + \beta q(k))r(k) =$$

$$= \alpha\Sigma_{k=0}^{3}p(k)r(k) + \beta\Sigma_{k=0}^{3}q(k)r(k) = \alpha\langle p, r\rangle + \beta\langle q, r\rangle.$$

Axiom 3: För $p, q \in V$ gäller

$$\langle p, q\rangle = \Sigma_{k=0}^{3}p(k)q(k) = \Sigma_{k=0}^{3}q(k)p(k) = \langle q, p\rangle.$$

Alltså definierar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en skalärprodukt på V.

W är underrummet i V bestående av alla polynom av grad högst 1. Vi noterar att $p_1(x) = 1$ och $p_2(x) = x$ är linjärt oberoende och spänner W. Observera vidare att

$$\|p\| = \sqrt{\langle p, p\rangle} = \sqrt{(p(0))^2 + (p(1))^2 + (p(2))^2 + (p(3))^2}, \quad p \in V.$$

Sätt

$$\mathbb{e}_1(x) = \frac{1}{\|p_1\|}p_1(x) = \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sätt $\mathbb{u}_2(x) = p_2(x) - \langle p_2, \mathbb{e}_1\rangle\mathbb{e}_1(x) = x - \frac{3}{2}$ och

$$\mathbb{e}_2(x) = \frac{1}{\|\mathbb{u}_2\|}\mathbb{u}_2(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}(x - \frac{3}{2}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Svar: $\mathbb{e}_1(x) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{e}_2(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}(x - \frac{3}{2})$ t.ex.

Uppgift 3: Härled variationsformulering och finita element-formulering, samt beräkna styvhets- och massmatris och högerledsvektor för den styckvis linjära finita element-approximationen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -2u''(x) + \dfrac{1}{2}u(x) = 1, & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0,1]$ med steglängd $h = 1/4$. Formulera det resulterande linjära ekvationssystemet (lösningen behöver ej beräknas). Beräkningen av integralerna i matriserna behöver ej redovisas i detalj om resultatet är känt.

Lösning: Variationsformulering: Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1(0,1)$ och integrera över intervallet $[0,1]$. Partialintegration ger

$$-[2u'(x)v(x)]_0^1 + 2\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 v(x)dx.$$

Med insättning av randdata $v(0) = v(1) = 0$ fås variationsformuleringen:
Hitta $u \in H_0^1(0,1)$ så att

$$2\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 v(x)dx, \qquad \forall v \in H_0^1(0,1)$$

Motsvarande finita element-problem är:

Hitta $U \in V_h^0 = \{\varphi : \varphi$ är kontinuerlig och styckvis linjär på $\mathcal{T}_h, \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$ så att

$$2\int_0^1 U'(x)\varphi'(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 U(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)dx, \qquad \forall \varphi \in V_h^0. \quad (1)$$

Vi ansätter $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x) + \xi_2\varphi_3(x)$ där

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{j-1}), & x \in [x_{j-1}, x_j) \\ \frac{1}{h}(x_j - x), & x \in [x_j, x_{j+1}) \\ 0, & \text{annars} \end{cases}, \qquad j = 1, 2, 3$$

är hattfunktionerna svarande mot nodpunkterna $x_j = j/4$, $j = 1, 2, 3$.

Vi sätter in $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x) + \xi_3\varphi_3(x)$ i (1) och väljer testfunktioner $\varphi = \varphi_i$, $i = 1, 2, 3$. Vi får då ekvationssystemet

$$\left(2A + \frac{1}{2}M\right)\xi = b,$$

där A är styvhetsmatrisen med element $A_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'\varphi_j' dx$, $i, j = 1, 2, 3$, och M är massmatrisen med element $M_{ij} = \int_0^1 \varphi_i\varphi_j dx$, $i, j = 1, 2, 3$. b är högerledsvektorn med element $b_j = \int_0^1 \varphi_j dx$, $j = 1, 2, 3$ och $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ är lösningsvektorn.

Beräkning av matriselementen ger

$$\left(2\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\frac{h}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = h\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

eller, med $h = 1/4$,

$$\begin{bmatrix} 193/12 & -383/48 & 0 \\ -383/48 & 193/12 & -383/48 \\ 0 & -383/48 & 193/12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

(Lösningen är $\xi \approx (0.0458, 0.0610, 0.0458)^T$.)

Svar: –

Uppgift 4: Bestäm för vilka $a > 0$ som den positiva serien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} a^{\ln k}$$

konvergerar.

Lösning: För en serie $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ är ett nödvändigt villkor för konvergens att $a_k \to 0$, $k \to \infty$. Då $\ln k \to \infty$, $k \to \infty$ följer att $a^{\ln k} \not\to 0$, $k \to \infty$ då $a \in [1, \infty)$. Antag nu att $a \in (0, 1)$. Vi noterar att

$$a^{\ln k} = e^{\ln k \ln a} = k^{\ln a}.$$

Då $\Sigma_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ konvergerar om och endast om $p > 1$ gäller att $\Sigma_{k=1}^{\infty}a^{\ln k}$ konvergerar om och endast om $-\ln a > 1$, dvs. $\ln\frac{1}{e} > \ln a$ dvs. $a \in (0, \frac{1}{e})$.

Svar: $a \in (0, \frac{1}{e})$

Uppgift 5: För vilka reella tal x är serien

$$\Sigma_{k=2}^{\infty}\frac{3^k}{k\ln k}x^k$$

absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent?

Lösning: Sätt $a_k = \frac{3^k}{k\ln k}$, $k = 2, 3, \ldots$
Steg 1: Beräkna konvergensradien R för potensserien
Vi har

$$\sqrt[k]{|a_k|} = 3\frac{1}{k^{\frac{1}{k}}(\ln k)^{\frac{1}{k}}} \to 3,\ k \to \infty.$$

Alltså gäller

$$R = \frac{1}{3}.$$

Av detta följer att potensserien är absolutkonvergent för $|x| < \frac{1}{3}$ och divergent för $|x| > \frac{1}{3}$.
Steg 2: Studera konvergensen för $x = \pm\frac{1}{3}$
$x = \frac{1}{3}$: $\Sigma_{k=2}^{\infty}a_k(\frac{1}{3})^k = \Sigma_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$ som är en positiv divergent serie eftersom $\Sigma_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^p}$ är konvergent om och endast om $p > 1$.
$x = -\frac{1}{3}$: $\Sigma_{k=2}^{\infty}a_k(-\frac{1}{3})^k = \Sigma_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k\ln k}$ är en alternerande serie som inte är absolutkonvergent enligt ovan. Då $(\frac{1}{k\ln k})_{k=2}^{\infty}$ är en avtagande följd (trivialt) med gränsvärdet 0 (trivialt) ger Leibniz konvergenskriterium att serien konvergerar.
Av detta följer att potensserien är divergent för $x = \frac{1}{3}$ och betingat konvergent för $x = -\frac{1}{3}$.

Svar: absolutkonvergent för $|x| < \frac{1}{3}$, betingat konvergent för $x = -\frac{1}{3}$ och divergent för övrigt

Uppgift 6: Visa att funktionsserien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}x^k e^{-kx}$$

är likformigt konvergent på $[0, \infty)$.

Lösning: Sätt $f_k(x) = xe^{-kx}$. Vi noterar att

$$0 \leq f_k(x) \leq e^{-k},\ \ x \in [0, \infty)$$

eftersom $\frac{d}{dx}f_k(x) = kx^{k-1}e^{-kx}(1-x)$. Sätt t.ex. $a_k = e^{-k}$. Det gäller att

1. $|f_k(x)| \leq a_k$ för $x \in [0, \infty)$ och $k = 1, 2, 3, \ldots$
2. $\Sigma_{k=1}^{\infty}a_k = \Sigma_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{e})^k$ som konvergerar (konvergent geometrisk serie).

Weierstrass M-sats ger att funftionsserien är likformigt konvergent på $[0, \infty)$.

Svar: –

Uppgift 7: Se sats 3.2 a) i Asadzadeh, eller föreläsningsanteckningarna.

Uppgift 8: Se kurslitteraturen