Matematik Chalmers

Tentamen i TMA226 matematik fordjupning Kf1, 2016–08–22; KL 8:30-12:30

Telefon: Olof Giselsson: ankn 5325
Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, fårutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller rä knedosa.
OBS! Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng.
Udda uppgifter (1, 3, 5, 7) ger 8 poäng var, och jämna uppgifter 7 poäng var: totalt 60 poäng.
Betygsgränser, **3**: 24-35p, **4**: 36-47p och **5**: 48p- Lösningar/Granskning: Se Hemsidan.

---

1. Låt $u \neq 0$ och $v \neq 0$ vara tvåvektorer i ett linjärt rum med skalärprodukt. Antag att följande relation gäller mellan längder av vektorer:

$$||u|| = 2||v|| = \frac{2}{\sqrt{3}}||u - v||.$$

Bestäm vinkeln α mellan u och v och visa att u, v och $u - v$ bildar en rätvinklig triangel.

2. Låt $C^2([0,1])$ beteckna det reella vektorrummet av alla reellvärda två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner på intervallet $[0,1]$ med den vanliga puktvisa addition och multiplikation med reella tal. Beteckna detta vektorrum V. Bestäm de reella tal a, b, c för vilka

$$U = \{f \in V : af(0) + bf(1) = c\}$$

bildar ett underrum i V.

3. Låt $f = f(x)$ och u_1 vara givna data. Betrakta problemet

$$-u'' = f, \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = 0, \;\; u'(1) = u_1.$$

Visa att för lösningen $u = u(x)$ gäller följande L_2-stabilitetsolikhet: $||u'|| \leq ||f|| + |u_1|$.
Tips: Utnyttja att $|u(1)| \leq ||u'||$ och $||u|| \leq ||u'||$, eftersom $u(0) = 0$.

4. Beräkna styvhet- och mass-matris och lastvektor för styckvis linjära finitelement approximationen till randvärdesproblemet

$$-\frac{1}{4}u'' - 3u = -1, \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = 0, \quad u'(1) = -1.$$

på en partition $\mathcal{T}_h : x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$, $(h = 1/2)$, av intervallet $[0,1]$.

5. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/4} (x^n - 1)\sin(nx)\,dx.$$

6. Bestäm konvergenscentrum, konvergensradien och konvergensintervallet för serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+5)^n}{(n^2+1)3^n}.$$

7. Givet vektorrum V med skalärprodukt $< \cdot, \cdot >$ och ett underrum U av V. Visa att om $v \in V$ ges av $z_1 + z_2$ där $z_1 \in U$ och $z_2 \in U^\perp$ så är z_1 och z_2 entydigt bestämda.

8. Givet variationsproblemet: Hitta $u \in H_0^1(0,1)$ så att

$$\text{(VF)} \qquad \int_0^1 a(x)u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \qquad \forall v \in H_0^1(0,1),$$

formulera motsvarande minimeringsproblem (MP) och visa att (VF) $\Longleftrightarrow$ (MP).

LYCKA TILL!

MA

VOID!

TMA226 matematik fordjupning Kf1, 2016–08–22; KL 8:30-12:30. Lösningar.

---

1. vi har att
$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2 < u\,,v >,$$
därför är
$$||u-v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - 2 < u\,,v >,$$
dvs
$$< u\,,v >= \frac{1}{2}||u||^2 + \frac{1}{2}||v||^2 - \frac{1}{2}||u-v||^2.$$
Definitionen av vinkel och de givna relationerna mellan längder ger nu
$$\cos\alpha = \frac{< u\,,v >}{||u||||v||} = \frac{1}{2}\frac{||u||}{||v||} + \frac{1}{2}\frac{||v||}{||u||} - \frac{1}{2}\frac{||u-v||^2}{||u||||v||}$$
$$= \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}) = \frac{1}{2}.$$
Därmed blir vinkeln $\alpha = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.
Kommentarer:Man kan konstatera att vinkelm mellan v och $u-v$ är 90 grader och den mellan u och $u-v$ är 30 grader. Vi har alltså en rättviknlig triangle. Men ett sådant geometriskt resonemang räcker inte för bevis, eftersom uppgiften gäller ett allmänt linjärt rum, men kan användas för kontroll.

2. För $f,\, g \in U$ och α och $\beta \in \mathbb{R}$ gäller att $\alpha f + \beta g \in C^2([0,1])$ enligt kända dervieringsregler. Vi noterar att nollelementet $\oslash$ i V ges av $\oslash(x) = 0,\ x \in [0,\,1]$. Eftersom U är ett underrum i V måste $\oslash \in U$, så att det gäller
$$a\cdot 0 + b\cdot 0 = c, \quad \text{dvs} \quad c = 0.$$
För $f,\, g \in U$ gäller att $af(0) + bf(1) = 0$ och $ag(0) + bg(1) = 0$. Detta ger att
$$\alpha\Big(af(0) + bf(1)\Big) + \beta\Big(ag(0) + bg(1)\Big) = 0, \quad \text{dvs}$$
$$a\Big(\alpha f(0) + \beta g(0)\Big) + b\Big(\alpha f(1) + \beta g(1)\Big) = 0, \quad \text{dvs}$$
$$a(\alpha f + \beta g)(0) + b(\alpha f + \beta g)(1) = 0.$$
Slutsats: U är ett underrum i V om och endast om $a,\, b \in \mathbb{R}$ och $c = 0$.

3. Multiplicera ekvationen $-u'' = f$ med u och integrera över $I = (0,1)$:
$$\int_0^1 fu\,dx = \int_0^1 -u''u\,dx = -u'(x)u(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 u'u'\,dx = -u_1u(1) + \int_0^1 u'u'\,dx, \tag{1}$$
vilket m.h.a. Cauchys olikhet och tipsen ger
$$||u'||^2 = \int_0^1 (u')^2\,dx = \int_0^1 fu\,dx + u_1u(1) \le ||f||\,||u|| + |u_1|\,|u(1)| \le (||f|| + |u_1|)||u'||.$$
Härav följer a).
Randvillkoret $u(0) = 0$ ger $u(x) = \int_0^x u'(y)\,dy$. Speciellt ger $x = 1$ att
$$|u(1)| = \Big|\int_0^1 u'\Big| \le \int_0^1 |u'| \le ||u'||,$$
där vi åter använde Cauchy's olikhet i sista ledet. Detta visar den ena olikheten. På samma sätt erhålls
$$|u(x)| \le \int_0^x |u'| \le \int_0^1 |u'| \le ||u'||.$$

Denna ger

$$||u||^2 = \int_0^1 |u|^2 \le \int_0^1 ||u'||^2 \le ||u'||^2 \int_0^1 dx \le ||u'||^2,$$

vilket ger den andra olikheten.

4. Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1 = \{v : ||v|| + ||v'|| < \infty,\ v(0) = 0\}$ och integrera över $I = [0, 1]$,

$$\frac{1}{4}\int_0^1 u'v'\,dx - \frac{1}{4}[u'(x)v(x)]_0^1 + \int_0^1 u'v\,dx - 3\int_0^1 uv\,dx = -\int_0^1 v\,dx, \qquad \forall v \in H_0^1.$$

Gemon att sätta in randdata för vi variationsformuleringen: Finn $u \in H_0^1$ så att

$$\text{(VF)} \qquad \frac{1}{4}\int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 u'v\,dx - 3\int_0^1 uv\,dx = -\int_0^1 v\,dx - \frac{1}{4}v(1), \qquad \forall v \in H_0^1.$$

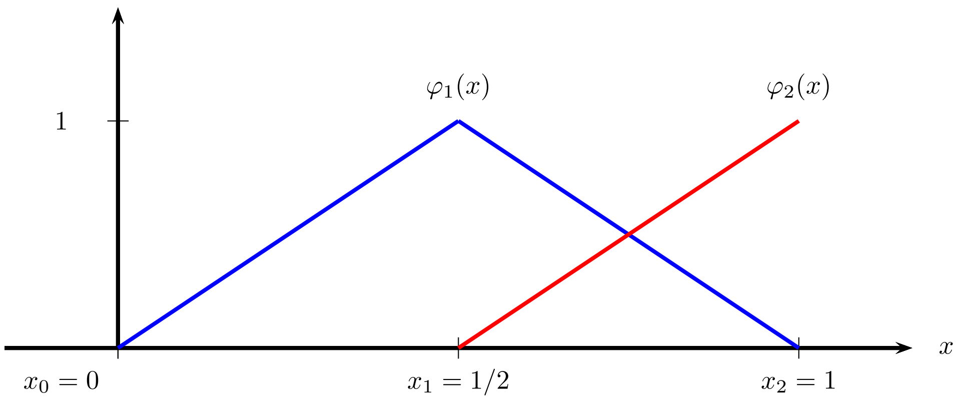
Motsvarande finitelementmetoden är:
Finn $U \in V_h = \{v : v \text{ är kontinuerlig styckvis linjär på} \mathcal{T}_h,\ v(0) = 0\}$ så att

$$\text{(FEM)} \qquad \frac{1}{4}\int_0^1 U'v'\,dx + \int_0^1 U'v\,dx - 3\int_0^1 Uv\,dx = -\int_0^1 v\,dx - \frac{1}{4}v(1), \qquad \forall v \in V_h.$$

Vi har att $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ där

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2 \\ 2 - 2x, & 1/2 \le x \le 1 \end{cases} \qquad \text{och} \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1/2 \\ 2x - 1, & 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

är de hela resp. halva basfunktioner på paritionen $\mathcal{T}_h$, $\xi_1 = U(x_1)$ och $\xi_2 = U(x_2)$. Vi sätter in



$U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$, $v = \varphi_1(x)$ och $v = \varphi_2(x)$ i (FEM) och får 2×2 linjär ekvationssystem för ξ_1 och ξ_2 som $M\xi = b$ med

$$M = \left[\frac{1}{4}\begin{pmatrix} \int_0^1 {\varphi_1'}^2 & \int_0^1 \varphi_2'\varphi_1' \\ \int_0^1 \varphi_1'\varphi_2' & \int_0^1 {\varphi_2'}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1'\varphi_1 & \int_0^1 \varphi_2'\varphi_1 \\ \int_0^1 \varphi_1'\varphi_2 & \int_0^1 \varphi_2'\varphi_2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1\varphi_1 & \int_0^1 \varphi_2\varphi_1 \\ \int_0^1 \varphi_1\varphi_2 & \int_0^1 \varphi_2\varphi_2 \end{pmatrix}\right],$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad b = -\begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1 \\ \int_0^1 \varphi_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} - \begin{pmatrix} \varphi_1(1) \\ \varphi_2(1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Vi räknar de numeriska värdena för styvhet-, konvektion-, resp. massmatris för φ_1 och φ_2 och får

$$\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} - 3h\begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix},$$

vilket slutligen ger, med $h = 1/2$, att

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -5/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \xi_2 = 2, \quad \xi_1 = 6/5.$$

$$U(x) = \frac{6}{5}\varphi_1(x) + 2\varphi_2(x) = \begin{cases} \frac{12}{5}x, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5}(8x+2) & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

5. Vi noterar att

$$\int_0^{\pi/4} \sin(nx)\,dx = [-\frac{1}{n}\cos(nx)]_0^{\pi/4} = -\frac{1}{n}\Big(1 - \cos(\frac{n\pi}{4})\Big) \to 0, \qquad n \to 0.$$

Dessutom observerar vi att

$$x^n \sin(nx) \to 0 \qquad \text{likformig} \quad [0, \frac{\pi}{4}],$$

vilker vi ska visa nedan. Eftersom konvergensen är likformig på integrationsintervallet kan vi göra en gränsövergång under integraltecknet. Detta ger

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/4} x^n \sin(nx)\,dx = 0$$

och följdaktligen får vi

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/4} (x^n - 1)\sin(nx)\,dx = \lim_{n\to\infty} \Big(\int_0^{\pi/4} x^n \sin(nx)\,dx - \int_0^{\pi/4} \sin(nx)\,dx \Big) = 0.$$

Det återstår att visa den likformiga konvergensen på $[0,\, \pi/4]$. Fixera godtyckligt $\varepsilon > 0$. Det gäller att

$$|x^n \sin(nx) - 0| \le (\pi/4)^n \to 0 \quad \text{för} \quad x \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

Eftersom $\frac{\pi}{4} < 1$ gäller att $(\pi/4)^n \to 0$ då $n \to \infty$ och det finns N (oberoende av x) sådant att

$$n \ge M \Longrightarrow |x^n \sin(nx) - 0| < \varepsilon \quad \text{fö alla} \quad x \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

Likformiga konvergensen på $[0, \frac{\pi}{4}]$ är därmed bevisad.

6. Serien kan skrivas om som

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{2}{3}\Big)^n \frac{1}{n^2+1} \Big(x + \frac{5}{2}\Big)^n.$$

Dormed är konvergenscentrum $x = -5/2$. Konvergensradien ges av

$$\frac{1}{R} = L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n+1} \frac{1}{(n+1)^2+1}}{\Big(\frac{2}{3}\Big)^n \frac{1}{n^2+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = \frac{2}{3}.$$

Alltså är $R = 3/2$. Serien är absolutkonvergent i intervallet $(-5/2 - 3/2 \; -5/2 + 3/2) = (-4, -1)$ och divergent på $(-\infty,\, -4)$ och $(-1, \infty)$. På $x = 1$ är serien $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(n^2+1)$ och på $x = -4$ den är $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n/(n^2+1)$. Båda dessa serier är absolutkonvergenta. Alltså konvergensintervallet är $[-4, -1]$.

MA