TMA226 Matematisk fördjupning, Kf lp4 2014/2015

Peter Kumlin
Mathematics
Chalmers & GU

Teorifrågor

Teorifrågorna på den skriftliga tentamen kommer att hämtas från nedanstående lista.

- Definitionen av komplext/reellt vektorrum V
  (GH definition 1.1)

- Definitionen av linjärt oberoende för en ändlig mängd av vektorer $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ samt $\text{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n\}$
  (GH definitionerna 1.8, 1.9 och 1.10)

- Definitionen av bas för ett ändligtdimensionellt vektorrum V samt visa att samtliga baser för V består av lika många vektorer
  (GH definitionerna 1.11 och 1.12 samt satserna 1.4, 1.5 och 1.6)

- Givet en $m \times n$-matris A definiera $N(A)$ (nollrummet för A) och $V(A)$ (värderummet för A) samt visa att de är underrum i $\mathbb{R}^n$ respektive $\mathbb{R}^m$.
  (GH definition 1.4)

- Visa dimensionssatsen, dvs att

  $$\dim N(A) + \dim V(A) = n$$

  där A är en (reell) $m \times n$-matris
  (GH sats 1.10)

- Definitionen av skalärprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ för ett komplext/reellt vektorrum V
  (GH definition 2.1)

- Beskriv Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod, dvs visa att givet linjärt oberoende vektorer $\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_n$ finns en ON-mängd $\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_n$ sådan att

  $$\text{Span}\{\mathbb{v}_1, \ldots, \mathbb{v}_k\} = \text{Span}\{\mathbb{e}_1, \ldots, \mathbb{e}_k\}$$

  gäller för varje $k = 1, 2, \ldots, n$
  (GH sats 2.3)

- Definitionen av ortogonala komplementet $A^\perp$ för en godtycklig delmängd A i ett vektorrum V med skalärprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ samt visa att $A^\perp$ är ett underrum i V
  (GH definition 2.5 och sats 2.5)

- Visa att för varje ändligtdimensionellt delrum U av ett vektorrum V finns för varje $\mathbb{v} \in V$ ett $\mathbb{z} \in U$ sådant att $\mathbb{v} - \mathbb{z} \in U^{\perp}$ samt att visa hur man kan bestämma $\mathbb{z} \in U$ givet $\mathbb{v} \in V$ och en ON-bas för U ($\mathbb{z}$ kallas den ortogonala projektionen av $\mathbb{v}$ på U)
(GH Sats 2.7)

- Givet vektorrum V med skalärprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ och ett underrum U av V, visa att om $\mathbb{v} \in V$ ges av $\mathbb{z}_1 + \mathbb{z}_2$ där $\mathbb{z}_1 \in U$ och $\mathbb{z}_2 \in U^{\perp}$ så är $\mathbb{z}_1, \mathbb{z}_2$ entydigt bestämda
(GH Lemma 2.2)

- Visa att styvhetsmatrisen A är inverterbar genom att först visa att den är positivt definit och sedan att varje positivt definit matris är inverterbar.
(se dina föreläsningsanteckningar)

- Visa att för den linjära interpolanten $\pi_1 f$ av en två gånger deriverbar funktion f på intervallet $[a, b]$ finns en konstant C så att

$$\|\pi_1 f - f\|_{L^\infty(a,b)} \leq C(b-a)^2 \|f''\|_{L^\infty(a,b)}.$$

(A sats 3.2.a med $p = \infty$)

- Givet variationsproblemet

$$\text{(VF)} \quad \begin{array}{l} \text{Hitta } u \in H_0^1(0,1) \text{ så att} \\ \int_0^1 a(x)u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(0,1), \end{array}$$

formulera motsvarande minimeringsproblem (MP) och visa att

$$\text{(VF)} \iff \text{(MP)}.$$

(A sats 4.2)

- Visa sats 4.3 i (A), med $a(x) = 1$
(se även dina föreläsningsanteckningar)

- Integralkriteriet
(ELW kap 18 sats 18.6)

- Rotkriteriet
(ELW kap 18 sats 18.10)

- Leibniz konvergenskriterium
(ELW kap 18 sats 18.13)

- Om potensseriers konvergens
(ELW kap 19 satserna 19.2 och 19.3)

- Weierstrass M-sats
(ELW kap 19 sats 19.9)

- Gränsövergång under integraltecknet vid likformig konvergens
(ELW kap 19 sats 19.10)