MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen i Matematisk fördjupning för Kf, TMA226, 2014-08-29, TID(8.30-12.30)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Elin Solberg, 0703-088304

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS:	Ange linje samt personnummer och namn på omslaget. Ange kod på *varje* inlämnat blad. Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

1. Låt V beteckna vektorrummet av alla reellvärda kontinuerliga funktioner på intervallet $[-1, 1]$ med den vanliga punktvisa additionen och multiplikationen med reella tal. Bestäm alla postiva heltal n och reella tal m för vilka

$$U = \{f \in V : (f(0))^n = m\}$$

bildar ett underrum i V.

(5p)

2. Visa att $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$ är en skalärprodukt på $\mathbb{R}^2$. Bestäm en ON-bas för $\mathbb{R}^2$ med denna skalärprodukt.

(9p)

3. Härled variationsformulering och finita element-formulering, samt beräkna styvhets- och konvektionsmatris och högerledsvektor för den styckvis linjära finita element-approximationen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -u''(x) + 3u'(x) = 2, & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0, 1]$ med steglängd $h = 1/4$. Formulera det resulterande linjära ekvationssystemet (lösningen behöver ej beräknas). Beräkningen av integralerna i matriserna behöver ej redovisas i detalj om resultatet är känt.

(8p)

4. Är serien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}(1 - \cos\frac{\pi}{k})$$

konvergent eller divergent?

(7p)

5. För vilka reella tal x är serien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!} x^k$$

absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent?

(8p)

6. Visa att funktionsserien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} x e^{-k^2 x}$$

är likformigt konvergent på $[0, \infty)$.

(7p)

7. Betrakta variationsproblemet

$$\text{(VF)} \quad \begin{array}{l} \text{Hitta } u \in H_0^1(0,1) \text{ så att} \\ \displaystyle\int_0^1 a(x)u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(0,1), \end{array}$$

där $a(x)$ och $f(x)$ är givna, kontinuerliga funktioner på $[0, 1]$, och $a(x) > 0$. Formulera motsvarande minimeringsproblem (MP) och visa att (VF) $\Longleftrightarrow$ (MP).

(8p)

8. Formulera och bevisa Leibniz konvergenskriterium.

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK