MATEMATISK ANALYS MED TILLÄMPNINGAR

av FOLKE ERIKSSON
ERIC LARSSON
GÖSTA WAHDE

DEL 3

Andra upplagan 1996

Grafisk formgivning LENNART JÖRELID
FREDRIK DAVIDSON

INNEHÅLL

16 TAYLORS FORMEL MED TILLÄMPNINGAR

Man tvingas i många fall till approximationer. Vi kommer här att presentera ett lämpligt sätt att approximera deriverbara funktioner med polynom. Sådana polynomapproximationer används bl.a. vid gränsvärdesundersökningar och numeriska beräkningar. De värden på t.ex. de elementära funktionerna, som ges av datorer och tabeller, bestäms just med denna metod.

16.1 Taylors och Maclaurins formler

Kapitlets första och grundläggande sats är en enkel konsekvens av satsen om partiell integration.

SATS 16.1 (OM TAYLORS[1] FORMEL)

Antag att funktionen f har kontinuerlig $(n+1)$:a derivata på ett intervall I, som innehåller punkten a. För varje x i I är då

(1) $$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

d.v.s.[2] $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x)$$

där $$R_{n+1}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

(1) kallas **Taylors formel** och dess högra led sägs vara **taylorutvecklingen** av $f(x)$ kring punkten a med **resttermen** $R_{n+1}(x)$ **av ordningen** $n+1$.
$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ är ett polynom med grad $\le n$. Det kallas funktionens **taylorpolynom av ordningen** n **i punkten** a. Vi observerar att
$P_n(a) = f(a),\ P_n'(a) = f'(a), \ldots,\ P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \ldots, P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$.

EXEMPEL 1. Då $f(x) = \ln x$, är $f'(x) = x^{-1}$, $f''(x) = -x^{-2}$, $f^{(3)}(x) = 2x^{-3}$ och $f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$ på intervallet $]0,\infty[$. Speciellt har vi att $f(2) = \ln 2$, $f'(2) = 1/2$, $f''(2) = -1/4$ och $f^{(3)}(2) = 1/4$.
I fallet $f(x) = \ln x$, $I =]0,\infty[$, $a = 2$ och $n = 3$ är alltså Taylors formel
$$\ln x = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-a)^3 + R_4(x)$$

[1] Brook Taylor, engelsk matematiker 1685-1731.

[2] I detta och liknande fall, där vi använder summatecken, tolkar vi $f^{(0)}(a)$ som $f(a)$ och $(x-a)^0$ som 1 (även då $x = a$).

där $$R_4(x) = \int_2^x \frac{(x-t)^3}{6} f^{(4)}(t)\,dt = -\int_2^x (x-t)^3 t^{-4}\,dt.$$

Bevis för sats 16.1: För godtyckligt fixt x i I är

$$f(x) = f(a) + (f(x) - f(a)) = f(a) + \int_a^x f'(t)\ dt$$

vilket är Taylors formel då $n = 0$. Om $n \geq 1$, kan vi partialintegrera och skriva

$$f(x) = f(a) + \int_a^x 1 \cdot f'(t)\ dt = f(a) + [(t+c)f'(t)]_a^x - \int_a^x (t+c)f''(t)\ dt =$$

$$= f(a) + (x+c)f'(x) - (a+c)f'(a) - \int_a^x (t+c)f''(t)\ dt$$

där c är en godtycklig konstant. För att $f'(x)$ inte skall förekomma i det sista ledet väljer vi $c = -x$ och får

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\ dt.$$

Detta är den angivna formeln då $n = 1$. Om $n \geq 2$, kan vi fortsätta att integrera partiellt, vilket ger

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \left[-\frac{(x-t)^2}{2!}f''(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!}f^{(3)}(t)\ dt =$$

$$= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \left[-\frac{(x-t)^3}{3!}f^{(3)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^3}{3!}f^{(4)}(t)\ dt =$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + R_4(x)$$

o.s.v. så länge integranden är kontinuerlig, d.v.s. åtminstone till dess den sista termen blir

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt = R_{n+1}(x).$$

Detta bevisar Taylors formel. |||

Resttermen $R_{n+1}(x)$ kan också skrivas på följande, mera användbara form. Den kallas då **Lagranges restterm**.

SATS 16.2 (OM LAGRANGES RESTTERM)

Antag att förutsättningarna i sats 16.1 är uppfyllda. För varje $x \neq a$ i I är då resttermen

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

där c är ett lämpligt valt tal mellan a och x, d.v.s. $a < c < x$ resp. $x < c < a$. Talet c, som beror på x, kan skrivas $c = c(x) = a + \theta \cdot (x-a)$, där $0 < \theta < 1$.

$H_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c(x))}{(n+1)!}$ är kontinuerlig på I, med $H_{n+1}(a) = \dfrac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}$.

OBS. 1. Talen c och θ beror på f, x, a och n.

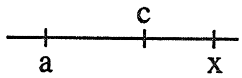
EXEMPEL 2. Enligt sats 16.2 kan resttermen $R_4(x)$ i exempel 1 skrivas $R_4(x) = \frac{1}{4}(x-2)^4 \cdot (2 + \theta \cdot (x-2))^{-4}$. Detta ger att $|R_4(x)| \leq \frac{1}{4}|x-2|^4$ då $x \geq 1$. Speciellt är $|R_4(1)| \leq \frac{1}{4}$.

Bevis för sats 15.2: Funktionerna $f^{(n+1)}(t)$ och $g(t) = (x-t)^n$ är kontinuerliga på I och $g(t)$ byter inte tecken på något av intervallen $[a, x]$ och $[x, a]$. Enligt medelvärdessatsen för integralen av en produkt (sats 10.10 i del 2) finns då till varje tal x i I ett tal c sådant att

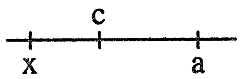
$$R_{n+1}(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt = f^{(n+1)}(c)\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,dt =$$

$$= f^{(n+1)}(c)\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_a^x = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

där c är ett tal mellan a och x, d.v.s. $a < c < x$ resp. $x < c < a$. I figur har vi



resp.



. I båda fallen kan vi skriva $c = a + \theta \cdot (x-a)$ där $0 < \theta < 1$. Vidare är $H_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(a + \theta \cdot (x-a))\dfrac{1}{(n+1)!}$ kontinuerlig på I, eftersom $\lim\limits_{x \to a} H_{n+1}(x) = \dfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a) = H_{n+1}(a)$ och

$$H_{n+1}(x) = \frac{1}{(x-a)^{n+1}}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right) \text{ är kontinuerlig, då } x \neq a. \quad |||$$

Anm. 1. Vi ser att Taylors formel med Lagranges restterm av ordning 1 kan skrivas

$$f(x) - f(a) = R_1(x) = (x-a)f'(c)$$

vilket är formeln i Lagranges medelvärdessats (sats 9.3 i del 2).

Taylors formel brukar mest användas i specialfallet $a = 0$ och kallas då **Maclaurins formel.** Vi presenterar den med Lagranges restterm.

SATS 16.3 (OM MACLAURINS[3] FORMEL)

Antag att funktionen f har kontinuerlig $(n+1)$:a derivata på ett intervall I, som innehåller 0. För varje x i I är då

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

d.v.s. $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad \text{där } 0 < \theta < 1.$$

Funktionen $H_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(\theta x)/(n+1)!$ är kontinuerlig på I.

Om $f'(a) = 0$ och $f''(a) \neq 0$, så avgör som bekant tecknet för $f''(a)$ om a är en maximi- eller minimipunkt till f; se sats 9.8. Denna observation kan generaliseras. Vi har nämligen följande sats.

SATS 16.4 (OM EXTREMVÄRDESUNDERSÖKNING)

Antag att f har kontinuerlig n:te derivata på en omgivning till punkten a och att $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ medan däremot $f^{(n)}(a) \neq 0$. Då har vi att

1°: n jämnt och $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow f$ har strängt maximum i a;
2°: n jämnt och $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f$ har strängt minimum i a;
3°: n udda $\Rightarrow f$ har inte extremvärde i a.

Beviset lämnas som övningsuppgift; se uppg. 1604.

EXEMPEL 3. Undersök om $f(x) = x^3 \ln x + e^{x-1} - x^4/2$ har extremvärde i punkten 1.

Lösning: Vi har att
$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2 + e^{x-1} - 2x^3 \Rightarrow f'(1) = 0$
$f''(x) = 6x \ln x + 5x + e^{x-1} - 6x^2 \Rightarrow f''(1) = 0$
$f^{(3)}(x) = 6 \ln x + 11 + e^{x-1} - 12x \Rightarrow f^{(3)}(1) = 0$
$f^{(4)}(x) = 6/x + e^{x-1} - 12 \Rightarrow f^{(4)}(1) = -5.$ Sats 16.4 ger därmed
Svar: f har ett strängt maximum i punkten 1.

[3] Colin Maclaurin, skotsk matematiker, 1698-1746.

UPPGIFTER

1601. Taylorutveckla x^{-2} kring punkten 3 med restterm av ordningen 4.

1602. Utveckla funktionen $\tan x$ i potenser av $x - \pi/4$ med restterm av ordningen 2. Använd sedan resultatet till att uppskatta $\tan 44°$.

1603. Taylorutveckla $\sin x$ kring punkten $\pi/4$ med restterm av ordningen 4. Uppskatta det fel som maximalt uppstår, om man för $0 \leq x \leq \pi/2$ försummar denna restterm.

1604. Antag att funktionen f har kontinuerlig n:te derivata på en omgivning till punkten a och att $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$, medan däremot $f^{(n)}(a) \neq 0$.

a) Bevisa att på denna omgivning är

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^n}{n!}(f^{(n)}(a) + \varepsilon(x)), \quad \text{där } \varepsilon(x) \to 0 \text{ då } x \to a.$$

b) Bevisa att om n är jämnt, så har f strängt maximum i punkten a om $f^{(n)}(a) < 0$ och strängt minimum om $f^{(n)}(a) > 0$.

c) Bevisa att om n är udda, så har f ej extremvärde i punkten a.

1605. Undersök om punkten 1 är extrempunkt till

a) $f(x) = \sin x^2 - 2\sin x$

b) $f(x) = \cos \ln x - \cos(x-1)$

c) $f(x) = x^2 - e^{x-1} - x \ln x$

d) $f(x) = x^2 \ln x + e^{x-1} - 2x^3/3$

e) $f(x) = 6\sqrt{e}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt + 6x\ln x + x^3 - 3x^2 - 9x.$

16.2 Maclaurins formel för e^x, $\sin x$ och $\cos x$.

A. Då $f(x) = e^x$, är $f^{(k)}(x) = e^x$ och därmed $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ för alla naturliga tal $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$ Maclaurins formel ger därför i detta fall:

> För varje reellt tal x och varje naturligt tal n är
> $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$$
> där θ är ett tal sådant att $0 < \theta < 1$.

För resttermen $R_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$ gäller att $0 \leq R_{n+1}(x) \leq \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x$ då $x \geq 0$, och att $|R_{n+1}(x)| \leq \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ då $x < 0$. Detta gör det möjligt att ange exempelvis talet e med så många decimaler som man önskar.

EXEMPEL 4. Beräkna närmevärdet till e med sex korrekta decimaler.

Lösning: Då $x = 1$ ger formeln ovan att

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta}$$

där resttermen $R_{n+1}(1) = \dfrac{1}{(n+1)!}e^{\theta} < \dfrac{e}{(n+1)!}$. Vi måste ta hänsyn till både resttermsfelet och avrundningsfelen i termerna $1/k!$. Vi behöver först en övre begränsning för e. Av

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}e^{\theta} = \frac{5}{2} + \frac{1}{6}e^{\theta} < \frac{5}{2} + \frac{1}{6}e$$

följer att $\dfrac{5}{6}e < \dfrac{5}{2}$ d.v.s. $e < 3$. Därmed är $R_{n+1}(1) < \dfrac{3}{(n+1)!}$. Vi väljer det minsta heltal n för vilket $3/(n+1)! < 10^{-7}$. Det är $n = 10$.

Vi får då $\quad e = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{10!} + R_{11}(1)$.

I uträkningen till höger är talen avrundade och avrundningsfelet i summan därmed högst $8 \cdot 0.5 \cdot 10^{-7} = 4 \cdot 10^{-7}$. Vidare är $0 < R_{11}(1) < 3/11! < 10^{-7}$, vilket ger att $2.7182815 < e < 2.7182824$. Alltså är 2.718282 det sökta närmevärdet med sex korrekta decimaler.

Svar: 2.718282.

	1
	1
	0.5
	0.1666667
	0.0416667
	0.0083333
	0.0013889
	0.0001984
	0.0000248
	0.0000028
+	0.0000003
	2.7182819

B. Då $f(x) = \sin x$, är $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = = \sin x$ och allmänt $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$ och $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$, varför

$f^{(2k)}(0) = 0$ och $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$. Enligt Maclaurins formel med restterm av ordningen $2n+1$ har vi alltså:

För varje reellt tal x och varje naturligt tal n är

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x, \text{ där } 0 < \theta < 1.$$

Resttermen $R_{2n+1}(x) = (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\theta x$ uppfyller tydligen att

$$|R_{2n+1}(x)| \le \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

EXEMPEL 5. Beräkna $\lim_{x\to 0} \frac{\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$

Lösning: Eftersom $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!}\cos\theta t$, får vi att $\frac{1}{x\sqrt{x}}(\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}) =$
$= \frac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - \frac{(\sqrt{x})^3}{3!} + \frac{(\sqrt{x})^5}{5!}\cos\theta\sqrt{x} - \sqrt{x}\right) = -\frac{1}{3!} + \frac{x}{5!}\cos\theta\sqrt{x} \to -\frac{1}{6}$ då $x \to 0$.

Svar: $-1/6$.

C. Då $f(x) = \cos x$, har vi analogt med resultaten i B att $f^{(2k)}(x) = (-1)^k\cos x$ och $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1}\sin x$ och speciellt $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ och $f^{(2k+1)}(0) = 0$. Detta medför:

För varje reellt tal x och varje naturligt tal n är

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} +$$
$$+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\theta x, \quad \text{där } 0 < \theta < 1.$$

Resttermen är $R_{2n+2}(x) = (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\theta x$ och $|R_{2n+2}(x)| \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

EXEMPEL 6. Beräkna $\int_0^1 f(x)\,dx$ med fem korrekta decimaler, då $f(x) = (\cos x - 1)/x$.

Lösning: Enligt rutan ovan är

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}(\cos x - 1)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+2}(x) - 1\right)dx =$$
$$= \int_0^1 \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k-1}}{(2k)!}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x}R_{2n+2}(x)\,dx$$

där $\frac{1}{x}R_{2n+2}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!}(-1)^{n+1}\cos\theta x$ med $0 < \theta < 1$. Detta medför att

$$\left|\int_0^1 \frac{1}{x}R_{2n+2}(x)\,dx\right| \le \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{(2n+2)!}\,dx = \left[\frac{1}{2n+2}\cdot\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\right]_0^1 = \frac{1}{(2n+2)}\cdot\frac{1}{(2n+2)!}$$

som är $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8!} < 4\cdot 10^{-6}$ då $n = 3$. Eftersom $\frac{1}{x}R_8(x) = \frac{x^7}{8!}\cos\theta x \ge 0$ då $0 \le x \le 1$, är

$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(-\frac{x}{2!}+\frac{x^3}{4!}-\frac{x^5}{6!}\right)\,dx + r = \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4!}-\frac{1}{6}\cdot\frac{x^6}{6!}\right]_0^1 + r =$
$= -\frac{1}{4}+\frac{1}{96}-\frac{1}{4320}+r$ där $0 < r < 4\cdot 10^{-6}$. Med värdena avrundade till sju decimaler får vi $\int_0^1 f(x)\,dx \approx -0.2500000+0.0104167-0.0002315+r =$
$= -0.2398148 + r \approx -0.23981$ där vi vid den sista avkortningen tagit hänsyn till avrundningsfelen.

Svar: -0.23981.

EXEMPEL 7. Det finns en obegränsat många gånger deriverbar funktion $y(x)$, som satisfierar differentialekvationen $y' = \cos 2x - \sin y$ och $y(0) = 0$. Maclaurinutveckla $y(x)$ med restterm $R_4(x)$ av ordningen 4 och ge en uppskattning uppåt av $|R_4(x)|$.

Lösning: Vi har att

$$y' = \cos 2x - \sin y \quad \Rightarrow \quad y'' = -2\sin 2x - y'\cos y \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^{(3)} = -4\cos 2x - y''\cos y + (y')^2 \sin y \Rightarrow$$
$$y^{(4)} = 8\sin 2x - y^{(3)}\cos y + 3y'y''\sin y + (y')^3\cos y.$$

Eftersom $y(0)=0$, är därmed $y'(0)=1$, $y''(0)=-1$ och $y^{(3)}(0)=-3$. Vidare är

$$|y'(x)| \le |\cos 2x| + |\sin y| \le 2,\ |y''(x)| \le 2|\sin 2x| + |y'||\cos y| \le 4$$

och analogt

$$|y^{(3)}(x)| \le 12 \text{ och } |y^{(4)}(x)| \le 52 \text{ för alla } x.$$

Detta ger att

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y^{(3)}(0)}{3!}x^3 + R_4(x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + R_4(x),$$

där vi för något tal θ mellan 0 och 1 kan skriva

$$|R_4(x)| = |\frac{y^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4| = |\frac{y^{(4)}(\theta x)|}{4!}|x|^4 \le \frac{52}{4!}|x|^4 = \frac{13}{6}|x|^4.$$

Svar: $y(x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + R_4(x)$, där $|R_4(x)| \le \frac{13}{6}|x|^4$.

UPPGIFTER

1606. Maclaurinutveckla $\sinh x$ och $\cosh x$.

1607. För små x kan man använda approximationerna

$$\sin x \approx x \quad \text{och} \quad \cos x \approx 1 - x^2/2.$$

Ange med hjälp av Maclaurins formel felen i dessa approximationer. Gör en uppskattning av felens maximala absolutbelopp, då $0 < x < \pi/36$ (vilket motsvarar 5°).

1608. Beräkna ett korrekt avrundat närmevärde med två resp. tre decimaler till integralerna

a) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ b) $\int_0^1 e^{-x^2/2}\,dx$.

1609. Beräkna ett korrekt avrundat närmevärde med tre decimaler till

a) $\sin 1°$ b) $\sin 9°$.

(3.142 är ett korrekt avrundat närmevärde till π.)

1610. Beräkna ett korrekt avrundat närmevärde med tre decimaler till $\cos 63°$. Undersök härvid vilken av taylorutvecklingarna av $\cos x$ kring punkterna 0, $\pi/3$ resp. $\pi/2$ som är effektivast. (Korrekt avrundade närmevärden till π och $\sqrt{3}$ är 3.142 resp. 1.732.)

1611. Bestäm korrekt avrundade närmevärden med tre decimaler till de positiva lösningarna till följande ekvationer. (Använd först maclaurinutveckling för att approximera resp. ekvation med en algebraisk ekvation, som kan lösas. Jämför sedan med hjälp av räknedosa den givna ekvationens bägge led för lämpligt valda x-värden.)

a) $\cos x = 2x^2$ b) $\sin x = x^3$ c) $\sin x = x^5$ d) $\sin x = x^2$.

1612. Lös begynnelsevärdesproblemet

a) $y' = x^2 + y^2,\ y(1) = 2$ b) $y' = \sin x + \arctan y,\ y(\pi/6) = 1$

approximativt genom taylorutveckling. Tag med termer av grad ≤ 3.

1613. a) Bevisa att $|x^n/n!|$ för varje x kan göras godtyckligt litet, om n väljes tillräckligt stort. Ledning: Använd t.ex. att för $n > N > |x|$ gäller $|x^n/n!| < (|x|^N/N!)|x|/n$.

b) Bevisa med hjälp av a) att funktionerna e^x, $\sin x$ och $\cos x$ för varje x kan beräknas godtyckligt noggrant med Maclaurins formel.

1614.* Bevisa att av likheten $e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + e^{\theta}\frac{1}{(n+1)!}$, där $0 < \theta < 1$, följer att $0 < n!e - a_n < \frac{e}{n+1}$, där a_n är ett naturligt tal. Visa sedan att detta medför att e är irrationellt.

(Antag att e är ett rationellt tal p/q. Om vi väljer $n = q$ i olikheten, får vi då en orimlighet.)

16.3 Maclaurinutveckling av $\ln(1+x)$

Vi kan lätt maclaurinutveckla $\ln(1+x)$ genom att beräkna derivatorna och sedan sätta in dem i Maclaurins formel. Resttermen får dock en lämpligare form, om vi går en annan väg. Att det erhållna resultatet är maclaurinutvecklingen av $\ln(1+x)$ följer av entydighetssatsen i nästa avsnitt.

Enligt formeln för geometriska summor är

$$1 - t + t^2 + \ldots + (-t)^{n-1} = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$$

och därmed

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + \ldots + (-t)^{n-1} + \frac{(-t)^n}{1+t}, \text{ då } t \neq -1.$$

Detta medför att

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left[1 - t + \ldots + (-t)^{n-1} + \frac{(-t)^n}{1+t}\right] dt =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\, dt, \text{ när } x > -1$$

Av andra medelvärdessatsen för integraler (sats 11.10 i del 2) följer att

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} t^n\, dt = \frac{1}{1+\theta x}\int_0^x t^n\, dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)}, \text{ där } 0 < \theta < 1.$$

Vi får därför:

För varje reellt tal $x > -1$ och varje naturligt tal n är

(2) $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)}$$

där $0 < \theta < 1$.

Vi ser att resttermen $R_{n+1}(x)$ kan skrivas $(-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)}$ och därmed att

$$\begin{cases} |R_{n+1}(x)| \to \infty & \text{för fixt } x > 1 \text{ då } n \to \infty \text{ ; se sats 6.9} \\ |R_{n+1}(x)| < |x|^{n+1}/(n+1) & \text{då } x > 0 \\ |R_{n+1}(x)| < |x|^{n+1}/[(n+1)(1+x)] & \text{om } -1 < x < 0. \end{cases}$$

Anm. 2. Eftersom $|R_{n+1}(x)| \to \infty$ för fixt $x > 1$ då $n \to \infty$, använder man inte formel (2) för att beräkna $\ln(1+x)$ då $x > 1$. Formeln är inte heller lämplig för beräkning av t.ex. $\ln 2$. Man behöver nämligen välja n stort, om man önskar ett noggrant värde på $\ln 2$. Exempelvis måste man ta $n \geq 999$ för att vara säker på att $|R_{n+1}(1)| < 10^{-3}$. Det finns emellertid effektivare beräkningsformler; en sådan kan härledas på följande sätt. Tag $n = 2k$. (2) ger då att

(3) $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{x^{2k-1}}{2k-1} - \frac{x^{2k}}{2k} + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)(1+\theta x)} \quad \text{när } x > -1.$$

Ersätts x med $-x$ i (3), så följer att

(4) $$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^{2k-1}}{2k-1} - \frac{x^{2k}}{2k} - \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)(1-\theta' x)} \quad \text{då } x < 1,$$

där $0 < \theta' < 1$. Ledvis subtraktion av (3) och (4) medför nu formeln

(5) $\ln \dfrac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{x^{2k-1}}{2k-1}\right) + \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}\left(\dfrac{1}{1+\theta x} + \dfrac{1}{1-\theta' x}\right)$ då $-1 < x < 1$.

Med hjälp av (5) kan man beräkna $\ln y$ för varje $y > 0$. Eftersom $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ är kontinuerlig på $[-1, 1[$, $f(-1) = 0$ och $f(x) \to \infty$ då $x \to 1^-$, så antar nämligen $f(x)$ på $]-1, 1[$ varje positivt värde. Speciellt får man för $x = 1/3$ att

(6) $\ln 2 = \ln \dfrac{1+1/3}{1-1/3} = 2\left(3^{-1} + \dfrac{1}{3} \cdot 3^{-3} + \dfrac{1}{5} \cdot 3^{-5} + \ldots + \dfrac{1}{2k-1} \cdot 3^{-(2k-1)}\right) + R_{2k+1}$,

där $0 < R_{2k+1} < \dfrac{1}{2k+1} \cdot 3^{-(2k+1)} \cdot \dfrac{5}{2}$.

UPPGIFTER

1615. Använd Maclaurins formel med restterm av ordningen $n+1$ på funktionen $\ln(1+x)$ och jämför resultatet med (2).

1616. Beräkna ett korrekt avrundat närmevärde med sex decimaler till $\ln 1.1$.

1617. Vilken uppskattning av $\ln 2$ får vi ur (6) för $k = 4$?

1618. a) Visa att $\ln 2 = \ln 1.024 - 3 \ln 0.8$. Använd detta för att beräkna ett korrekt avrundat närmevärde med 3 decimaler till $\ln 2$, via beräkningar av $\ln 1.024$ och $\ln 0.8$ med lämplig noggrannhet.
b) Uppskatta $\ln 10 = 3 \ln 2 - \ln 0.8$.

16.4 Entydighetssatsen för taylor- och maclaurinutvecklingar

Frågan är nu, om (2) i förra avsnittet 16.3 är maclaurinutvecklingen av $\ln(1+x)$. Svaret ges av följande sats.

SATS 16.5 (ENTYDIGHETSSATSEN FÖR MACLAURINUTVECKLINGAR)

Antag att funktionen f har kontinuerlig $(n+1)$:a derivata på ett intervall I, som innehåller talet 0. Antag vidare att det finns konstanter a_0, a_1, a_2, …, a_{n-1}, a_n så att

(7) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n + S_{n+1}(x)$$

där $S_{n+1}(x)/x^n \to 0$ då $x \to 0$. Då är

$$a_k = f^{(k)}(0)/k! \qquad \text{för } k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

d.v.s. (7) är maclaurinutvecklingen av $f(x)$ med restterm av ordningen $n+1$.

Motsvarande sats gäller för taylorutvecklingar. Vi får den av sats 16.5 med hjälp av variabelsubstitutionen $x - a = t$.

EXEMPEL 8. I formel (2) i avsnitt 16.3 är

$$S_{n+1}(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)}, \quad \text{där } 0 < \theta < 1.$$

Eftersom $S_{n+1}(x)/x^n = (-1)^n \dfrac{x}{(n+1)(1+\theta x)} \to 0$ då $x \to 0$, ger entydighetssatsen att (2) är en maclaurinutveckling av $\ln(1+x)$.

Bevis: Enligt Maclaurins formel är

$$(8) \qquad f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + R_{n+1}(x),$$

där $c_k = f^{(k)}(0)/k!$ och där $R_{n+1}(x)/x^n = x f^{(n+1)}(\theta x)/(n+1)! \to 0$ då $x \to 0$. Ledvis subtraktion av (7) och (8) ger

$$(a_0 - c_0) + (a_1 - c_1)x + \ldots + (a_n - c_n)x^n + \left(\frac{S_{n+1}(x)}{x^n} - \frac{R_{n+1}(x)}{x^n}\right) x^n = 0$$

då $x \in I$ och $x \neq 0$. Låter vi $x \to 0$, får vi $a_0 - c_0 = 0$. Efter division med x har vi därmed att

$$(a_1 - c_1) + \ldots + (a_n - c_n)x^{n-1} + \left(\frac{S_{n+1}(x)}{x^n} - \frac{R_{n+1}(x)}{x^n}\right) x^{n-1} = 0$$

då $x \in I$ och $x \neq 0$. Gränsövergången $x \to 0$ ger här att $a_1 - c_1 = 0$, vilket i sin tur medför att

$$(a_2 - c_2) + \ldots + (a_n - c_n)x^{n-2} + \left(\frac{S_{n+1}(x)}{x^n} - \frac{R_{n+1}(x)}{x^n}\right) x^{n-2} = 0.$$

Fortsätter vi på detta sätt får vi successivt $a_2 - c_2 = 0$, $a_3 - c_3 = 0$, ..., $a_n - c_n = $ $= 0$. |||

UPPGIFTER

1619. Maclaurinutveckla

a) e^{x^2} b) $\cos\sqrt{x}$ c) $\sin\dfrac{x^2}{2}$

d) $\ln\left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)$ e) $e^{x^2/2} + \cos x - 2$.

Låt i samtliga fall resttermens ordning vara 7.

1620. Beräkna för $f(x) = e^{x^2}$

a) $f^{(3)}(0)$ b) $f^{(4)}(0)$

c) $f^{(n)}(0)$ för godtyckligt positivt heltal n.

1621.* Funktionen f definieras på följande sätt: $f(x) = e^{-1/x^2}$ för $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

a) Bevisa att för $x \neq 0$ är $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$, där P_n är ett polynom. (Använd induktion.)

b) Bevisa att för alla n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) är $\lim_{x \to 0+} f^{(n)}(x) = 0$, och motsvarande för vänstergränsvärdet. (Sätt $x = 1/y$.)

c) Bevisa att för alla n är $f^{(n)}(0) = 0$.
(Använd induktion och observera att $f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{f^{(n)}(x)}{x}$.)

Funktionen f har alltså för varje x derivator av alla ordningar. Funktionens intressanta egenskap är att $f^{(n)}(0) = 0$ för alla n trots att $f(x)$ inte är $\equiv 0$ på något intervall som innehåller punkten 0.

1622.* Antag att funktionen g har derivator av alla ordningar på ett intervall innehållande punkten 0 och att f är den i uppgift 1621 beskrivna funktionen. Vad kan sägas om maclaurinutvecklingarna av funktionerna g och $g + f$? (Enligt entydighetssatsen kan en funktion inte ha mer än en utveckling i potenser av x. Däremot kan tydligen två olika funktioner ha samma taylorpolynom P_n för varje n.)

16.5 Maclaurinutveckling av arctan x

Vi kan i princip bestämma maclaurinutvecklingen för $\arctan x$ genom att beräkna derivatorna och sätta in i Maclaurins formel. Men det är mycket lättare att i stället använda samma metod som i avsnitt 16.3.
Formeln för geometriska summor ger oss att

$$1 + (-t^2) + (-t^2)^2 + \ldots + (-t^2)^{n-1} = \frac{1 - (-t^2)^n}{1 - (-t^2)} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}$$

varför

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \ldots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} + \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}.$$

Därmed är

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - \ldots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} + \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}\,dt}{1+t^2}.$$

Enligt medelvärdessatsen för integralen av en produkt (sats 10.10 i del 2) är

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} t^{2n}\,dt = \frac{1}{1+(\theta x)^2} \int_0^x t^{2n}\,dt = \frac{1}{1+(\theta x)^2} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

där $0 < \theta < 1$. Vi får alltså:

För varje reellt tal x och varje naturligt tal n är

(9) $$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{1+(\theta x)^2}$$

där $0 < \theta < 1$.

Entydighetssatsen medför att detta är maclaurinutvecklingen av $\arctan x$ med resttermen $R_{2n+1}(x) = (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \dfrac{1}{1+(\theta x)^2}$. Vi ser att

$$\begin{cases} |R_{2n+1}(x)| \to \infty \text{ då } n \to \infty \text{ om } |x| > 1 \\ |R_{2n+1}(x)| \le \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}. \end{cases}$$

Anm. 3. Då $x = 1$ får vi

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)(1+\theta^2)}$$

där $0 < \theta < 1$. Denna formel är dock inte lämplig för beräkning av π, eftersom det krävs många termer för att få ett noggrant värde; jfr 16.3. Det är bättre att använda (9) på termerna i högerledet av Machins formel $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$; se ex. 9, avsnitt 6.7 i del 1. Exempelvis finner man då lätt att $\pi \approx 3.14159$ med fem korrekta decimaler.

UPPGIFTER

1623. Beräkna $\arctan 0.1$ med 6 korrekta decimaler.

1624. Härled maclaurinutvecklingen av $\arctan x^3 - \arctan\frac{x}{3}$ med restterm av ordningen 11.

1625. Bevisa att för $-1 < x < 1$ är

$$\frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{13}}{13} + R_{17},$$

och bevisa att högra ledet är en maclaurinutveckling av vänstra ledet.

1626. Beräkna π med 5 korrekta decimaler med hjälp av Machins formel (se anm. 3) och (9).

16.6 Maclaurinutveckling av $(1+x)^p$ och arcsin x

A. Låt $f(x) = (1+x)^p$, där p är en godtycklig reell konstant. Då är $f(x)$ definierad när $x > -1$. Vidare är $f'(x) = p(1+x)^{p-1}$, $f''(x) = p(p-1)(1+x)^{p-2}$ och allmänt $f^{(k)}(x) = p(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-k+1)(1+x)^{p-k}$ då $k = 1, 2, 3, \ldots$ Speciellt har vi alltså att

$$f(0) = 1 \text{ och } \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{p(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-k+1)}{k!} \text{ då } k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

För att få en kortare beteckning gör vi följande definition:

DEFINITION (AV $\binom{p}{k}$)

För godtyckliga reella tal p och naturliga tal k definierar vi

$$\binom{p}{0} = 1 \text{ och } \binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-k+1)}{k!} \text{ då } k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

EXEMPEL 9. $\binom{1/2}{3} = \dfrac{1/2\cdot(-1/2)\cdot(-3/2)}{1\cdot2\cdot3} = \dfrac{1}{16}.$

Anm. 4. För naturliga tal p har vi redan i avsnitt 1.10 i del 1 definierat $\binom{p}{k}$ som talet $\dfrac{p!}{k!(p-k)!}$, vilket ju är $= \dfrac{p(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-k+1)}{k!}$.

Enligt Maclaurins formel (sats 16.3) har vi därmed:

För varje reellt tal $x > -1$ och varje naturligt tal n är

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}x^k + \binom{p}{n+1}(1+\theta x)^{p-n-1}x^{n+1} \tag{10}$$

där $0 < \theta < 1$.

Om p är ett positivt heltal och $n = p$, så är $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ och vi får då av (10) samma utveckling av $(1+x)^p$ som binomialsatsen ger; se kap. 1. (1) är alltså en generalisering av denna sats.

EXEMPEL 10. Maclaurinutveckla $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2}$.

Lösning: Här är $p = -1/2$ och

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\cdot\ldots\cdot(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!} = (-1)^k\cdot\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2^k\cdot k!}.$$

För korthets skull skriver vi

$$2k(2k-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2 = (2k)!! \quad\text{och}\quad (2k+1)(2k-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1 = (2k+1)!!$$

som utläses "$2k$-semifakultet" resp. "$(2k+1)$-semifakultet"; se också exempel 12 i avsnitt 10.3 i del 2. Vi har då att

$$\binom{-1/2}{k} = (-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}.$$

När $x > -1$, ger därmed (10) och sats 16.3 att svaret är

$$(11) \qquad (1+x)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k + H_{n+1}(x)x^{n+1},$$

där $H_{n+1}(x) = \dbinom{-1/2}{n+1}(1+\theta x)^{-n-3/2}$ med $0 < \theta < 1$ är kontinuerlig.

B. Om vi i exemplet ovan sätter $x = -t^2$, får vi att

$$(12) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}t^{2k} + H_{n+1}(-t^2)(-t^2)^{n+1}$$

när $-t^2 > -1$, d.v.s. när $-1 < t < 1$.

Då $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, är alltså $\dfrac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} = \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$ och $g^{(2k+1)}(0) = 0$ enligt entydighetssatsen. Om vi skriver $h(t) = \arcsin t$, är $h'(t) = g(t)$ och därmed

$$\frac{h^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{1}{2k+1} \qquad \text{samt} \qquad h^{(2k+2)}(0) = 0.$$

Alltså ger sats 16.3:

> För varje reellt tal x i $]-1,1[$ och varje naturligt tal n är
>
> $$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + H_{2n+3}(x)x^{2n+3},$$
>
> där $H_{2n+3}(x)$ är kontinuerlig på $]-1,1[$.

UPPGIFTER

1627. a) Utveckla funktionen $\sqrt[3]{1+x}$ i potenser av x med restterm av ordningen 3.
b) Beräkna med hjälp av denna utveckling ett korrekt avrundat närmevärde med tre decimaler till $\sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{1.125}$.

1628. a) Bestäm maclaurinutvecklingen med restterm av ordningen n till funktionen $1/(1-x)$, $x < 1$.
b) Det tal c, som förekommer i resttermen, är en funktion av x. Ange denna funktion.

1629. Utveckla funktionen $\sqrt[4]{x}$ i potenser av $x - 16$ med restterm av ordningen 3 och uppskatta sedan $\sqrt[4]{17}$.

1630. Beräkna genom att utveckla funktionen $\sqrt[5]{1+x}$ i potenser av x ett korrekt avrundat närmevärde med fem decimaler till $\sqrt[5]{33}$. (Uppskatta 3:e ordningens restterm uppåt och nedåt.)

1631. Visa att för $0 < x < 1/4$ är

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^3 g(x)\ , \quad \text{där} \quad \frac{1}{30} < g(x) < \frac{1}{16}.$$

1632. Utveckla följande funktioner i potenser av x med restterm av ordningen n; resttermen behöver ej närmare anges:

a) $\sqrt{1-x}$, $n = 5$ b) $\sqrt[4]{1+x}$, $n = 4$
c) $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $n = 7$. (Funktionens derivata är $1/\sqrt{1+x^2}$.)

1633. Beräkna ett korrekt avrundat närmevärde med fyra decimaler till integralen

$$\int_0^{1/2} \sqrt[3]{8 - x^2}\, dx.$$

16.7 Sammanställning av några maclaurinutvecklingar

Vi sammanfattar de härledda maclaurinutvecklingarna och skriver då resttermen $R_{n+1}(x) = H_{n+1}(x)x^{n+1}$. Enligt sats 16.3 är $H_{n+1}(x)$ kontinuerlig på resp. intervall och därmed begränsad på en omgivning av punkten 0.

SATS 16.6 (NÅGRA MACLAURINUTVECKLINGAR)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + H_{n+1}(x)x^{n+1} \qquad \text{för alla } x$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + H_{2n+1}(x)x^{2n+1} \qquad \text{för alla } x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + H_{2n+2}(x)x^{2n+2} \qquad \text{för alla } x$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + H_{n+1}(x)x^{n+1} \qquad \text{då } x > -1$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + H_{2n+1}(x)x^{2n+1} \qquad \text{för alla } x$$

$$(1+x)^p = 1 + px + \binom{p}{2}x^2 + \ldots + \binom{p}{n}x^n + H_{n+1}(x)x^{n+1} \qquad \text{då } x > -1$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{(2n-3)!!x^{2n-1}}{(2n-2)!!(2n-1)} + H_{2n+1}(x)x^{2n+1} \qquad \text{då } |x| < 1$$

där var och en av de olika funktionerna $H_k(x)$ är kontinuerlig på resp. intervall (och därmed begränsad på varje slutet och begränsat delintervall).

16.8 Ytterligare exempel på maclaurinutvecklingar. Stort ordo

Vi skall här med några exempel visa hur man kan (maclaurin)utveckla funktioner som är sammansatta av funktioner med redan kända maclaurinutvecklingar. Vi observerar att om det finns en omgivning till 0, på vilken

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + H_{n+1}(x)x^{n+1}$, $H_{n+1}(x)$ är begränsad och $f^{(n+1)}$ är kontinuerlig, så är detta en maclaurinutveckling av f enligt entydighetssatsen.

EXEMPEL 11. Maclaurinutveckla $e^x \cos x$ med restterm av ordningen 4.

Lösning: Enligt sats 16.6 ovan är

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^4 H_4(x) \qquad \text{och} \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^4 K_4(x),$$

där $H_4(x)$ och $K_4(x)$ är begränsade på någon omgivning I till 0.Om man multiplicerar ihop de båda likheterna ledvis, får man

$$e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{12} + x^4 H_4(x)\cos x + x^4 K_4(x)[e^x - x^4 H_4(x)] =$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{3} + x^4 L_4(x),$$

där $L_4(x)$ är begränsad på I. Detta visar enligt ovan att det sista ledet är maclaurinutvecklingen av funktionen $e^x \cos x$ med restterm av ordningen 4.

Ordosymbolen. För att slippa införa och skriva ut beteckningar för olika resttermer, då man endast behöver känna till deras ordning, brukar man använda den s.k. ordosymbolen $O(x^n)$, som definieras på följande sätt.

DEFINITION (AV $O(x^n)$)

Låt n vara ett naturligt tal. $O(x^n)$ betecknar då en funktion $h(x)$ för vilken det finns ett positivt tal M och en omgivning I till 0 så att $|h(x)| \le M|x^n|$ då $x \in I$. $O(x^n)$ utläses "stort ordo x^n" eller "stort O x^n".

EXEMPEL 12. a) Om $h(x) = x^5 + x^2$, så är exempelvis $h(x) = O(x^2)$, ty $|h(x)| = |x^2(x^3+1)| \le |x^2|(|x^3|+1) \le 2|x^2|$ då $-1 < x < 1$. Däremot är $h(x)$ inte $O(x^3)$, eftersom

$$\left|\frac{h(x)}{x^3}\right| = \left|x^2 + \frac{1}{x}\right| \to \infty \text{ då } x \to 0.$$

b) $\sin x = O(x)$, ty $|\sin x| \le |x|$ för alla x. Däremot är $\sin x$ inte $O(x^2)$, eftersom $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \to \infty$ då $x \to 0$.

c) Resttermen $R_{n+1}(x)$ i en maclaurinutveckling kan enligt sats 16.3 skrivas $R_{n+1}(x) = H_{n+1}(x)x^{n+1}$, där $H_{n+1}(x)$ är begränsad på en omgivning till 0. Alltså är $R_{n+1}(x) = O(x^{n+1})$.

OBS. 2. $O(x^n)$ får på olika ställen i samma kalkyl beteckna olika funktioner. exempelvis är $(1 + \sin x)(2 + \ln(1+x)) = (1 + O(x))(2 + O(x)) = 2 + O(x)$.

Vi uppmärksammar några räkneregler.

SATS 16.7 (RÄKNEREGLER FÖR $O(x^n)$)

1°: Om $h(x) = O(x^n)$, så är även $h(x) = O(x^m)$ då $m < n$.
2°: $O(x^n) \pm O(x^n) = O(x^n)$
3°: Om $m < n$, så är $O(x^m) + O(x^n) = O(x^m)$
4°: $O(x^p)O(x^n) = O(x^{p+n})$; speciellt är $x^p O(x^n) = O(x^{p+n})$
5°: Om $y = O(x^n)$ där $n > 0$, så är $O(y^p) = O(x^{np})$.

OBS. 3. $O(x^n) - O(x^n) = 0$ endast i specialfall, t.ex. är $3x^n - 2x^n \neq 0$.

Bevis: 1° : Vi antar att $h(x) = O(x^n)$, d.v.s. att det finns en konstant M och en omgivning I till 0 så att $|h(x)| \leq M|x^n|$ då $x \in I$. Om $m < n$, är därmed

$$|h(x)| \leq M|x^n| = M|x^{n-m}||x^m| \leq M|x^m| \text{ då } x \in I \text{ och } |x| \leq 1,$$

varför $h(x) = O(x^m)$.

2° : Antag att $h_k(x) = O(x^n)$ för $k = 1,\ 2$. Då finns konstanter M_k och omgivningar I_k till 0 så att

$$|h_1(x) \pm h_2(x)| \leq |h_1(x)| + |h_2(x)| \leq M_1|x^n| + M_2|x^n| = (M_1 + M_2)|x^n|$$

då $x \in I_1$ och $x \in I_2$, d.v.s. då x tillhör omgivningen $I_1 \cap I_2$ till 0. Alltså är $h_1(x) \pm h_2(x) = O(x^n)$.

3° : är en konsekvens av a) och b).

4° : $h_1(x) = O(x^p)$ och $h_2(x) = O(x^n)$ medför att för lämpligt valda konstanter M_k och omgivningar I_k till 0 är

$$|h_1(x) \cdot h_2(x)| = |h_1(x)| \cdot |h_2(x)| \leq M_1|x^p|M_2|x^n| = M_1M_2|x^{p+n}| \text{ då } x \in I_1 \cap I_2,$$

varför $h_1(x) \cdot h_2(x) = O(x^{p+n})$.

5° : Vi antar att $h(y) = O(y^p)$ och att $y(x) = O(x^n)$. Det finns då konstanter M_k och omgivningar I_k till 0, så att $|h(y)| \leq M_1|y^p|$ då $y \in I_1$ och $|y(x)| \leq M_2|x^n|$ då $x \in I_2$. Därmed är $|h(y(x))| \leq M_1|y(x)|^p \leq M_1(M_2|x^n|)^p = M_1(M_2^p)|x^{np}|$ då $y(x) \in I_1$ och $x \in I_2$. Detta är uppfyllt då x tillhör en tillräckligt liten omgivning I_3 till 0. Vi har nämligen att $y(x) \to 0$ då $x \to 0$, eftersom $y(x) = O(x^n)$, där $n > 0$. Alltså är $h(y(x)) = O(x^{np})$. |||

Anm. 5. Ibland använder man i stället symbolen $o(x^n)$, som utläses "litet o x^n" eller "**litet ordo** x^n". Man säger att $h(x) = o(x^n)$ om $h(0) = 0$ och $h(x)/x^n \to 0$ då $x \to 0$. Om $h(x) = O(x^n)$ då $x \to 0$, så är också $h(x) = o(x^{n-1})$. Bevisa detta! Om $h(x) = o(x^{n-1})$ då $x \to 0$, så är däremot **inte** säkert $h(x) = O(x^n)$. Visa detta med ett exempel! För en restterm $R_{n+1}(x)$ i en maclaurinutveckling gäller enligt ovan att den kan skrivas både $R_{n+1}(x) = O(x^{n+1})$ och $R_{n+1}(x) = o(x^n)$ då $x \to 0$.

Maclaurinutvecklingar av en godtycklig **produkt** $f(x)g(x)$ kan som i exempel 11 bestämmas med hjälp av motsvarande utvecklingar av faktorerna $f(x)$ och $g(x)$. Om

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + O(x^{n+1})$$

och

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + O(x^{n+1}),$$

så ger nämligen multiplikation

$$f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \ldots + (a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0)x^k +$$
$$+ \ldots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0)x^n + O(x^{n+1}).$$

Vidare har vi att **maclaurinutvecklingarna av en sammansatt funktion** $f[g(x)]$, där $g(0) = 0$, kan beräknas med hjälp av motsvarande utvecklingar av $f(y)$ och $g(x)$. Om $f(y) = \sum_{k=0}^{n} a_ky^k + O(y^{n+1})$ och $g(x) = \sum_{j=1}^{n} b_jx^j + O(x^{n+1})$, kan vi nämligen beräkna $f[(g(x)]$ med restterm $O(x^{n+1})$. Vi illustrerar med ett exempel.

EXEMPEL 13. Utveckla funktionen $\ln\cos x$ i potenser av x med restterm $R(x) = O(x^8)$.

Lösning: Funktionen kan skrivas $\ln(1 + y)$, där $y = \cos x - 1$. Då $y > -1$ är enligt avsnitt 16.3

$$\ln(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + O(y^4). \tag{13}$$

Om $|x| < \pi/2$, är $y > -1$ och avsnitt 16.2 ger att

$$y = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + O(x^8).$$

Detta medför att $y^2 = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^6}{24} + O(x^8)$ och $y^3 = -\frac{x^6}{8} + O(x^8)$. Eftersom $y = O(x^2)$ är vidare $O(y^4) = O(x^8)$ enligt 5° i sats 15.7. Insättning i (13) ger nu svaret.

Svar: $\ln\cos x = -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^6}{45} + O(x^8)$ då $|x| < \pi/2$.

Jämna och udda funktioner. En funktion $f(x)$, vars definitionsmängd D_f är symmetrisk kring 0, kallas som bekant[4]

jämn om $f(-x) = f(x)$ för alla x i D_f;
udda om $f(-x) = -f(x)$ för alla x i D_f.

Exempelvis är x^{2k} och $\cos x$ jämna, medan x^{2k-1} och $\sin x$ är udda funktioner. Vi observerar

1°: Om $g(x)$ är udda och $g(0)$ är definierad, så är $g(0) = -g(-0) = -g(0)$. Alltså är $2g(0) = 0$ d.v.s. $g(0) = 0$.

2°: Om $g(x)$ är udda och deriverbar, är enligt kedjeregeln
$$g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}(-g(-x)) = -g'(-x)\frac{d}{dx}(-x) = g'(-x),$$
varför $g'(x)$ är jämn. Analogt är $h'(x)$ udda om $h(x)$ är jämn och deriverbar.

[4]se avsnitt 7.7 i del 1

1° och 2° medför att en udda funktions derivator av jämn ordning är udda och därmed 0 i punkten 0. Maclaurinutvecklingen av en udda funktion innehåller därför endast potenser med udda exponenter.—Analogt inses att maclaurinutvecklingen av en jämn funktion bara innehåller potenser med jämna exponenter. Se t.ex. utvecklingarna av $\sin x$ och $\cos x$.

EXEMPEL 14. Utveckla funktionen $\tan x$ i potenser av x med restterm av ordningen 7.

Lösning: Funktionen är udda. Enligt ovan finns därför konstanter c_1, c_3 och c_5 så att

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + O(x^7).$$

Eftersom $\sin x = \cos x \cdot \tan x$, ger maclaurinutvecklingarna av $\sin x$ och $\cos x$ (sid. 18) att

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)\right)(c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + O(x^7)) =$$

$$= c_1 x + \left(c_3 - \frac{c_1}{2}\right) x^3 + \left(c_5 - \frac{c_3}{2} + \frac{c_1}{24}\right) x^5 + O(x^7).$$

Enligt entydighetssatsen för maclaurinutvecklingar (sid. 11) är därför

$$c_1 = 1,\ c_3 - \tfrac{1}{2}c_1 = -\tfrac{1}{6},\ c_5 - \tfrac{1}{2}c_3 + \tfrac{1}{24}c_1 = \tfrac{1}{120},$$

d.v.s. $c_1 = 1$, $c_3 = 1/3$, $c_5 = 2/15$. Således är

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^7) \text{ för } |x| < \pi/2.$$

(Observera, att eftersom $D \ln \cos x = -\tan x$, kan utvecklingen av $\ln \cos x$ erhållas ur utvecklingen av $\tan x$ genom integration från 0 till x; jämför med resultatet i exempel 13, sid. 21.)

Metoden i exempel 14 kan också användas för att allmänt bestämma **maclaurinutvecklingar av en kvot** $f(x)/g(x)$, där $g(0) \neq 0$, då man känner motsvarande utvecklingar av $f(x)$ och $g(x)$.

UPPGIFTER

1634. Visa att för $-\pi/4 \le x \le \pi/4$ är

$$\ln \cos x = -\frac{x^2}{2} - x^4 g(x), \quad \text{där} \quad 1/12 \le g(x) \le 2/3.$$

1635. Utveckla följande funktioner i potenser av x med restterm av angiven ordning n, skriven på formen $O(x^n)$:

a) $\dfrac{5-2x}{6-5x+x^2}$, $n = 3$ b) $e^{-x}\sin x$, $n = 4$ c) $e^{x^2}\cos x$, $n = 8$

d) $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $n=5$ e) $e^{\cos x}$, $n=6$ $(= e\cdot e^y$, där $y=\cos x - 1)$

f) $\sqrt{\cos x}$, $n=6$ g) $\dfrac{x}{\sin x}$, $n=6$

h) $(1+x)^{1/x}$, $n=3$ $(= e\cdot e^y$, där $y = \dfrac{1}{x}\ln(1+x)-1)$.

16.9 Beräkning av gränsvärden med hjälp av Taylors formel.

EXEMPEL 15. Beräkna $\lim\limits_{x\to 0}(\cot^2 x - \dfrac{1}{x^2})$.

Lösning:
$$\cot^2 x - \frac{1}{x^2} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} =$$
$$= \frac{x^2\cos^2 x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{x^2(1-x^2/2+O(x^4))^2 - (x - x^3/6 + O(x^5))^2}{x^2(x+O(x^3))^2} =$$
$$= \frac{x^2(1-x^2+O(x^4)) - (x^2 - x^4/3 + O(x^6))}{x^2(x^2+O(x^4))} = \frac{-2x^4/3 + O(x^6)}{x^4(1+O(x^2))} =$$
$$= \frac{-2/3+O(x^2)}{1+O(x^2)} \to -\frac{2}{3} \text{ då } x\to 0.$$
där vi har använt att $O(x^6) = x^2 O(x^4)$ och $O(x^4) = x^2 O(x^2)$; se sats 16.7.

Observera att funktionen $f(x) = \cot^2 x - 1/x^2$ är differensen mellan två termer, som båda går mot ∞ då $x\to 0$. Efter den första omskrivningen ovan framställs i stället $f(x)$ som en kvot, i vilken både täljaren och nämnaren går mot 0 då $x\to 0$. Man säger i dessa fall kortare, att den betraktade funktionen **får formen $\infty - \infty$ resp. $0/0$, då $x \to 0$.** Vi kommer här också att visa hur man beräknar gränsvärden för funktioner, som på motsvarande sätt **får formen $\infty\cdot 0$, ∞/∞, 0^0, ∞^0 eller 1^∞, då x går mot något tal a.** En sådan funktion $f(x)$ kan ha ett gränsvärde då $x\to a$, men detta kan inte säkert beräknas direkt med våra gränsvärdesregler (se avsnitt 3.4 i del 1; jfr även uppg. 323c i avsnitt 3.5). Det kan däremot i många fall bestämmas med hjälp av Taylors formel, sedan $f(x)$ eller $\ln f(x)$ skrivits om till en funktion, som har formen $0/0$ då $x\to a$.

EXEMPEL 16. Beräkna $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\dfrac{x+1}{x-1}$.

Lösning: Funktionen $x\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ får formen $\infty\cdot 0$ då $x\to\infty$. Substitutionen $x = 1/y$ och formel (5) på sid 11 ger att
$$x\ln\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{y}\ln\frac{1+y}{1-y} = \frac{1}{y}(2y+O(y^3)) = 2+O(y^2).$$
Då $x\to\infty$ går y mot 0 och gränsvärdet är alltså 2.

EXEMPEL 17. Beräkna $\lim_{x\to 1} x^{\tan(\pi x/2)}$.

Lösning: Då $x \to 1$ får funktionen formen 1^∞. Sätt $x = 1 - y$. Man finner

$$\ln x^{\tan(\pi x/2)} = \tan\frac{\pi}{2}x \cdot \ln x = \frac{\sin(\pi x/2)}{\cos(\pi x/2)}\ln x = \frac{\sin(\pi/2 - \pi y/2)}{\cos(\pi/2 - \pi y/2)}\ln(1-y) =$$

$$= \frac{\cos(\pi y/2)}{\sin(\pi y/2)}\ln(1-y) = \frac{\ln(1-y)}{\sin(\pi y/2)}\cos\frac{\pi}{2}y = \frac{-y + O(y^2)}{\pi y/2 + O(y^3)}\cos\frac{\pi}{2}y =$$

$$= \frac{-1 + O(y)}{\pi/2 + O(y^2)}\cos\frac{\pi}{2}y \to \frac{-1}{\pi/2}\cos 0 = -\frac{2}{\pi} \quad \text{då } x \to 1 \text{ och därmed } y \to 0.$$

Alltså har funktionens logaritm gränsvärdet $-2/\pi$ då $x \to 1$. Det sökta gränsvärdet är därför $e^{-2/\pi}$, eftersom e^t är kontinuerlig i punkten $-2/\pi$.

UPPGIFTER

1636. Beräkna gränsvärdena till följande funktioner då $x \to 0$.

a) $\dfrac{1 - e^{x^2/2}\cos x}{x^4}$ b) $\dfrac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 - \tan^2 x}$ c) $\dfrac{1}{x}\left(\coth x - \dfrac{1}{x}\right)$

d) $\dfrac{1}{x^3}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{x}{6} - \dfrac{1}{x}\right)$ e) $\dfrac{\sin(\sin x) - \arctan x}{x^5}$ f) $(\cos x)^{1/x^2}$.

1637. Beräkna följande gränsvärden:

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^x - 1}{x\ln x}$ (sätt $x \ln x = y$)

b) $\lim_{x\to\infty} e^x(\ln(1+e^x) - x)$ c) $\lim_{x\to\infty} e^{x^2 - x/2}(1 + \dfrac{1}{x})^{-x^3}$.

1638. För vilka tal a och b existerar $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1 - ax}{e^x - 1 - bx}$? Beräkna gränsvärdet.

1639. Bestäm talen a och b så, att $\lim_{x\to 0} x^{-3}(\cot x + \dfrac{a}{x} + bx)$ existerar och beräkna gränsvärdet.

1640. Beräkna följande gränsvärden:

a) $\lim_{x\to 0} x^{-3}\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin xt}{t}\,dt - x\right)$ b) $\lim_{x\to 0} x^{-5}\left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt - x + \frac{x^3}{3}\right)$.

1641. Funktionen f är definierad på följande sätt: $f(x) = (1+x)^{1/x}$ för $x \neq 0$, $f(0) = e$. Bevisa att f är deriverbar för $x = 0$ och beräkna $f'(0)$.

16.10 l'Hospitals regel

Beräkningen av det eventuella gränsvärdet av en kvot $f(x)/g(x)$, som får formen $0/0$ eller ∞/∞ då $x \to x_0$, underlättas ibland av följande sats.

SATS 16.8 (l'HOSPITALS REGEL[5])

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{14}$$

gäller om

1°: a) $f(x) \to 0$ och $g(x) \to 0$ då $x \to x_0$
eller
b) $g(x) \to \infty$ eller $-\infty$ då $x \to x_0$;

2°: f' och g' existerar på två intervall $]x_1, x_0[$ och $]x_0, x_2[$ och g' har konstant tecken på vartdera intervallet;

3°: $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existerar.

OBS. 4. Regeln gäller även
α) då $x \to {x_0}^-$ eller $x \to {x_0}^+$, om intervallen i 2° ersätts med **ett** intervall $]x_1, x_0[$ resp. $]x_0, x_2[$;
β) då $x \to \infty$ eller $x \to -\infty$, om intervallen i 2° byts ut mot **ett** intervall $]x_1, \infty[$ resp. $]-\infty, x_2[$.

EXEMPEL 18. Beräkna följande gränsvärden, om de existerar:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$ b) $\lim_{x\to\infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan x)$

c) $\lim_{x\to 0+} x^p \ln x$ med konstant $p > 0$ d) $\lim_{x\to\infty} xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt}{\arctan x}$.

Lösning: a) Låt $f(x) = \ln x$ och $g(x) = x^2 - 1$. Då är förutsättningarna i l'Hospitals regel uppfyllda med $\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{-1}}{2x} = \frac{1}{2}$. Alltså är

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}.$$

b) Vi skriver $x(\frac{\pi}{2} - \arctan x) = \frac{\pi/2-\arctan x}{1/x}$ för $x \neq 0$. Vi kan då använda l'Hospitals regel enligt OBS 4β med $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ och $g(x) = \frac{1}{x}$ och får

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{-2}+1} = 1.$$

[5]Jämför l'Hospitals svaga regel i uppgift 410 i avsnitt 4.3 i del 1.

c) l'Hospitals regel enligt OBS 4α ger oss att
$$\lim_{x\to 0+} x^p \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-p}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-px^{-p-1}} = \lim_{x\to 0+} -\frac{x^p}{p} = 0,$$
vilket har bevisats på annat sätt i del 1.

d) Sätt $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ och $g(t) = \dfrac{e^{x^2}}{x}$. Förutsättningarna i l'Hospitals regel enligt OBS 4β är uppfyllda, där $g(x) \to \infty$ då $x \to \infty$. Vi får
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{2e^{x^2} - e^{x^2}/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2-1/x^2} = \frac{1}{2}.$$

e) Låt $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ och $g(x) = \arctan x$. Då kan vi **inte** använda l'Hospitals regel. Villkoret 1° i regeln är nämligen inte uppfyllt, ty $g(x) \to \pi/2$ då $x \to \infty$. Vi finner att
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{[\arctan t]_1^x}{\arctan x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\arctan x - \arctan 1}{\arctan x} = \frac{\pi/2 - \pi/4}{\pi/2} = \frac{1}{2},$$
medan $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/(1+x^2)}{1/(1+x^2)} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1.$

Svar: a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{2}$.

OBS. 5. Om $f'(x)/g'(x)$ i sats 16.8 får exempelvis formen $0/0$ eller $g'(x) \to \infty$ då $x \to x_0$, kan man försöka använda l'Hospitals regel på $f'(x)/g'(x)$. Så t.ex. är

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1. \tag{15}$$

l'Hospitals regel tillämpas då på följande sätt: eftersom det tredje gränsvärdet i (15) existerar och är lika med 1, så existerar det andra gränsvärdet och är också lika med 1 och då existerar även det första gränsvärdet och är 1.

OBS. 6. Observera att om kvoten i högra ledet av (14) i sats 16.8 saknar gränsvärde, så kan man **inte** därav dra slutsatsen, att även kvoten i vänstra ledet saknar gränsvärde. Exempelvis har vi
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x \sin\frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0,$$
trots att kvoten
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x\sin(1/x) - \cos(1/x)}{\cos x}$$
inte har något gränsvärde då $x \to 0$.

I vårt bevis för l'Hospitals regel kommer vi att använda följande sats, som är en generalisering av Lagranges medelvärdessats.

SATS 16.9 (CAUCHYS MEDELVÄRDESSATS)

Antag att

1°: f och g är kontinuerliga på $[a, b]$;
2°: f och g är deriverbara på $]a, b[$;
3°: $g'(x) \neq 0$ på $]a, b[$.

Då finns det i $]a, b[$ minst ett tal c sådant att

(17): $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Bevis: Låt $\phi(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$. Då är $\phi(x)$ kontinuerlig på $[a, b]$, deriverbar på $]a, b[$ och $\phi(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = \phi(b)$. Enligt Rolles sats (sats 9.2) finns därför minst en punkt c i $]a, b[$ sådan att $\phi'(c) = 0$, d.v.s.

(18) $$(f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0.$$

3° ger att $g'(c) \neq 0$. Dessutom är $g(b) - g(a) \neq 0$, ty om $g(b) = g(a)$, så medför Rolles sats att $g'(c_1) = 0$ för något c_1 i $]a, b[$, vilket strider mot 3° . Vi kan därför dividera (18) med $g'(c)(g(b) - g(a))$. Detta ger att

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad |||$$

Bevis för sats 16.8 och OBS. 4. Vi genomför beviset då $x \to {x_0}^+$ och $x \to \infty$. De andra fallen bevisas analogt.

a) Antag att $f(x) \to 0$ och $g(x) \to 0$ då $x \to {x_0}^+$. Vi definierar då $f(x_0) = g(x_0) = 0$, om detta inte redan gäller. Därmed blir $f(x)$ och $g(x)$ kontinuerliga (till höger) i x_0. Enligt förutsättningarna kan vi nu använda Cauchys medelvärdessats på $[x_0, x]$, då $x - x_0$ är tillräckligt litet. Vi får att

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

för någon punkt $c(x)$ i $]x_0, x[$. Då $x \to {x_0}^+$ måste $c \to x_0^+$ och därmed är

$$\lim_{x \to {x_0}^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to {x_0}^+} \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

där det sistnämnda gränsvärdet existerar enligt förutsättning 3° .

b) Antag att $g(x) \to \infty$ eller $g(x) \to -\infty$ då $x \to {x_0}^+$. Enligt förutsättningarna 1° och 2° finns det ett intervall $]x_0, x_2[$ på vilket både $g(x) \neq 0$ och $g'(x) \neq 0$. Låt x och a vara punkter sådana att $x_0 < x < a < x_2$. Enligt Cauchys medelvärdessats är $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ för något c i $]x, a[$. Multiplikation med $\frac{g(x)-g(a)}{g(x)}$ ger

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)} = \left(1 - \frac{g(a)}{g(x)}\right)\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

och därmed

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} - \frac{g(a)}{g(x)} \cdot \frac{f'(c)}{g'(c)} + \frac{f(a)}{g(x)}.$$

Eftersom $A = \lim\limits_{x \to x_0+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existerar enligt 3° , kan vi välja a (tillräckligt nära x_0), så att den första termen i högerledet antar ett värde godtyckligt nära A. För varje sådant fixt a är de två övriga termerna godtycklligt små för alla x tillräckligt nära x_0, eftersom $g(x) \to \infty$ eller $g(x) \to -\infty$ då $x \to {x_0}^+$. Detta ger att $f(x)/g(x) \to A$ då $x \to {x_0}^+$.

c) Antag att $x \to \infty$. Med $x = \frac{1}{t}$ får vi av a) resp. b) att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to 0+} \frac{-1/t^2 \cdot f'(1/t)}{-1/t^2 \cdot g'(1/t)} = \lim_{t\to 0+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

om det sistnämnda gränsvärdet existerar. |||

UPPGIFTER

1642. Beräkna följande gränsvärden:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ (a och $b > 0$)

b) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\tan x - 1}{\sin 4x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

1643. Beräkna följande gränsvärden:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$ ($b \neq 0$)

b) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$ (a och $b > 0$)

c) $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{arccot} x$

d) $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(a + be^x)}{\sqrt{c + dx^2}}$ (b och $d > 0$).

1644. Beräkna följande gränsvärden:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\ln t}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} \left(\displaystyle\int_0^x \sqrt{t^4 + t^2}\, dt - \frac{x^3}{3}\right)$.

16.11 Kort historik

Genom en formell gränsövergång i Newton-Gregorys interpolationsformel (se historiken i avsnitt 17.7) utvecklade Brook **Taylor** (1712) en given funktion i en oändlig serie: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \ldots$. Denna utveckling kallas nu **Taylorserien** till f; se avsnitt 19.1. Serieutvecklingen var dock känd av **Gregory** redan 1670 och upptäcktes något senare även av **Leibniz**, men ingen av dessa publicerade resultatet. **Newton** nämnde denna utveckling i ett manuskript 1692 och Johann **Bernoulli** publicerade nästan samma serieframställning 1694. Utvecklingen i specialfallet $a = 0$ härleddes med en annan metod än Taylors av Colin **Maclaurin** (1742) i hans *Treatise of functions*. Även detta resultat var dock känt något tidigare av James **Stirling**. Se vidare om serieutvecklingar i historiken i avsnitt 19.6.

"Taylors formel" med restterm borde egentligen heta "Lagranges formel", eftersom **Lagrange** var den som först härledde denna (i slutet av 1700-talet, men publicerat först 1813). Resttermen kallas ju fortfarande "Lagranges restterm".

"l'Hospitals regel" borde rätteligen heta "Bernoullis regel", ty den upptäcktes av Johann **Bernoulli** i början av 1690-talet. Hans elev, markisen Guillaume de l'**Hospital** fick emellertid tillåtelse att ta med den i sin lärobok i differential- och integralkalkyl (1696), som var den första i detta ämne.

17 TALFÖLJDER OCH LINJÄRA DIFFERENS-EKVATIONER

I många av matematikens tillämpningar förekommer funktioner, som inte är definierade på ett helt intervall utan endast i t.ex. heltalspunkter. Sådana funktioner får man exempelvis då man mäter tidsberoende storheter med jämna mellanrum. T. ex. registreras prisutvecklingen i Sverige varje år eller varje månad, folkmängden i Sveriges kommuner och räntan på en persons bankkapital anges varje år och börsens aktieindex varje bankdag. Vidare antar sådana funktioner ofta inte godtyckliga reella värden utan t.ex. endast heltalsvärden eller värden med ett fixt antal decimaler. Grafen till en funktion av detta slag är inte en sammanhängande kurva utan en mängd av isolerade punkter; se figur 17.1 och 17.2. För att göra figuren tydligare brukar man dock ofta binda samman dessa punkter med räta linjestycken, d.v.s. man gör en linjär interpolation; se avsnitt 9.8. Detta ger i regel inte korrekta funktionsvärden, om nu funktionen över huvud taget är definierad mellan heltalspunkterna. Ibland är det, som i exemplet i figur 17.2, bättre att åskådliggöra funktionen med en sträckvis konstant graf.

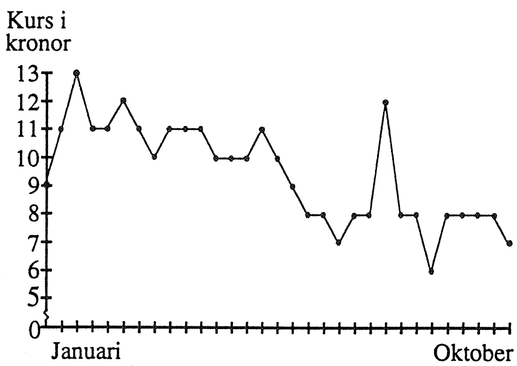


Fig. 17.1 Kursutveckling: Diagrammet visar kursutvecklingen för en aktie från januari till oktober ett visst år

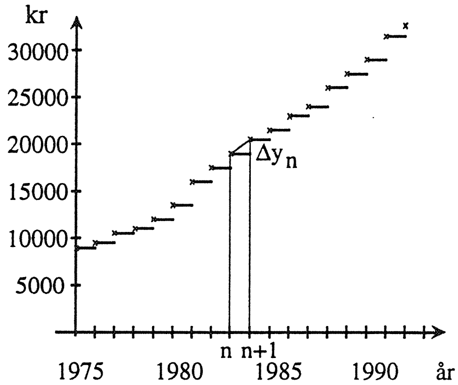


Fig. 17.2 Prisutvecklingen i Sverige 1975-1992 mätt med årets s.k. basbelopp.

Funktionsvärdena $y(n)$ till sådana funktioner betecknas ofta och enklare med y_n. De bildar en s..k. **talföljd**. Om definitionsmängden är t.ex. **N**, så har vi (den oändliga) talföljden $y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots$. Tillväxttakten hos en talföljd mäts med hjälp av **differensen** $\Delta y_n =$ $= y_{n+1} - y_n$. För tillväxtproblem får man därför s.k. **differensekvationer**, som motsvarar differentialekvationer för funktioner definierade på ett intervall (ett s.k. **kontinuum**). Vidare leder summationsproblem för talföljder till s.k. **(oändliga) serier**, som motsvarar integraler för funktioner definierade på ett intervall.

En mängd, som består av isolerade punkter, kallas en **diskret mängd**. Den del av matematiken, som behandlar bl.a. matematisk logik, diskreta mängder och funktioner på sådana mängder brukar kallas **diskret matematik**. Denna har fått allt större betydelse i samband med den ökande användningen av datorer. Vi studerar i detta kapitel talföljder och differensekvationer och fortsätter sedan med serier i nästa kapitel.

17.1 Talföljder

DEFINITION (AV TALFÖLJD)

Med en (oändlig) **talföljd**[1] menas en funktion f, vars definitionsmängd D_f är mängden av alla heltal $\geq p$, där p är ett givet heltal; vi väljer oftast $p = 1$ eller $p = 0$. Mot varje $n \in D_f$ svarar alltså ett reellt (eller komplext) tal $f(n) = a_n$. Vi har därmed en oändlig följd av tal: a_p, a_{p+1}, $a_{p+2}, \ldots$. Talföljden betecknas $\{a_n\}_{n=p}^{\infty}$ eller $\{f(n)\}_{n=p}^{\infty}$.

Ibland har man anledning att betrakta funktioner som är definierade endast i ändligt många konsekutiva[2] heltalspunkter. För sådana funktioner bildar funktionsvärdena en **ändlig talföljd** a_p, a_{p+1}, $a_{p+2}, \ldots$, a_{p+n}.

En talföljd, t.ex. $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$, kan åskådliggöras som grafen till funktionen f, d.v.s. som punkterna $(n, f(n))$, där $n = 1, 2, 3, \ldots$; se figur 17.3. Alternativt kan man ange punkterna $a_n = f(n)$ på tallinjen som i figur 17.4.

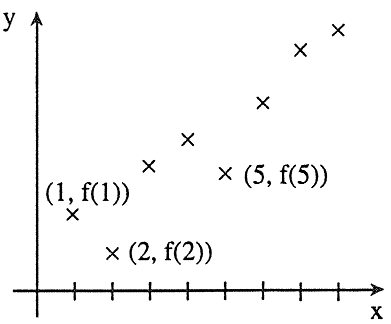


Fig. 17.3

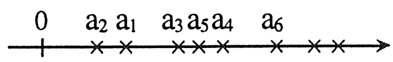


Fig. 17.4

EXEMPEL 1. När vi skriver 1, 1/2, 1/3, 1/4, ... menar vi i regel talföljden $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ men skulle också kunna avse t.ex. talföljden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, där $a_n = 1/4$ för alla $n \geq 4$. Vi preciserar därför med beteckningen $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$.

EXEMPEL 2. De sex första talen i talföljden $\{(-1)^n n^2\}_{n=0}^{\infty}$ är 0, -1, 4, -9, 16, -25.

EXEMPEL 3. $\{ak^n\}_{n=0}^{\infty}$, där a och k är givna konstanter, är talföljden a, ak, ak^2, ak^3, $ak^4, \ldots$. En sådan talföljd kallas en **geometrisk talföljd** med **kvoten** k.

[1] eller sekvens eller svit

[2] d.v.s. på varandra följande

Definitionen av $\lim_{x\to\infty} f(x)$ i avsnitt 3.3C ger för talföljder:

DEFINITION (AV GRÄNSVÄRDE, KONVERGENS OCH DIVERGENS FÖR EN TALFÖLJD)

Talföljden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ säges ha **gränsvärdet** $\boldsymbol{a}$ om till varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal N_ε sådant att

$$n > N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Man skriver då

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{eller} \quad a_n \to a \quad \text{då} \quad n\to\infty$$

och säger att talföljden **är konvergent** (eller **konvergerar**). En talföljd som inte är konvergent säges **vara divergent** (eller **divergera**).

EXEMPEL 4. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3}{\sqrt{n}} = 0$, ty $\left|\dfrac{3}{\sqrt{n}} - 0\right| = \dfrac{3}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ för alla $n > 9/\varepsilon^2 = N_\varepsilon$.

Alla gränsvärdesreglerna i avsnitt 3.4 gäller naturligtvis för talföljder.

EXEMPEL 5. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+\sin n^3}{2n+(-1)^n} = \dfrac{1}{2}$. Vi har nämligen att

$$\frac{n+\sin n^3}{2n+(-1)^n} = \frac{1+(\sin n^3)/n}{2+(-1)^n/n} \to \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2} \quad \text{då } n\to\infty$$

enligt räknereglerna för gränsvärden.

EXEMPEL 6. Talföljden $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$, d.v.s. 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, ..., är divergent. Det finns ju inget tal a, som ligger godtyckligt nära både 0 och 1.

EXEMPEL 7. Om $f(x)$ är definierad för bl.a. alla tal x större än en konstant och $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, så är naturligtvis $\lim_{n\to\infty} f(n) = a$. Detta ger t.ex. att $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$; se sats 6.6. Vidare finner vi med hjälp av sats 6.6. genom att sätta $n = -m$ att

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{m\to-\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-m} = \lim_{m\to-\infty}\frac{1}{(1+1/m)^m} = \frac{1}{e}.$$

Vi kommer också att behöva följande speciella typ av divergenta talföljder:

DEFINITION (AV ATT EN TALFÖLJD DIVERGERAR MOT ∞)

En talföljd $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ säges **divergera mot ∞** om det till varje positivt tal M finns ett tal N_M sådant att

$$n > N_M \Rightarrow a_n > M;$$

jämför med avsnitt 3.5. Detta betecknas: $a_n \to \infty$ då $n \to \infty$.

På analogt sätt definieras vad som menas med att en talföljd **divergerar mot** $-\infty$; formuleringen av detta överlåtes åt läsaren.

EXEMPEL 8. Betrakta talföljden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, där

$$a_n = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{om } n \text{ är en jämn kvadrat} \\ n^2 & \text{för övriga } n \end{cases},$$

d.v.s. 1, 4, 9, 2, 25, 36, 49, 64, 3, 100, 121, ... Denna talföljd divergerar mot ∞, ty $a_n \geq \sqrt{n} > M$ för alla $n > M^2 = N_M$.

I samband med lösningar till linjära differensekvationer senare i detta kapitel behöver vi känna till gränsvärdena i följande sats. Några andra viktiga gränsvärden behandlar vi i avsnitt 18.2, där vi också studerar monotona talföljder.

SATS 17.1 (OM NÅGRA GRÄNSVÄRDEN)

1°: För konstant k har vi att

$$\lim_{n\to\infty} k^n = \begin{cases} 0 & \text{då } |k| < 1 \\ 1 & \text{då } k = 1 \end{cases},$$

medan

$$\{k^n\}_{n=1}^{\infty} \begin{cases} \text{divergerar mot } \infty \text{ om } k > 1 \\ \text{divergerar om } k \leq -1, \text{ dock varken mot } \infty \text{ eller } -\infty. \end{cases}$$

2°: För varje polynom $P(n)$ och varje konstant k med $|k| < 1$ är

$$\lim_{n\to\infty} P(n)k^n = 0.$$

Då $|k| > 1$ och $P(n)$ inte är $\equiv 0$ gäller att $|P(n)k^n| \to \infty$ då $n \to \infty$.

Bevis: 1° : Påståendet är trivialt då $k = 0$ och då $k = \pm 1$. Då $k \neq 0$ är $|k^n| = |k|^n = e^{n \ln |k|}$, vilket medför att

$$|k^n| \to \begin{cases} 0 & \text{då} \quad n \to \infty \quad \text{om} \quad 0 \neq |k| < 1, \quad \text{ty då är} \quad \ln|k| < 0 \\ \infty & \text{då} \quad n \to \infty \quad \text{om} \quad |k| > 1, \quad \text{ty då är} \quad \ln|k| > 0 \end{cases}.$$

Detta ger påståendet, eftersom $k^n = |k^n|$ då $k > 0$ och $k^n = (-1)^n|k^n|$ då $k < 0$.

2° : Om $P(n) = a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1} + \ldots + a_0$, där p är ett heltal ≥ 0 och $a_p \neq 0$, så är

$$|P(n)k^n| = n^p|k|^n|a_p + \frac{a_{p-1}}{n} + \ldots + \frac{a_0}{n^p}|.$$

Här gäller då $n \to \infty$ att den sista faktorn går mot $|a_p| > 0$ och att

$$n^p|k|^n \to \begin{cases} 0 & \text{om} \quad |k < 1 \\ \infty & \text{om} \quad |k| > 1. \end{cases}$$

Påståendet för $|k| < 1$ följer av $2\ ^\circ$ i sats 6.9 i avsnitt 6.5 och påståendet för $|k| > 1$ följer av $1\ ^\circ$ ovan. Detta medför sedan $2\ ^\circ$. |||

UPPGIFTER

1701. I en talföljd $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är talet a_n lika med

a) $\dfrac{4n^2 + n + 4}{(1+n)(2-3n)}$ b) $\dfrac{(n^2+1)^2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ c) $\dfrac{n^3 + n^2 + 1}{(n+1)^4}$.

Undersök om talföljden är konvergent eller divergent och bestäm i det förra fallet dess gränsvärde.

1702. k är ett naturligt tal. Beräkna $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\binom{2n}{k} \Big/ \binom{n}{k} \right)$.

1703. Verifiera med hjälp av definitionen av gränsvärde till en talföljd $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ att om $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, så gäller också:

a) Om p är ett godtyckligt heltal, så är $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+p} = a$.

b) Om $\{a'_n\}_{n=1}^{\infty}$ är en talföljd, som man får av $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ då ett **ändligt** antal av talen a_n ändras på godtyckligt sätt, så är $\lim\limits_{n\to\infty} a'_n = a$.

1704. I en talföljd $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är talet a_n lika med

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Undersök om talföljden är konvergent eller divergent och bestäm i det förra fallet dess gränsvärde.

1705. a) Visa att om $|k| < 1$ och p är ett godtyckligt positivt tal, så är $\lim\limits_{n\to\infty} k^n n^p = 0$. (Jämför sats 6.9 i avsnitt 6.5). Bestäm sedan gränsvärdena

b) $\lim\limits_{n\to\infty} 0.99^n \cdot n^{99}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{1000}}{1.001^n}$.

17.2 Differensekvationer: terminologi och inledande exempel

Låt y vara en reellvärd funktion som är definierad på en mängd av konsekutiva (d.v.s. på varandra följande) naturliga tal. Funktionsvärdet $y(n)$ betecknas som sagts enklare med y_n och vi har därmed en ändlig eller oändlig talföljd, t.ex. $\{y_n\}_{n=1}^{m}$ resp. $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$. Exempelvis kan y_n vara en persons bruttoinkomst under år n (med ett givet år som år 1). Talet

$$(1) \qquad \Delta y_n = y_{n+1} - y_n$$

kallas **differensen** (av första ordningen) till funktionen y_n i punkten n. Denna anger **ändringstakten** hos y_n mellan punkterna n och $n+1$ $(= n+\Delta x)$, eftersom

$$(2) \qquad \frac{\Delta y_n}{\Delta x} = \frac{y(n+1) - y(n)}{(n+1) - n} = \frac{y_{n+1} - y_n}{1} = \Delta y_n;$$

se figur 17.2, sid. 30. Δy_n kan också kallas **tillväxttakten**, om "tillväxten" räknas med tecken. Differensen Δy_n till funktionen y_n, som har en diskret definitionsmängd, motsvarar derivatan

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{(x+\Delta x) - x}$$

till en funktion $y(x)$, vars definitionsmängd är ett intervall.

EXEMPEL 9. En person sätter vid början av varje år in k kronor på ett bankkonto med $r\,\%$ årlig ränta. På den upplupna räntan dras vid årets slut 30 % skatt. Vilket kapital har han efter den n:te insättningen?

Lösning: Låt y_n beteckna kapitalet efter den n:te insättningen. Då är $y_1 = k$ och för $n \geq 1$ är y_{n+1} summan av y_n, den under året upplupna räntan $\frac{r}{100} \cdot y_n$ minus erlagd skatt och den $(n+1)$:a insättningen, d.v.s.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{r}{100} \cdot y_n - 0.3 \cdot \frac{r}{100} \cdot y_n + k.$$

Om vi sätter $\frac{r}{100} = s$, så kan detta skrivas

$$(3) \qquad y_{n+1} = (1 + 0.7s)y_n + k, \qquad n = 1,\ 2,\ 3, \ldots.$$

En likhet av detta slag kallas, som tidigare nämnts, en rekursionsformel. Den kallas också en **rekurrensekvation**. Eftersom vi vet att $y_1 = k$, får vi successivt med hjälp av (3) att

$$y_2 = (1+0.7s)y_1 + k = (1+0.7s)k + k,$$

$$y_3 = (1+0.7s)y_2 + k = (1+0.7s)^2k + (1+0.7s)k + k$$

o.s.v. Vi inser att

$$y_n = ((1+0.7s)^{n-1} + (1+0.7s)^{n-2} + \ldots + (1+0.7s) + 1)k.$$

Detta är en geometrisk summa med kvoten $1 + 0.7s$ och alltså är enligt 8° i avsnitt 1.9

$$y_n = \frac{(1+0.7s)^n - 1}{1+0.7s-1}k = \frac{k}{0.7s}((1+0.7s)^n - 1).$$

Exempelvis ger $k = 1\,000$ och $r = 10$, d.v.s. $s = 0.1$, att $y_n = \frac{10\,000}{0.7}(1.07^n - 1)$. Avrundat till heltal är t.ex. $y_{10} = 13\,816$, $y_{25} = 63\,249$ och $y_{50} = 406\,528$.

Svar: $\frac{k}{0.7s}((1+0.7s)^n - 1)$ kronor.

Ekvationen (3) är ett specialfall av ekvationen

(4) $$y_{n+1} + ay_n = d_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

där $a \neq 0$ är en given konstant och $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ är en given talföljd; vi startar denna gång med y_0 i stället för med y_1. Av (1) får vi

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n,$$

vilket insatt i (4) ger

(5) $$\Delta y_n + (1+a)y_n = d_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Denna ekvation, som är ekvivalent med rekurrensekvationen (4), kallas en **differensekvation**, eftersom den innehåller en differens till en (okänd) funktion. Vi använder i regel formen (4) och inte formen (5) men föredrar ändå benämningen differensekvation. (4) kallas närmare bestämt en **linjär differensekvation av första ordningen med konstanta koefficienter**. Sådana ekvationer behandlas utförligt i nästa avsnitt.

En ekvation av formen

(6) $$y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = d_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

där a och b är givna konstanter med $b \neq 0$ och $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ är en given talföljd, kallas analogt en **linjär differensekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter**. Den kan nämligen skrivas med hjälp av **differenserna** Δy_n och $\Delta^2 y_n$ **av första** resp. **andra ordningen** till funktionen y, där som ovan $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ och

$$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta(y_{n+1} - y_n) = (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n.$$

Talföljden $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ bestäms tydligen av rekursionsformeln (6) om y_0 och y_1 är givna. Vi kommer att studera sådana ekvationer i avsnitten 17.4-17.6.

EXEMPEL 10. Låt $y_0 = 0$ och $y_1 = 1$ och antag att $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisfierar den linjära differensekvationen av andra ordningen

$$y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 0, \quad \text{d.v.s.} \quad y_{n+2} = y_n + y_{n+1}.$$

Den så bestämda talföljden, där varje tal alltså är summan av de båda närmast föregående, kallas **Fibonaccis**[3] **talföljd**. Man finner att Fibonacciföljden är

[3]**Fibonacci** eller Leonardo av Pisa, ca 1170-1250, erhöll denna talföljd i samband med studiet av tillväxten av en kaninpopulation.

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987,.... Denna har intressanta egenskaper (se t.ex. uppgift 1714) och många olika tillämpningar. Vi kommer i avsnitt 17.5 att härleda en formel för det n:te talet i denna talföljd; se exempel 19.

EXEMPEL 11. Produktionsplanering.
Ett företag ämnar tillverka, lagerhålla och sälja en viss produkt. Man planerar att under det första året tillverka P_1 enheter för försäljning och I_1 enheter för att bygga upp ett lager. Vidare planerar man att varje år
1° : tillverka I exemplar för utdelning som reklam;
2° : kunna sälja en konstant bråkdel b av den totala produktionen under året, där $0 < b < 1$.
Slutligen planerar man att under varje år $n \geq 2$
3° : för försäljning tillverka lika många enheter som man sålde föregående år;
4° : genom att öka eller minska tillverkningen med I_n enheter justera överskott eller underskott från föregående år.
Låt P_n vara antalet enheter, som tillverkas för försäljning under år n. Då är det totala antalet enheter, som tillverkas under år n, enligt 1° och 4°

(7) $$Y_n = P_n + I + I_n, \quad n \geq 1.$$

Om S_n är antalet enheter, som säljs under år n, så är enligt 3°

(8) $$P_n = S_{n-1} \quad \text{då } n \geq 2.$$

Vidare ger 2° att

(9) $$S_n = bY_n \quad \text{för } n \geq 1.$$

Slutligen bör man enligt 4° välja

(10) $$I_n = S_{n-1} - P_{n-1} \quad \text{då } n \geq 2.$$

Ekvationerna (7)–(10) ger en modell för företagets produktionsnivå. (8) och (9) medför att

(11) $$P_n = bY_{n-1} \quad \text{då } n \geq 2$$

och insättning av (9) och (11) i (10) ger

(12) $$I_n = bY_{n-1} - bY_{n-2} \quad \text{då } n \geq 3.$$

Till sist ger insättning av (11) och (12) i (7) att

$$Y_n = bY_{n-1} + I + bY_{n-1} - bY_{n-2} \quad \text{då } n \geq 3,$$

d.v.s. vi får den linjära differensekvationen av andra ordningen

(13) $$Y_n - 2bY_{n-1} + bY_{n-2} = I, \quad n \geq 3,$$

för bestämning av den lämpligaste produktionsnivån. Om Y_1, Y_2 och I är givna, kan man beräkna Y_n för $n \geq 3$ med hjälp av denna modell. Se vidare avsnitt 17.6 och speciellt uppgift 1719.

17.3 Linjära differensekvationer av första ordningen

Med en linjär differensekvation av första ordningen med konstanta koefficienter menas, som vi redan sagt, en ekvation av formen

(4) $$y_{n+1} + ay_n = d_n \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

där $a \neq 0$ är en konstant och $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ är en given talföljd. Man löser ekvationen på följande sätt:

(4) ger successivt för $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ att

$$y_1 = -ay_0 + d_0$$
$$y_2 = -ay_1 + d_1 = (-a)^2 y_0 + (-a)d_0 + d_1$$
$$y_3 = -ay_2 + d_2 = (-a)^3 y_0 + (-a)^2 d_0 + (-a)d_1 + d_2$$
$$\vdots$$
$$y_n = -ay_{n-1} + d_{n-1} = (-a)^n y_0 + (-a)^{n-1} d_0 + (-a)^{n-2} d_1 + \ldots + (-a)d_{n-2} + d_{n-1}.$$

Lösningen kan alltså skrivas

(14) $$y_n = (-a)^n y_0 + \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} (-a)^{n-1-k} d_k \quad (n \geq 1).$$

EXEMPEL 12. Lös differensekvationen $y_{n+1} - y_n = n$ då $y_0 = 2$.
Lösning: Här är $a = -1$, varför lösningen enligt (14) är

$$y_n = 1^n \cdot 2 + \sum_{k=0}^{n-1} k.$$

Summan här är en aritmetisk summa med differensen 1 och kan därmed lätt beräknas; se avsnitt 1.9, särskilt exempel 24 a. Man finner att

$$y_n = 2 + \frac{n(n-1)}{2} = 2 + \binom{n}{2}.$$

Svar: $y_n = 2 + \binom{n}{2}$.

Anm. 1. För att lösningen (14) skall vara användbar, måste det vara möjligt att beräkna summan, vilket inte alltid är fallet. För vissa talföljder $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ kan man i stället bestämma lösningen direkt genom ansatser, som presenteras i avsnitt 17.6.

I (14) är startvärdet y_0 godtyckligt. Om vi sätter $y_0 = C$, kan (14) skrivas

(14′) $$y_n = C \cdot (-a)^n + \sum_{k=0}^{n-1} (-a)^{n-1-k} d_k, \quad (n \geq 1),$$

där alltså C är en godtycklig konstant. (14′) kallas **den allmänna lösningen** till differensekvationen (4); jfr motsvarande begrepp för differentialekvationer, avsnitt 14.2.

Antag nu speciellt att ekvationen (4) är **homogen**, d.v.s. att $d_n = 0$ för alla n och därmed

(15) $$y_{n+1} + ay_n = 0, \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Då är den allmänna lösningen enligt (14′)

(16) $$y_n = C(-a)^n.$$

Vi observerar att $-a$ är roten r_1 till differensekvationens s.k. **karakteristiska ekvation**

(17) $$r + a = 0.$$

Vi sammanfattar resultaten i följande sats.

SATS 17.2 (OM LÖSNINGARNA TILL EN LINJÄR DIFFERENS-EKVATION AV FÖRSTA ORDNINGEN)

Den linjära differensekvationen $y_{n+1}+ay_n = d_n$, där $a \neq 0$, har den allmänna lösningen

$$y_n = C \cdot (-a)^n + \sum_{k=0}^{n-1} (-a)^{n-1-k} d_k,$$

där C $(= y_0)$ är en godtycklig konstant. Speciellt har motsvarande homogena ekvation $y_{n+1} + ay_n = 0$ den allmänna lösningen

$$y_n^{(h)} = C \cdot (-a)^n.$$

Om $C = y_0 = 0$, har enligt sats 17.2 den inhomogena ekvationen (4) **partikulärlösningen**

(18) $$y_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{n-1} (-a)^{n-1-k} d_k.$$

Den allmänna lösningen till (4) kan alltså skrivas

(19) $$y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)},$$

där $y_n^{(p)}$ är en partikulärlösning till ekvationen och $y_n^{(h)}$ är den allmänna lösningen (16) till motsvarande homogena ekvation. Jämför med vad som gäller för linjära differentialekvationer, avsnitt 15.1! Vi kommer att formulera en allmän sats om detta i nästa avsnitt.

EXEMPEL 13. Modell för priset på en vara.
En firma säljer en viss vara, vars pris P_n vid tiden $n \geq 0$ (månader) kan variera i ett visst intervall $[P_{\min}, P_{\max}]$, där $P_{\min} > 0$. **Efterfrågan** D_n på varan antas

vara en linjär, avtagande funktion av priset vid samma tidpunkt:

(20) $D_n = c_1 - bP_n$, där $c_1 > 0$, $b > 0$; se figur 17.5.

Tillgången S_n på varan antas vidare vara en linjär, växande funktion av priset P_{n-1} en månad tidigare:

(21) $S_n = dP_{n-1} + c_2$, där $d > 0$; se figur 17.6.

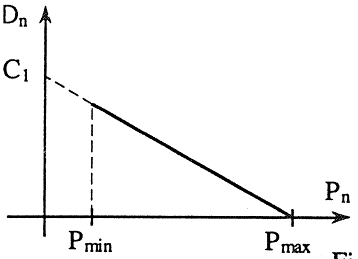


Fig. 17.5

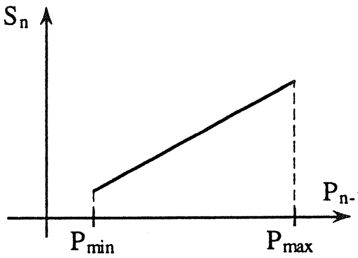


Fig. 17.6

Vid jämvikt balanserar tillgången efterfrågan:

(22) $$S_n = D_n.$$

Insättning av (20) och (21) i (22) ger

$$dP_{n-1} + c_2 = c_1 - bP_n.$$

Som modell för varans pris vid jämvikt får vi alltså differensekvationen

(23) $$P_n + aP_{n-1} = c, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

där $$a = \frac{d}{b} > 0, \quad c = \frac{c_1 - c_2}{b}.$$

Lösningen till den inhomogena differensekvationen (23) är enligt sats 17.2

$$P_n = (-a)^n P_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (-a)^{n-1-k} c = (-a)^n P_0 + \sum_{j=0}^{n-1} (-a)^j c.$$

Summan här är en geometrisk summa vars kvot är $-a$ och vars första term är c. Den kan därför lätt beräknas; se avsnitt 1.9. Man får att

(24) $$P_n = (-a)^n P_0 + c \cdot \frac{1 - (-a)^n}{1 + a} = \frac{c}{1 + a} + (P_0 - \frac{c}{1 + a})(-a)^n.$$

Eftersom $P_1 = c - aP_0 \geq P_{\min}$, måste $c \geq aP_0 + P_{\min}$. Tre fall är möjliga för utvecklingen av priset P_n :

1. $0 < a < 1$. Då är $(-a)^n \approx 0$ för stora n enligt 1° i sats 17.1 och (24) ger därmed att $P_n \approx c/(1 + a)$ för stora n. Priset svänger kring detta värde med allt mindre amplitud; se figur 17.7.

2. $a = 1$. Då är $P_{2n} = P_0$ och $P_{2n-1} = c - P_0$ för alla n. Priset oscillerar mellan

dessa båda värden; se figur 17.8.

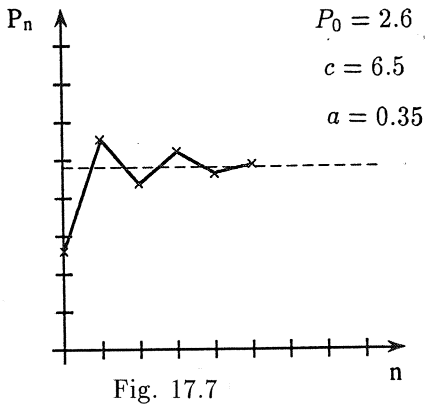


Fig. 17.7

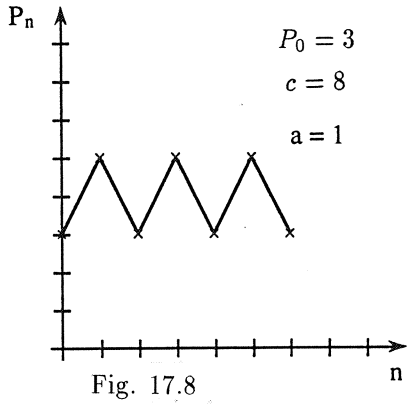


Fig. 17.8

3. $a > 1$. P_n svänger då i allmänhet upp och ned med allt större utslag, till dess priset når värdet $P_{\min}$ eller $P_{\max}$; se figur 17.9.
I det speciella fall då $P_0 = c/(1 + a)$, blir $P_n = c/(1 + a)$ för alla n oberoende av a:s storlek, d.v.s. priset är konstant.

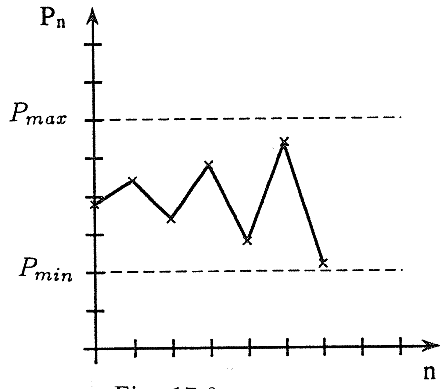


Fig. 17.9

UPPGIFTER

1706. Bestäm y_n om för $n \geq 0$

a) $y_{n+1} = 7y_n$, $y_0 = 2$ b) $y_{n+1} = 2y_n + 1$, $y_0 = 5$ c) $2y_{n+1} - y_n = 4$, $y_0 = 3$
d) $y_{n+1} + y_n = 1$, $y_0 = 1$ e) $y_{n+1} = 3y_n - 1$, $y_0 = 2$ f) $2y_{n+1} + y_n = 3$, $y_0 = 2$.

1707. Lös differensekvationerna

a) $y_{n+1} - y_n = e^n,\ n \geq 1,\ y_1 = 1$
b) $y_{n+1} - y_n = \sin n,\ n \geq 0,\ y_0 = 0$
c) $y_{n+1} - 2y_n = n,\ n \geq 0,\ y_0 = 0$
d) $y_{n+1} + y_n = 3n - 2,\ n \geq 0,\ y_0 = 1$
e) $y_{n+1} - y_n = (n+1)^2,\ n \geq 0,\ y_0 = 2.$

1708. En person tar ett avbetalningslån på K kr. Lånet löper med $p\,\%$ årlig ränta. Vid slutet av år n amorterar han A_n kr. för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

a) Ställ upp en differensekvation för skulden S_n vid slutet av år n.
b) Bestäm S_n om $A_n = A$ för alla n och bestäm konstanten A så att lånet är avbetalat efter N år.
c) Bestäm S_n om $A_n = A\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n-1}$ och bestäm konstanten A så att lånet är avbetalat efter N år.

17.4 Allmänna linjära differensekvationer

Med en **linjär differensekvation av p:te ordningen med konstanta koefficienter** menas en ekvation som kan skrivas

$$(25)\quad y_{n+p} + a_{p-1}y_{n+p-1} + a_{p-2}y_{n+p-2} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = d_n,\ n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

där p är ett positivt heltal, $a_{p-1},\ a_{p-2}, \ldots,\ a_1$ och a_0 är givna konstanter och $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ är en given talföljd. Ekvationen (25) kallas **homogen** om $d_n = 0$ för alla n, annars **inhomogen**.

EXEMPEL 14. a) $y_{n+3} + 3y_{n+2} - 2y_{n+1} - 2y_n = \sin n\pi$ är en linjär, inhomogen differensekvation av 3:e ordningen med konstanta koefficienter.
b) $y_{n+4} + y_n = 0$ är en linjär, homogen differensekvation av 4:e ordningen med konstanta koefficienter.

Följande satser kan man bevisa på samma sätt som motsvarande satser för differentialekvationer; jämför med satserna 15.3 och 15.4.

SATS 17.3 (OM LÖSNINGSMÄNGDEN TILL EN HOMOGEN, LINJÄR DIFFERENSEKVATION)

Om talföljderna $y_n^{(1)},\ y_n^{(2)}, \ldots,\ y_n^{(k-1)}$ och $y_n^{(k)}$ är lösningar till en **homogen**, linjär differensekvation, så är också varje linjärkombination av dessa, dvs. $\alpha_1 y_n^{(1)} + \alpha_2 y_n^{(2)} + \ldots + \alpha_k y_n^{(k)}$, en lösning till differensekvationen.

SATS 17.4 (OM LÖSNINGSMÄNGDEN TILL EN INHOMOGEN, LINJÄR DIFFERENSEKVATION)

Om $y_n^{(p)}$ är en partikulärlösning till den **inhomogena**, linjära differensekvationen (25) och om $y_n^{(h)}$ är den allmänna lösningen till motsvarande **homogena** ekvation, så är $y_n = y_n^{(p)} + y_n^{(h)}$ den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen.

För vår fortsatta behandling av linjära ekvationer behöver vi följande definition.

DEFINITION (AV KARAKTERISTISKA EKVATIONEN TILL EN LINJÄR DIFFERENSEKVATION)

Differensekvationen med konstanta koefficienter

(26) $$y_{n+p} + a_{p-1}y_{n+p-1} + a_{p-2}y_{n+p-2} + \ldots + a_1y_{n+1} + a_0y_n = d_n$$

säges ha **den karakteristiska ekvationen**

(27) $$r^p + a_{p-1}r^{p-1} + a_{p-2}r^{p-2} + \ldots + a_1r + a_0 = 0.$$

EXEMPEL 15. a) Ekvationen i exempel 14a, har den karakteristiska ekvationen $r^3 + 3r^2 - 2r - 2 = 0$.
b) Ekvationen i exempel 14b har den karakteristiska ekvationen $r^4 + 1 = 0$.

17.5 Linjära, homogena differensekvationer

För enkelhetens skull nöjer vi oss i fortsättningen med att behandla linjära differensekvationer av **andra** ordningen. Förhållandena är dock helt analoga för linjära differensekvationer av godtycklig ordning $p \geq 1$.
Vi behandlar först homogena ekvationer, d.v.s. ekvationer av formen

(28) $$y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0, \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

där a och b är givna reella konstanter. Om $b = 0$ har vi en linjär differensekvation av **första** ordningen för talföljden $\{z_n\}_{n=-1}^{\infty}$, där $z_n = y_{n+1}$. Vi antar därför att $b \neq 0$.

SATS 17.5 (OM LÖSNINGARNA TILL ANDRA ORDNINGENS HOMOGENA DIFFERENSEKVATION)

Betrakta den homogena differensekvationen

(28) $$y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0, \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

där a och b är reella konstanter med $b \neq 0$. Låt r_1 och r_2 vara rötterna till den karakteristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$. Då gäller följande:

1°: Om r_1 och r_2 är reella och olika, så har (28) den allmänna (reella) lösningen

(29) $$y_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n.$$

2°: Om $r_1 = r_2$ har (28) den allmänna (reella) lösningen

(30) $$y_n = (C_1 + C_2 n) r_1^n.$$

3°: Om r_1 och r_2 är icke-reella, så är $r_2 = \overline{r_1}$ och vi skriver rötterna på polär form; se figur 17.10:

(31) $$\rho e^{\pm \omega i}, \quad \text{där } \rho > 0 \text{ och } 0 < \omega < \pi.$$

Den allmänna (reella) lösningen till (28) är då

(32) $$y_n = \rho^n (C_1 \cos n\omega + C_2 \sin n\omega).$$

I samtliga fall betecknar C_1 och C_2 godtyckliga (reella) konstanter.

EXEMPEL 16. Ekvationen $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 0$ har den karakteristiska ekvationen $r^2 - 4r + 3 = 0$ med rötterna $r_1 = 1$, $r_2 = 3$. Den allmänna lösningen till differensekvationen är därmed $y_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot 3^n = C_1 + C_2 \cdot 3^n$.

EXEMPEL 17. För ekvationen $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0$ är den karakteristiska ekvationen $r^2 - 4r + 4 = 0$ med rötterna $r_1 = r_2 = 2$. Alltså har differensekvationen den allmänna lösningen $y_n = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n$.

EXEMPEL 18. Den karakteristiska ekvationen till ekvationen $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 0$ är $r^2 - 2r + 2 = 0$. Den har rötterna $1 \pm i = \sqrt{2} \cdot e^{\pm \pi i/4}$. Differensekvationen har alltså den allmänna lösningen $y_n = (\sqrt{2})^n \left(C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{n\pi}{4} \right)$.

Bevis för sats 17.5: I. Antag först att $r_2 \neq r_1$, reella eller ej. Då visar insättning i (28) att r_1^n och r_2^n är lösningar, eftersom r_1 och r_2 är rötter till den karakteristiska ekvationen. T.ex. får vi för $y_n = r_1^n$ att

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = r_1^{n+2} + ar_1^{n+1} + br_1^n = r_1^n(r_1^2 + ar_1 + b) = r_1^n \cdot 0 = 0.$$

Därmed är $C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ en lösning för godtyckliga konstanter C_1 och C_2 enligt sats 17.3. Det återstår att bevisa att **varje** lösning till (28) har formen (29) resp. (32).

Låt $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ vara en godtycklig lösning till (28). Denna är **entydigt** bestämd av värdena y_0 och y_1, eftersom (28) successivt ger y_2, y_3, $y_4, \ldots$. Om konstanterna C_1 och C_2 kan väljas så att lösningen $C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ till (28) överensstämmer med y_0 och y_1, så kommer alltså $C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = y_n$ att gälla för **alla** n, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Vi får för $n = 0$ resp. $n = 1$ villkoren

$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 &= y_0 \\ r_1 C_1 + r_2 C_2 &= y_1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} C_1 + C_2 &= y_0 \\ (r_1 - r_2)C_1 &= y_1 - r_2 y_0 \end{aligned}\right. .$$

Systemet har, som vi ser, en entydig lösning C_1, C_2, vilket visar att varje lösning till (28) har formen (29).

Om r_1 och r_2 är reella, blir tydligen lösningen (29) reellvärd om och endast om C_1 och C_2 väljes reella. Är r_1 och r_2 inte reella, så måste $r_2 = \overline{r_1}$, eftersom koefficienterna a och b i den karakteristiska ekvationen är reella; se sats 13.10. Då kan rötterna r_1 och r_2 skrivas (se figur 17.10)

$$\rho e^{\pm \omega i} = \rho(\cos\omega \pm i \sin\omega),$$

där $\rho = |r_1| = |r_2| > 0$ och $0 < \omega < \pi$. Vi kan därmed för godtyckliga komplexa konstanter B_1 och B_2 skriva

$$\begin{aligned} y_n &= B_1 r_1^n + B_2 r_2^n = B_1 \rho^n e^{n\omega i} + B_2 \rho^n e^{-n\omega i} = \\ &= \rho^n (B_1(\cos n\omega + i \sin n\omega) + B_2(\cos n\omega - i \sin n\omega)) = \\ &= \rho^n ((B_1 + B_2)\cos n\omega + i(B_1 - B_2)\sin n\omega) = \\ &= \rho^n (C_1 \cos n\omega + C_2 \sin n\omega). \end{aligned}$$

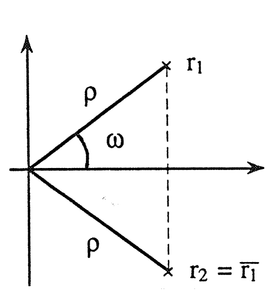


Fig. 17.10

Här är

$$C_1 = B_1 + B_2, \; C_2 = i(B_1 - B_2)$$

och därmed

$$B_1 = \frac{1}{2}(C_1 - iC_2), \; B_2 = \frac{1}{2}(C_1 + iC_2).$$

Man kan alltså få godtyckliga reella värden på C_1 och C_2 genom att välja lämpliga komplexa värden på B_1 och B_2. Varje talföljd $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, där y_n har formen (32) med reella C_1 och C_2, är alltså en lösning till (28) och omvänt är varje reellvärd lösning till (28) i detta fall av formen (32).

II. Antag nu att $r_2 = r_1$, som då måste vara reellt, då ju a och b är reella. Eftersom r_1 är dubbelrot till karakteristiska ekvationen, är som ovan r_1^n en lösning till (28). Vidare är $y_n = n r_1^n$ en lösning, ty

$$y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = (n+2) r_1^{n+2} + a(n+1) r_1^{n+1} + b n r_1^n =$$

$$= r_1^n (n(r_1^2 + a r_1 + b) + 2r_1^2 + a r_1) = r_1^n (0 + r_1(2r_1 + a)) = r_1^{n+1}(2r_1 + a) = 0,$$

då ju rötternas summa i karakteristiska ekvationen är $2r_1 = -a$. Därmed är också $C_1 r_1^n + C_2 n r_1^n$ en lösning för godtyckliga konstanter C_1 och C_2 enligt sats 17.3. Att

varje lösning till (28) har formen (30) visas på samma sätt som i fall I. Eftersom lösningen är entydigt bestämd av y_0 och y_1, räcker det att visa att man kan välja C_1 och C_2 så att $(C_1 + C_2 n) r_1^n$ överensstämmer med y_0 resp. y_1 för $n = 0$ resp. $n = 1$, d.v.s. så att

$$\begin{cases} C_1 & = y_0 \\ (C_1 + C_2) r_1 & = y_1 \end{cases} .$$

Detta system har den entydiga lösningen $C_1 = y_0$, $C_2 = y_1/r_1 - y_0$, då ju $r_1 \neq 0$ eftersom $b \neq 0$. (30) är alltså den allmänna lösningen i detta fall och den är reellvärd om och endast om C_1 och C_2 väljes reella. |||

EXEMPEL 19. Betrakta Fibonaccis talföljd $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$, som är bestämd av att $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ och $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ för $n \geq 0$; jämför exempel 10. Differensekvationen $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$ har den karakteristiska ekvationen $r^2 - r - 1 = 0$ med rötterna $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Alltså är

$$F_n = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots .$$

Begynnelsevillkoren ger för $n = 0$ resp. $n = 1$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} C_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} C_2 = 1 \end{cases},$$

d.v.s.

$$C_1 = 1/\sqrt{5} \text{ och } C_2 = -1/\sqrt{5}.$$

Därmed är

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n . \tag{33}$$

Högerledet i denna formel är tydligen alltid ett heltal, eftersom F_n är ett heltal för varje $n \geq 0$. T.ex. är

$$F_3 = \frac{(1+\sqrt{5})^3 - (1-\sqrt{5})^3}{2^3\sqrt{5}} = 2.$$

Eftersom $(1-\sqrt{5})/2 \approx -0.618$, är $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \approx 0$ för stora värden på n (se sats 17.1) och därmed $F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, där $(1+\sqrt{5})/2 \approx 1.618$. T.ex. är $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} \approx 55.004$ en god approximation till $F_{10} = 55$.

Anm. 2. Man finner med hjälp av (33) att (kontrollera detta!)

$$\lim_{n\to\infty} F_{n-1}/F_n = 2/(\sqrt{5}+1) = (\sqrt{5}-1)/2 \approx 0.6180339887.$$

Detta tal, det s.k. **gyllene snittet**, vars värde är $\approx 5/8 = 0.625$, har alltsedan antiken betraktats som det estetiskt mest "harmoniska" delningsförhållandet. Både det gyllene snittet och Fibonaccis talföljd förekommer i naturen. T.ex. sitter bladen på ett växtskott ofta så ordnade att deras lägen i förhållande till en fix punkt är en bråkdel F_{n-1}/F_n av ett helt varv, d.v.s. $1/2$, $2/3$, $3/5$, $5/8$, $8/13, \ldots$. En sådan växt får spiralstruktur.
Fibonaccitalen "dyker upp" i samband med matematisk behandling av vissa problem. T.ex. är sannolikheten $s_n = F_{n-1}/2^n$ för att det behövs exakt n kast med ett mynt för att "krona" (resp. "klave") skall erhållas 2 gånger i följd ($s_1 = 0$, $s_2 = 1/4$, $s_3 = 1/8$, $s_4 = 1/8$, $s_5 = 3/32$ o.s.v.).

UPPGIFTER

1709. Lös differensekvationerna (där $n \geq 0$)

a) $y_{n+2} + y_{n+1} - 6y_n = 0$ b) $y_{n+2} - 7y_{n+1} + 10y_n = 0$ c) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0$
d) $9y_{n+2} + 6y_{n+1} + y_n = 0$ e) $y_{n+2} + 2y_n = 0$ f) $y_{n+2} + 4y_{n+1} + 8y_n = 0$
g) $y_{n+3} - 6y_{n+2} + 11y_{n+1} - 6y_n = 0$ h) $y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n = 0$.

1710. Bestäm den lösning till differensekvationen $4y_{n+2} - 2\sqrt{3}y_{n+1} + y_n = 0$ ($n \geq 0$) för vilken $y_0 = 0$, $y_1 = 1$. Ange speciellt y_{101}.

1711. I en viss talföljd $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ är från och med det tredje talet i följden varje tal medelvärdet av de båda närmast föregående. Undersök om $\lim_{n\to\infty} y_n$ existerar och ange i så fall detta tal.

1712. Vid en studie av spridningen av smittsamma sjukdomar observerades antalet fall av mässling i en skola. Man bedömde att sannolikheten p_n (där $0 \leq p_n \leq 1$) för minst ett nytt fall av mässling i skolan under den n:te veckan efter epidemins utbrott uppfyllde ekvationen $p_n = p_{n-1} - p_{n-2}/5$ med $p_0 = 0$ och $p_1 = 1$.

a) Bestäm p_2, p_3 och p_4 samt p_n för allmänt n.
b) Epidemin bedömdes vara över då $p_n < 0.1$. När inträffar detta?

1713. Två spelare, A och B, spelar mot varandra (t.ex. genom att singla slant). I varje omgång vinner A med sannolikhet p och B med sannolikheten $q = 1 - p$. Vinnaren får en krona av förloraren. Antag att A och B tillsammans har a kr. Spelet pågår tills någon av spelarna blir ruinerad. Om A har n kr, $0 \leq n \leq a$, vad är sannolikheten p_n att A blir ruinerad?
Ledning: Visa att $p_n = pp_{n+1} + qp_{n-1}$ för $1 \leq n \leq a - 1$, $p_0 = 1$, $p_a = 0$.

1714. Bevisa med induktion att för Fibonaccitalen F_n gäller:

a) $F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$ för $n \geq 3$ b) $F_n < 2^n$ för $n \geq 0$

c) $\sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$ för $n \geq 0$

d) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k F_k = (-1)^n F_{n-1} - 1$ för $n \geq 1$

e) $\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$ för $n \geq 0$

f) $\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}$ för $n \geq 1$

g) $\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$ för $n \geq 0$

h) $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ för $n \geq 0$

i) $F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{n+2} F_{n-1}$ för $n \geq 1$

j) $F_{2n} = F_{n-1} F_n + F_n F_{n+1}$ för $n \geq 1$.

17.6 Linjära, inhomogena differensekvationer

Vi studerar nu inhomogena differensekvationer

(34) $$y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = d_n, \quad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

där a och b antas reella och $b \neq 0$. Precis som för linjära differentialekvationer räcker det enligt sats 17.4 att finna en partikulärlösning till (34), om vi redan har lösningarna till motsvarande homogena ekvation. Vi nöjer oss med att ange lämplig lösningsansats för några speciella typer av högerled d_n.

A: Antag först att d_n är ett polynom i n av grad q, d.v.s.

$$d_n = b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \ldots + b_1 n + b_0.$$

Då ansätter man en partikulärlösning $y_n^{(p)}$ enligt följande; jämför linjära differentialekvationer:

I. $y_n^{(p)} = a_q n^q + a_{q-1} n^{q-1} + \ldots + a_1 n + a_0$ om $r_1 \neq 1$ och $r_2 \neq 1$.

II. $y_n^{(p)} = n(a_q n^q + a_{q-1} n^{q-1} + \ldots + a_1 n + a_0)$ om **exakt en** av rötterna r_1 och r_2 är $= 1$.

III. $y_n^{(p)} = n^2(a_q n^q + a_{q-1} n^{q-1} + \ldots + a_1 n + a_0)$ om $r_1 = r_2 = 1$.

De från början okända koefficienterna a_q, $a_{q-1}, \ldots, a_1$ och a_0 bestämmer man genom att sätta in i vänsterledet av (34) och identifiera koefficienterna för varje potens av n i de båda leden. Observera att i fall II är $y_n^{(h)} = C$ med godtyckligt C en lösning till motsvarande homogena ekvation, vilket förklarar varför $y_n^{(p)}$ inte innehåller någon konstant term. I fall III är $y_n^{(h)} = C_1 + C_2 n$; detta förklarar varför $y_n^{(p)}$ inte innehåller termer av grad ≤ 1.

EXEMPEL 20. Bestäm en partikulärlösning till $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 3n^2 + 5$.

Lösning: Den karakteristiska ekvationen $r^2 - 4r + 3 = 0$ har enligt exempel

16 rötterna $r_1 = 1$ och $r_2 = 3$ och högerledet är ett polynom av andra graden. Vi gör då (se fall II) ansatsen

$$y_n^{(p)} = n(An^2 + Bn + C) = An^3 + Bn^2 + Cn.$$

Därmed är

$$\begin{aligned} y_{n+2}^{(p)} - 4y_{n+1}^{(p)} + 3y_n^{(p)} &= A(n+2)^3 + B(n+2)^2 + C(n+2) - \\ -4(A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + C(n+1)) &+ 3(An^3 + Bn^2 + Cn) = \\ &= -6An^2 - 4Bn + (4A - 2C). \end{aligned}$$

Detta blir $\equiv 3n^2 + 5$ om och endast om

$$\left\{\begin{array}{lllll} -6A & & & = & 3 \\ & -4B & & = & 0 \\ 4A & & -2C & = & 5 \end{array}\right. , \text{d.v.s.} \left\{\begin{array}{lll} A & = & -\frac{1}{2} \\ B & = & 0 \\ C & = & -\frac{7}{2} \end{array}\right. .$$

Alltså är $y_n^{(p)} = -\frac{1}{2}n^3 - \frac{7}{2}n$ en partikulärlösning.

Svar: $-\frac{1}{2}n^3 - \frac{7}{2}n$.

B: Antag sedan att

$$d_n = (b_q n^q + b_{q-1}n^{q-1} + \ldots + b_1 n + b_0) \cdot k^n,$$

där k är en (reell eller komplex) konstant. Man ansätter då en partikulärlösning

$$y_n^{(p)} = n^m \cdot (a_q n^q + a_{q-1}n^{q-1} + \ldots + a_1 n + a_0)k^n,$$

där m är det antal rötter till den karakteristiska ekvationen som är $= k$.

Observera att vi i **A** har behandlat specialfallet $k = 1$. Konstanterna a_q, $a_{q-1}, \ldots,$ a_1 och a_0 bestämmer man som tidigare genom att sätta in och identifiera.

EXEMPEL 21. Bestäm den lösning till ekvationen $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = n \cdot 3^n$, för vilken $y_0 = 2$ och $y_1 = 5$.

Lösning: Enligt exempel 16 har den karakteristiska ekvationen rötterna $r_1 = 1$ och $r_2 = 3$, varför vi enligt **B** ansätter

$$y_n^{(p)} = n(An + B) \cdot 3^n = (An^2 + Bn) \cdot 3^n.$$

Då är

$$\begin{aligned} y_{n+2}^{(p)} - 4y_{n+1}^{(p)} + 3y_n^{(p)} &= (A(n+2)^2 + B(n+2)) \cdot 3^{n+2} - \\ -4(A(n+1)^2 + B(n+1)) \cdot 3^{n+1} &+ 3(An^2 + Bn) \cdot 3^n = \\ &= (12An + (24A + 6B)) \cdot 3^n. \end{aligned}$$

Detta är $\equiv n \cdot 3^n$ om och endast om

$$\begin{cases} 12A & = 1 \\ 24A + 6B & = 0 \end{cases}, \quad \text{d.v.s.} \quad \begin{cases} A = 1/12 \\ B = -1/3 \end{cases}$$

och därmed

$$y_n^{(p)} = (n^2/12 - n/3) \cdot 3^n.$$

Enligt exempel 16 har motsvarande homogena ekvation den allmänna lösningen

$$y_n^{(h)} = C_1 + C_2 \cdot 3^n.$$

Den inhomogena ekvationen har alltså den allmänna lösningen

$$y_n = C_1 + (C_2 - n/3 + n^2/12) \cdot 3^n.$$

Begynnelsevillkoren ger för $n = 0$ resp. $n = 1$ att

$$\begin{cases} C_1 + C_2 & = 2 \\ C_1 + 3(C_2 - 1/4) & = 5 \end{cases},$$

d.v.s. $C_1 = 1/8$, $C_2 = 15/8$. Alltså är

$$y_n = 1/8 + (15/8 - n/3 + n^2/12) \cdot 3^n.$$

Svar: $y_n = 1/8 + (15/8 - n/3 + n^2/12) \cdot 3^n$.

C: Antag nu att

(35) $$d_n = (b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \ldots + b_1 n + b_0) k^n \cos n\omega$$

eller

(36) $$d_n = (b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \ldots + b_1 n + b_0) k^n \sin n\omega,$$

där $b_0, \ldots, b_q$, k och ω är reella. Vi betraktar i detta fall **hjälpekvationen**

(37) $$y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = (b_q n^q + \ldots + b_1 n + b_0)(k e^{\omega i})^n,$$

i vilken högerledets realdel resp. imaginärdel är högerledet i (35) resp. (36). Vi bestämmer först en partikulärlösning $y_n^{(p)}$ till (37) enligt **B**. Funktionen Re $y_n^{(p)}$ resp. Im $y_n^{(p)}$ blir då en partikulärlösning till (34) med högerledet (35) resp. (36).

Detta följer då man betraktar real- resp. imaginärdelen av de båda leden i (37), där vi förutsatt att a och b är reella; jämför linjära differentialekvationer.

EXEMPEL 22. Bestäm en lösning till $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 2^n \sin(n\pi/2)$.

Lösning: Till hjälpekvationen $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = (2e^{\pi i/2})^n$ ansätter vi enligt **B** lösningen

$$y_n^{(p)} = A(2e^{\pi i/2})^n,$$

eftersom $2e^{\pi i/2}$ inte är en rot till karakteristiska ekvationen; se exempel 16. Vi sätter in i hjälpekvationen och får då

$$A(2e^{\pi i/2})^n(4e^{\pi i} - 8e^{\pi i/2} + 3) = (2e^{\pi i/2})^n,$$

vilket är ekvivalent med

$$A = (-1+8i)/65.$$

Den givna ekvationen har därmed partikulärlösningen

$$\operatorname{Im} y_n^{(p)} = \operatorname{Im}\left[\frac{-1+8i}{65}\cdot 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}\right)\right] = \frac{2^n}{65}\left(8\cos\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{n\pi}{2}\right).$$

Svar: $\dfrac{2^n}{65}\left(8\cos\dfrac{n\pi}{2} - \sin\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

D: Vi avslutar med följande sats, som vi behöver då högerledet i (34) är en summa av termer, som var och en kan behandlas enligt **A, B** eller **C** ovan.

SATS 17.6 (OM EN PARTIKULÄRLÖSNING DÅ HÖGERLEDET ÄR EN SUMMA)

Om z_n och w_n är partikulärlösningar till (34) med högerleden e_n resp. f_n, så är $y_n^{(p)} = z_n + w_n$ en partikulärlösning till (34) med högerledet $d_n = e_n + f_n$.

Bevis: $y_{n+2}^{(p)} + ay_{n+1}^{(p)} + by_n^{(p)} = (z_{n+2} + w_{n+2}) + a(z_{n+1} + w_{n+1}) + b(z_n + w_n) =$
$= (z_{n+2} + az_{n+1} + bz_n) + (w_{n+2} + aw_{n+1} + bw_n) = e_n + f_n = d_n$. |||

EXEMPEL 23. Betrakta ekvationen $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 3n^2 + 5 + n\cdot 3^n$. Med hjälp av sats 17.6 och resultaten i exempel 20 och 21 inser vi att ekvationen har partikulärlösningen $y_n = -n^3/2 - 7n/2 + (n^2/12 - n/3)\cdot 3^n$.

UPPGIFTER

1715. Lös differensekvationerna (där $n \geq 0$)

a) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = -4$ b) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = -4$
c) $y_{n+2} - 3y_{n+1} - 10y_n = 36n - 21$ d) $y_{n+2} + 2y_{n+1} + 2y_n = n^3$
e) $y_{n+2} - \frac{5}{2}y_{n+1} + y_n = 3 + n,\ y_0 = 1,\ y_1 = -1$
f) $y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = 9n^2 + 27n + 100,\ y_0 = y_1 = 5$
g) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 8y_n = 25n,\ y_0 = 0,\ y_1 = 1$ h) $y_{n+1} - 2y_n = n,\ y_0 = 0$ (jfr 1707c)
i) $y_{n+1} + y_n = 3n - 2,\ y_0 = 1$ (jfr 1707d) j) $y_{n+1} - y_n = (n+1)^2,\ y_0 = 2$ (jfr 1707e).

1716. Lös differensekvationerna (där $n \geq 0$)

a) $y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = 3^n$ b) $y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = n\cdot 2^n$
c) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = n\cdot 3^n$ d) $y_{n+2} + 6y_{n+1} + 5y_n = n\cdot(-1)^n,\ y_0 = 0,\ y_1 = -2$
e) $y_{n+2} - 2y_{n+1} - 2y_n = (\sqrt{3}+1)^n,\ y_0 = 1,\ y_1 = \sqrt{3}$

f) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 4y_n = n/2^n$, $y_0 = y_1 = 0$ g) $y_{n+1} - y_n = e^n$, $y_0 = 0$ (jfr 1707a)

1717. Lös differensekvationerna (där $n \geq 0$)

a) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 3n + 2^n$
b) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 4y_n = n \cdot 2^n + 4^n$, $y_0 = 1/3$, $y_1 = 7/3$
c) $y_{n+2} - 4y_n = -6n^2 + 8n + 17 + 2^{n+1}$
d) $9y_{n+2} = y_n + (n+3)(8 + 3^{-n})$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$
e) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 4y_n = 2^n \sin \dfrac{n\pi}{3}$ f) $y_{n+2} + y_n = n \sin \dfrac{n\pi}{2}$
g) $y_{n+1} - y_n = \sin n$, $y_0 = 0$ (jfr 1707b).

1718. En talföljd $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ bestäms av $y_0 = 0$, $y_1 = 1$ och $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 8y_n = n \cdot 2^n$ för $n \geq 0$. Härled en explicit formel för y_n och beräkna med hjälp härav y_{12}.

1719. a) Bestäm Y_n för $n \geq 3$ i exempel 11, då Y_1, Y_2 och I är givna samt $b = 0.9$.
b) Samma uppgift då $I = 0$ och $b = 1$.

1720. Lös differensekvationerna (där $n \geq 0$)

a) $y_{n+3} - 6y_{n+2} + 11y_{n+1} - 6y_n = 2^{n+1}$, $y_0 = 6$, $y_1 = 8$, $y_2 = 12$
b) $y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n = (-1)^n$, $y_0 = y_1 = y_2 = 0$
c) $y_{n+3} - y_{n+2} - y_{n+1} + y_n = 4$, $y_0 = 4$, $y_1 = 1$, $y_2 = 4$.

1721. Bestäm för $n \geq 1$ den n-radiga determinanten $D_n = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$, då

a) $a = \sqrt{5}$ b) $a = 2$ c) $a = \sqrt{3}$ d) $a = 1$ e) $a = 0$.

1722. Lös systemet av differensekvationer (där $n \geq 0$)

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n - z_n, & y_0 = 1 \\ z_{n+1} = z_n + y_{n+1}, & z_0 = 0 \end{cases}.$$

17.7 Kort historik

De grundläggande operationerna i den s.k. **differenskalkylen** är differensbildning och summation, betecknade med Δ och Σ. Dessa motsvarar derivation och integration i infinitesimalkalkylen. Differenssymbolen Δ användes 1706 av Johann

Bernoulli och summationssymbolen Σ år 1755 av Euler.

Differenskalkylen började utvecklas på 1600-talet i samband med interpolationsproblem (se avsnitt 9.8), som hade praktisk betydelse för navigation, astronomi och geografi. **Gregory** (1670) och **Newton** (1676) härledde oberoende av varandra en interpolationsformel, som innehöll differenserna $\Delta f, \Delta^2 f, \ldots$ av första, andra o.s.v. ordningen till en funktion f. **Leibniz** behandlade differenser för talföljder 1666 och för funktioner 1673. Genom **Taylors** verk *Methodus incrementorum directa et inversa* (1715) etablerades differenskalkylen som en separat gren av matematiken.

En viktig differensekvation är $f(x+1) - xf(x) = 0$. Den satisfieras av gammafunktionen $\Gamma(x)$, för vilken $\Gamma(n) = (n-1)!$ då n är ett positivt heltal (se uppgift 1045 i avsnitt 10.7). Linjära differensekvationer med konstanta koefficienter undersöktes ingående av **Lagrange** (1759,1775,1792). **Laplace** behandlade i flera arbeten från 1766 och framåt linjära differensekvationer, även med variabla koefficienter, i samband med problem i sannolikhetskalkylen. En allmän teori för linjära differensekvationer gavs 1885 av Henri **Poincaré** .

I början av 1900-talet fick differensekvationer ökad betydelse, när man bl. a. genom kvantteorin upptäckte att många fenomen i omvärlden inte kan beskrivas korrekt med kontinuerliga funktioner definierade på intervall. Betydelsefulla insatser har gjorts av bl. a. George **Birkhoff**, R.D. **Carmichael**, Salvatore **Pincherle**, Oskar **Perron** och Niels Erik **Nörlund**.

En differentialekvation av första ordningen kan approximeras med en differensekvation av första ordningen genom att man approximerar derivatan $\frac{dy}{dx}$ med en differenskvot $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Detta kallas en **diskretisering** och är ingenting annat än **Eulers** metod för approximativ lösning av differentialekvationer; se avsnitt 14.7. Eftersom differensekvationer är speciellt lämpade för datorberäkningar, ger detta en möjlighet att snabbt lösa differentialekvationer numeriskt, särskilt sedan Eulers metod väsentligt förbättrats.

18 NUMERISKA SERIER

Vi kan i princip addera **ändligt** många tal, oavsett hur många de är. T.ex. är

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{10} = 2\frac{2341}{2520} \approx 2.92897$$

och med hjälp av en programmerbar miniräknare eller en dator finner vi att exempelvis

$$\sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k} \approx 7.48547 \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^{100\,000} \frac{1}{k} \approx 12.09015.$$

I vissa fall kan man härleda en formel för $\sum_{k=1}^{n} a_k$, med vars hjälp man sedan snabbt kan beräkna summan för godtyckligt stort n. Exempelvis är

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

vilket omedelbart ger att t.ex. $\sum_{k=1}^{2\,000} k = 2\,001\,000$ resp. $\sum_{k=1}^{9\,999} \frac{1}{k(k+1)} = 0.9999$. Vi ser också med hjälp av summaformlerna att då $n \to \infty$ går $\sum_{k=1}^{n} k$ mot ∞ medan $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ går mot 1. För $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (liksom för de flesta andra liknande summor) finns ingen exakt sådan formel; se dock uppg. 1825 c.

En summa $\sum_{k=1}^{n} a_k$ av **ändligt** många tal beräknar vi genom att till a_1 successivt addera $a_2, a_3, \ldots, a_n$. Kan vi också addera **oändligt** många tal? Den nyss nämnda metoden med successiv addition ger oss tydligen inte summan av **alla** talen i en talföljd $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. Hur skall vi då definiera summan av alla dessa tal a_k och vad ger den valda definitionen när t.ex. $a_k = \frac{1}{k}$? Vi skall studera dessa problem här. Det visar sig att det i många fall, men **inte alltid**, är möjligt att tilldela talen i en given talföljd $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ en summa.

18.1 Definition och enkla exempel

Låt $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ vara en given (reell eller komplex) talföljd; jämför avsnitt 17.1. Den formella summationen $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, som också skrives $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, kallas (den oändliga) **serien med termerna a_k**. Vi vill nu om möjligt **definiera summan** av talen a_k, tagna i nummerordning. Vi börjar då med att betrakta talföljden $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, där

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

d.v.s. $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$ o.s.v. Med hjälp av denna nya talföljd gör vi följande definition:

DEFINITION (AV EN SERIES DELSUMMOR, KONVERGENS, DIVERGENS OCH SUMMA)

Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är en given serie, så kallas $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ seriens ***n*:te delsumma.**

Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ säges **vara konvergent** (eller **konvergera**) och ha **summan**[1] s, om $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Man skriver då $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$. Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ säges **vara divergent** (eller **divergera**) och sakna summa om $\lim_{n\to\infty} s_n$ inte existerar. Om speciellt $s_n \to \infty$ eller $s_n \to -\infty$ då $n \to \infty$, så säger vi att serien **divergerar mot** ∞ resp. $-\infty$.

OBS. 1. Observera att beteckningen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ används dels för att ange vilken serie det är fråga om, vare sig denna är konvergent eller divergent, dels som beteckning för seriens summa, om serien konvergerar. Jämför med beteckningen $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ för en generaliserad integral; se avsnitt 10.6.

EXEMPEL 1. Betrakta serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots.$$

Här är n:te delsumman

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

varför $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$. Serien är alltså konvergent och har summan 1.

EXEMPEL 2. Serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k(k-1)/2} = 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + \ldots$$

har delsummorna 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0,.... Denna följd saknar gränsvärde. Serien är alltså divergent.

[1] Egentligen borde man säga att seriens termer har summan s.

EXEMPEL 3. För serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \ldots$$

är n:te delsumman

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Därmed gäller att $s_n \to \infty$ då $n \to \infty$, varför serien divergerar mot ∞.

EXEMPEL 4. Serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^k + \ldots$$

kallas en **geometrisk serie med kvoten** q.

Antag först att $a = 0$. Då är $s_n = 0$ för varje q och därmed $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$. Serien $0 + 0 + 0 + \ldots$ är alltså konvergent med summan 0.

Antag sedan att $a \neq 0$. Om då $q = 1$, är $s_n = n \cdot a$, som går mot ∞ eller $-\infty$ då $n \to \infty$, varför serien är divergent. Om $q \neq 1$ är

$$s_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q};$$

se 8° i avsnitt 1.9. För $|q| < 1$ gäller att $q^n \to 0$ då $n \to \infty$ (se sats 17.1) och följaktligen att $s_n \to a/(1 - q)$. Serien är alltså konvergent för dessa q och har summan $a/(1 - q)$, d.v.s.

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots = \frac{a}{1 - q} \quad \text{för } |q| < 1.$$

Om $|q| > 1$ går $|q|^n$ mot ∞ då $n \to \infty$ och om $q = -1$ antar q^n omväxlande värdena ± 1. Talföljden $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ har alltså inget gränsvärde och serien är därmed divergent för dessa q.

EXEMPEL 5. En person A tänker anställa en person B för att under högst 1 000 arbetstimmar tillverka ett stort antal likadana maskindelar. B räknar med att det tar 1 timma att tillverka den första maskindelen och att sedan varje ny del skall ta 0.1% kortare tid än den föregående. Han begär betalning med 100 kr för den första maskindelen, $100/\sqrt[10]{2} \approx 93$ kr för den andra, $100/\sqrt[10]{3} \approx 90$ kr för den tredje och allmänt $100/\sqrt[10]{n}$ för den n:te. Bör A anta anbudet?

Lösning: För att tillverka n maskindelar åtgår tiden

$$t_n = 1 + 0.999 + 0.999^2 + \ldots + 0.999^{n-1} =$$

$$= 1 \cdot \frac{1 - 0,999^n}{1 - 0.999} = 1\,000(1 - 0.999^n) \text{ timmar;}$$

se exempel 4. Arvodet för dessa skulle bli

$$100 + \frac{100}{\sqrt[10]{2}} + \frac{100}{\sqrt[10]{3}} + \ldots + \frac{100}{\sqrt[10]{n}} \geq n \cdot \frac{100}{\sqrt[10]{n}} = 100n^{0.9} \text{ kronor;}$$

jfr exempel 3. Eftersom $t_n < 1\,000$ för alla n, hinner B tillverka hur många delar som helst inom den angivna tiden, varvid arvodet växer obegränsat med n. A bör alltså **inte** anta anbudet! Förklaringen till resultatet är att serien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 0.999^k$ är konvergent, medan serien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{100}{\sqrt[10]{k}}$ är divergent.

Svar: Nej.

OBS. 2. Gränsvärdesreglerna ger oss direkt följande:

1° : Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergerar, så konvergerar också $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ och $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$, där c är en godtycklig konstant. Vidare är då

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ och } \sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

2° : Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar, så divergerar också $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$, då konstanten $c \neq 0$.

3° : $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent om och endast om $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ är konvergent, där m är ett godtyckligt valt positivt heltal. Då serierna är konvergenta är

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^{\infty} a_k.$$

4° : Om den ena av serierna $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergerar och den andra divergerar, så divergerar serien $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$.

Vi lämnar de enkla bevisen som övningsuppgifter; se uppg. 1810 och 1811.

SATS 18.1 (ETT NÖDVÄNDIGT VILLKOR FÖR EN SERIES KONVERGENS)

Om serien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar, så är $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Om $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a \neq 0$ eller om $\lim\limits_{k\to\infty} a_k$ inte finns, är serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ alltså **divergent**.

Bevis: Med beteckningen $s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$ får vi att

$$s_k - s_{k-1} = \sum_{j=1}^{k} a_j - \sum_{j=1}^{k-1} a_j = a_k.$$

Om nu serien konvergerar, så är

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}(s_k - s_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} s_k - \lim_{k\to\infty} s_{k-1} = s - s = 0. \quad |||$$

EXEMPEL 6. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ är divergent, ty $(-1)^k$ har inget gränsvärde då $k \to \infty$.

EXEMPEL 7. $\sum_{k=1}^{\infty} k \sin \frac{1}{k}$ är divergent, ty $\lim_{k\to\infty} k \sin \frac{1}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin 1/k}{1/k} = 1 \neq 0$.

OBS. 3. Observera att sats 18.1 säger:

$$\text{Om } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergerar, så medför detta att } \lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Däremot gäller **inte** omvändningen, d.v.s. $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ **medför inte** att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar. Exempelvis är $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$, medan serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergerar; se exempel 3.

Anm. 1. Begreppet serie kan konkretiseras på följande sätt: Om $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ är en given talföljd, så definieras serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ med termerna a_k, som följden av talpar $\{(a_n, s_n)\}_{n=1}^{\infty}$, där $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ för varje $n \in \mathbf{Z}_+$.

UPPGIFTER

1801. Beräkna

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$

b) $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \dots$

c) $1 + 0.9 + 0.81 + 0.729 + 0.6561 + \dots$

d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$

e) $9 - 6 + 4 - \frac{8}{3} + \dots$

1802. Bevisa att följande gäller för $|q| < 1$:

a) $\frac{1}{1+q} = 1 - q + q^2 - q^3 + \dots + (-1)^k q^k + \dots$

b) $\frac{1+q}{1-q} = 1 + 2q + 2q^2 + \dots + 2q^k + \dots.$

1803. a) Antag att $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Bevisa att $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1}) = a_1$. Använd detta för att beräkna

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \dots$ (tag $a_k = 1/(4k-2)$)

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots$ (tag $a_k = (k+1)/2^{k-1}$)

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{24} + \frac{4}{120} + \dots$ (tag $a_k = 1/k!$).

1804. Beräkna för följande serier $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ den n:te delsumman s_n genom att dela upp a_k i två eller flera termer. Bevisa sedan att serien konvergerar och beräkna dess summa.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 6} + \ldots$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+p)}$ f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+3^k}{4^k} = \frac{5}{4} + \frac{13}{16} + \frac{35}{64} + \ldots$ h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2} = \frac{1}{9} + \frac{2}{225} + \frac{3}{1225} + \ldots.$

1805. Betrakta **den harmoniska serien**, d.v.s. serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{k} + \ldots.$$

a) Beräkna delsummorna s_1, s_2, s_4 och s_8 till denna serie.
b) Bevisa att $s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ genom att skriva

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right).$$

c) Bevisa med hjälp av resultatet i b) att den harmoniska serien är divergent.
d) Beräkna på programmerbar räknedosa delsummorna s_{10}, s_{50}, s_{100}, s_{500} och $s_{5\,000}$ till serien.

1806. Akilles[2] jagar en sköldpadda, som från början har ett försprång på 10 meter; se figur 18.1.

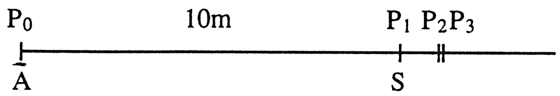


Fig. 18.1

Akilles (A) springer 10 m/s och sköldpaddan (S) 1 m/s. Efter 1 s har A hunnit till P_1, men då har S nått P_2 1 m från P_1. Efter ytterligare 0.1 s når A P_2, men då är S i P_3 0.1 m från P_2 o.s.v. Alltså hinner A aldrig ikapp S! — Detta är en av den grekiske filosofen **Zenons** (ca 450 f.Kr.) paradoxer. Visa att A i själva verket hinner ikapp S och beräkna hur lång tid detta tar. Hur långt har A och S då sprungit?

[2] Akilles var den störste av de grekiska hjältarna i det trojanska kriget (c:a 1200 f. Kr.) och erkänt snabbfotad.

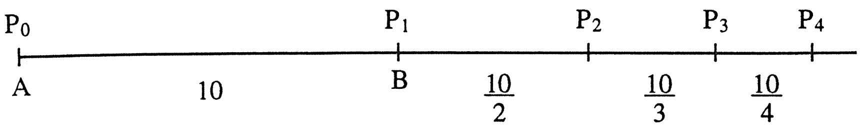


Fig. 18.2

1807. En löpare A springer med den konstanta farten 10 m/s. En annan löpare B kan hålla varje fart som är lägre än 10 m/s. B har från början ett försprång på 10 m; se figur 18.2. Då A springer från P_0 till P_1, väljer B att hålla farten $\frac{1}{2} \cdot 10$ m/s och hinner till P_2 när A når P_1. Då A springer från P_1 till P_2, håller B farten $\frac{2}{3} \cdot 10$ m/s mellan P_2 och P_3 och då A springer mellan P_2 och P_3 hinner B från P_3 till P_4 med farten $\frac{3}{4} \cdot 10$ m/s, o.s.v. A springer alltså hela tiden fortare än B. Hinner A ikapp B?

1808. Två pojkar som befinner sig på avståndet 250 m från varandra börjar springa rakt mot varandra med samma fart: 5 m/s. Samtidigt springer en hund med farten 7.5 m/s fram och tillbaka mellan pojkarna tills de möts. Hur långt har hunden då sprungit? Lös problemet dels med, dels utan användning av serier.

1809. L_1, $L_2, \ldots,$ L_{12} är tolv halvlinjer genom origo i ett koordinatsystem, numrerade moturs. L_1 bildar vinkeln 30° med positiva x-axeln, L_2 30° med L_1 o.s.v.; se figur 18.3. Från en punkt P_1 på L_1 1 längdenhet från origo fälls en normal mot L_2 som skär L_2 i P_2. Från P_2 fälls en normal mot L_3, som skär L_3 i P_3 o.s.v. Sträckorna P_1P_2, P_2P_3, $P_3P_4, \ldots$ bildar en spiralkurva som går oändligt många varv runt origo. Hur lång är denna kurva?

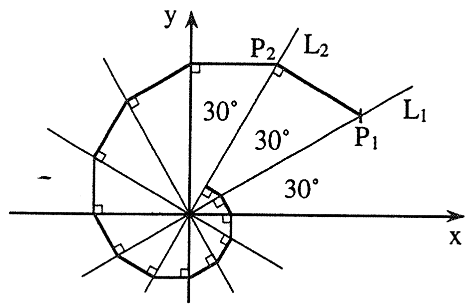


Fig. 18.3

1810. Bevisa att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent om och endast om $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ med $m > 1$ är konvergent, och $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^{\infty} a_k$. — Observera att detta medför att om man tar bort eller ändrar ändligt många termer i en konvergent serie, så får man en ny konvergent serie. Bevisa också motsvarande egenskap hos en divergent serie.

1811. a) Serierna $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergenta och har summorna A resp. B. Bevisa att serierna $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ är konvergenta och har summorna cA resp. $A + B$.
b) Bevisa att om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är divergent, så är $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ divergent för varje $c \neq 0$.
c) Antag att en av serierna $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergent och den andra divergent. Bevisa att serien $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ divergerar.
d) Antag att serierna $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ båda är divergenta. Visa med exempel (där $a_k \neq -b_k$) att serien $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ kan vara konvergent eller divergent.

18.2 Några egenskaper hos talföljder

Vi har tidigare definierat monotona och begränsade funktioner; se avsnitten 5.1 resp. 8.1. Vi behöver nu motsvarande begrepp för talföljder. För bekvämlighets skull formulerar vi därför här definitionerna för detta specialfall.

DEFINITION (AV MONOTONA TALFÖLJDER)

En talföljd $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ säges vara

växande	om	$a_n \leq a_{n+1}$	för alla n;
strängt växande	om	$a_n < a_{n+1}$	för alla n;
avtagande	om	$a_n \geq a_{n+1}$	för alla n;
strängt avtagande	om	$a_n > a_{n+1}$	för alla n;
monoton	om den är växande eller avtagande;		
strängt monoton	om den är strängt växande eller strängt avtagande.		

EXEMPEL 8. Talföljden $\{2/n\}_{n=1}^{\infty}$ är tydligen strängt avtagande. Vidare är talföljden $\{\ln n - 1/n\}_{n=1}^{\infty}$ strängt växande, eftersom både $\ln n$ och $-1/n$ växer då n växer. Även talföljden $\{\ln n + 1/n\}_{n=1}^{\infty}$ är strängt växande, vilket lättast inses av att funktionen $f(x) = \ln x + 1/x$ är strängt växande på $]1, \infty[$, eftersom $f'(x) = 1/x - 1/x^2 = (x-1)/x^2 > 0$ där. Talföljden $\{3+(-1)^n/n\}_{n=1}^{\infty}$ är däremot inte monoton.

DEFINITION (AV BEGRÄNSADE TALFÖLJDER)

En talföljd $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ säges vara **nedåt begränsad** om det finns ett tal A sådant att $a_n \geq A$ för alla n. Analogt säges talföljden vara **uppåt begränsad** om det finns ett tal B sådant att $a_n \leq B$ för alla n. Vidare kallas talföljden **begränsad** om den är både nedåt och uppåt begränsad. Detta är ekvivalent med att det finns ett tal M så att $|a_n| \leq M$ för alla n.

EXEMPEL 9. Talföljderna $\{2/n\}_{n=1}^{\infty}$, och $\{(1-1/n)^n\}_{n=1}^{\infty}$ är begränsade, eftersom $0 < 2/n \leq 2$ resp. $0 \leq (1-1/n)^n < 1$ för alla n. Talföljden $\{k^n\}_{n=1}^{\infty}$ är begränsad om $|k| \leq 1$, ty då är $|k^n| = |k|^n \leq 1$ för alla n. Om $k > 1$ är talföljden nedåt men inte uppåt begränsad och om $k < -1$ är den varken uppåt eller nedåt begränsad.

Vi kan nu formulera följande sats:

SATS 18.2 (OM KONVERGENS FÖR EN MONOTON OCH BEGRÄNSAD TALFÖLJD)

En monoton talföljd är konvergent om (och endast om) den är begränsad.

För en växande talföljd är detta ett specialfall av motsvarande sats för funktioner (sats 8.1). För en avtagande talföljd $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ följer påståendet om man först tillämpar satsen på den växande talföljden $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$, eftersom $\lim_{n\to\infty} a_n =$
$= -\lim_{n\to\infty}(-a_n)$.

Anm. 2. Om $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är växande, är $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbf{Z}_+\}$. Är talföljden avtagande, så är $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbf{Z}_+\}$. Se appendix till kapitel 8.

EXEMPEL 10. Talföljden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är definierad av att $a_1 = b$, där b är en given positiv konstant, och

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \quad \text{för } n = 1,\ 2,\ 3, \ldots. \tag{1}$$

Undersök om talföljden konvergerar och bestäm i så fall dess gränsvärde.

Lösning: Talföljden innehåller tydligen enbart positiva tal eftersom $b > 0$. Om t.ex. $b = 4$, så blir

$$a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{1}{a_1} = 2 + \frac{1}{4} = 2.25,$$

$$a_3 = \frac{a_2}{2} + \frac{1}{a_2} = \frac{9}{8} + \frac{4}{9} = \frac{113}{72} \approx 1.569$$

o.s.v.. Vi inför hjälpfunktionen

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}, \text{ där } x > 0,$$

så att $a_{n+1} = f(a_n)$. Eftersom

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-2}{2x^2},$$

inses att funktionen har ett minsta värde $f(\sqrt{2}) =$
$= \sqrt{2}$. Härav följer att $f(x) \geq \sqrt{2}$ för alla $x > 0$; se figur 18.4. Alltså är $a_n = f(a_{n-1}) \geq \sqrt{2}$ för $n \geq 2$. Vidare är därmed

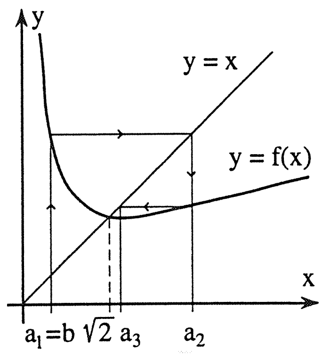


Fig. 18.4

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n}{2} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2a_n}(a_n^2 - 2) \geq 0$$

för alla $n \geq 2$, d.v.s. talföljden $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ är avtagande. Alltså existerar $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ enligt sats 18.2. För att bestämma gränsvärdet a låter vi $n \to \infty$ i (1). Vi får då att

$$a = \frac{a}{2} + \frac{1}{a}, \quad \text{d.v.s.} \quad a = \pm\sqrt{2}.$$

Det negativa värdet förkastas, eftersom $a_n > 0$ för alla n medför att $a \geq 0$. Talföljdens gränsvärde är alltså $\sqrt{2}$ oberoende av startvärdet b.
Man kan konstruera talföljden grafiskt med hjälp av kurvan $y = f(x)$ och linjen $y = x$; se figur 18.4.

Svar: $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ för varje värde på $b > 0$.

EXEMPEL 11. Stirlings formel.[3] Vi vill uppskatta hur snabbt talen i talföljden $\{n!\}_{n=1}^{\infty}$ växer med n. Vi skriver

$$\ln n! = \ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n) = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n = \sum_{k=1}^{n} \ln k,$$

d.v.s. som en summa av funktionsvärden till funktionen $\ln x$ i intervallet $[1, n]$. Denna funktion är kontinuerlig, icke-negativ och strängt växande; se figur 18.5. Måttet för mängden $G_n = \{(x, y) : 1 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq \ln x\}$, som är skuggad i figuren, kan därför uppskattas nedåt och uppåt med hjälp av måtten för rektangelunionerna $A_n = \bigcup_{k=1}^{n-1}\{(x, y) : k \leq x \leq k+1, 0 \leq y \leq \ln k\}$ och $B_n = \bigcup_{k=1}^{n-1}\{(x, y) : k \leq x \leq k+1, 0 \leq y \leq \ln(k+1)\}$; se figur 18.5: Eftersom $A_n \subset G_n \subset B_n$, $m(G_n \setminus A_n) > 0$ och $m(B_n \setminus G_n) > 0$, är
$m(A_n) < m(G_n) < m(B_n)$ (se sats 5.10), d.v.s.

$$\sum_{k=1}^{n-1} 1 \cdot \ln k < m(G_n) < \sum_{k=1}^{n-1} 1 \cdot \ln(k+1) = \sum_{k=2}^{n} 1 \cdot \ln k.$$

Då ju

$$m(G_n) = \int_1^n \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^n = n \ln n - n + 1 = \ln\left(\frac{n}{e}\right)^n + 1,$$

har vi alltså uppskattningarna

$$\ln(n-1)! < \ln\left(\frac{n}{e}\right)^n + 1 < \ln n!,$$

d.v.s.

$$(n-1)! < \left(\frac{n}{e}\right)^n e < n!.$$

Alltså är

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n e < n! < n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e.$$

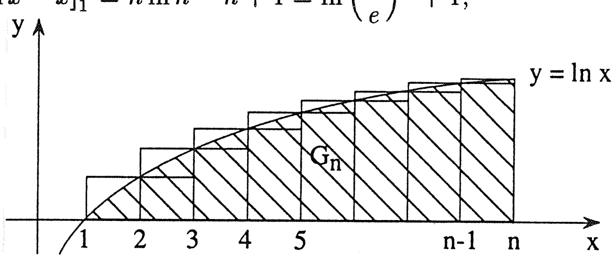


Fig. 18.5

[3] James Stirling, skotsk 1700-talsmatematiker.

Eftersom faktorn $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ för stora n är mycket större än n, visar denna uppskattning att $n!$ **växer ungefär som** $\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Med en bättre uppskattningsmetod kan man bevisa följande formel, som vi behöver längre fram i kursen:

SATS 18.3 (STIRLINGS FORMEL)

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon_n), \quad \text{där } \varepsilon_n \to 0 \text{ då } n \to \infty.$$

Exempelvis är $50! \approx 3.04141 \cdot 10^{64}$ och $\left(\frac{50}{e}\right)^{50} \cdot \sqrt{100\pi} \approx 3.03634 \cdot 10^{64}$, så att **kvoten** mellan dessa båda tal är ≈ 1.0017 och därmed $\varepsilon_{50} \approx 0.0017$. Däremot är **differensen** mellan de båda nämnda talen $\approx 5 \cdot 10^{61}$.

Vi kommer i samband med våra undersökningar av serier att behöva känna till gränsvärdena för några speciella talföljder. Vi sammanfattar dessa i följande sats.

SATS 18.4 (OM NÅGRA GRÄNSVÄRDEN)

1°: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, om a är en positiv konstant.

2°: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

3°: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ för varje konstant a.

Bevis: 1° : Vi skriver $\sqrt[n]{a} = e^{(\ln a)/n}$. Eftersom $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a}{n} = 0$ och funktionen e^x är kontinuerlig i punkten 0, är därmed $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = e^0 = 1$.

2° : Vi skriver $\sqrt[n]{n} = e^{(\ln n)/n}$. Enligt avsnitt 6.5 är $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$. Som i 1° följer därför att $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

3° : Välj heltalet p så att $p > |a|$. Då är för $n > p+1$

$$0 \le \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \left(\frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{|a|}{p}\right) \cdot \left(\frac{|a|}{p+1} \cdot \ldots \cdot \frac{|a|}{n-1}\right) \cdot \frac{|a|}{n} \le \frac{|a|^p}{p!} \cdot 1 \cdot \frac{|a|}{n},$$

(där likheterna gäller då och endast då $a = 0$). Då $n \to \infty$ går högra ledet mot 0 och påståendet följer av instängningsregeln för gränsvärden; se sats 3.1. |||

UPPGIFTER

1812. Beräkna med räknedosa de 10 första talen samt talet a_{50} i följande talföljder $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Bestäm sedan $\lim_{n\to\infty} a_n$ (om det existerar) med hjälp av sats 18.4 samt räkneregler för gränsvärden.

a) $a_n = \sqrt[n]{3}$ b) $a_n = \sqrt[n]{n}$ c) $a_n = \sqrt[n]{n^3}$ d) $a_n = \sqrt[n]{7n^4 + 1000}$
e) $a_n = \sqrt[n]{n^3 + 3^n}$ f) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 7^n}$ g*) $a_n = \sqrt[n]{n!}$.

1813. Talen $b_1,\ b_2, \ldots,\ b_k$ är positiva. Visa att

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_1^n + b_2^n + \ldots + b_k^n} = \max(b_1,\ b_2, \ldots,\ b_k).$$

1814. p är ett naturligt tal och $0 < k < 1$. Visa att talföljden $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, där $x_n = k^n n^p$, är **slutligen strängt avtagande**, d.v.s. det finns ett N så att $x_n > x_{n+1}$ för alla $n \geq N$. Bestäm det minsta möjliga värdet på N, då $k = 0.99$ och $p = 2$.

1815. Betrakta talföljden $\sqrt{b},\ \sqrt{1+\sqrt{b}},\ \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{b}}}, \ldots$, där $b > 0$.

a) Beräkna de fem första talen i följden med fem decimaler då $b = 1$ och då $b = 4$.
b) Visa att talföljden är växande och begränsad då $b = 1$ resp. avtagande och begränsad då $b = 4$.
c) Visa att talföljden konvergerar för godtyckligt $b > 0$ och bestäm gränsvärdet.

1816. Visa att följande talföljder konvergerar och bestäm gränsvärdena:

a) $\sqrt{2},\ \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$ b) $\sqrt{3},\ \sqrt{3+\sqrt{3}},\ \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}, \ldots$.

1817. Bevisa att $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$ existerar.
(Gränsvärdet är $ln\ 2$; se exempel 15 i kap. 10.)

1818. a) I talföljden $1,\ \frac{1}{1+1},\ \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}, \ldots$ är $x_1 = 1$ och $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$. Visa att talföljden är konvergent och beräkna dess gränsvärde. (Talet $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}$ är ett exempel på s.k. oändliga **kedjebråk**.)

b) Samma uppgift för talföljden $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ där $x_1 = 2$ och $x_{n+1} = \frac{3}{2+x_n}$.

1819. Beteckna högerledet i Stirlings formel med $a_n(1+\varepsilon_n)$. Beräkna approximativt med räknedosa ε_n och $n! - a_n$ för

a) $n = 10$ b) $n = 20$ c) $n = 30$.

1820. Beräkna med Stirlings formel

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(n!)^k}{(kn)!}}$, där k är ett positivt heltal.

1821.* a) Visa att om $a_n \to a$, så gäller också att $x_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to a$.

b) Antag att talföljden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ är monoton. Visa att då är också talföljden $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ monoton.

18.3 Positiva serier: huvudsatsen och integralkriteriet

Det är i regel svårt eller t.o.m. omöjligt att beräkna (den exakta) **summan** av en (konvergent) serie. I vissa sammanhang är det tillräckligt att veta om en serie konvergerar eller divergerar, medan däremot seriens summa (om den finns) är av mindre intresse; jfr exempel 5 i avsnitt 18.1. Vi skall därför härleda några satser, s.k. **konvergenskriterier**, med vilkas hjälp man i många fall kan avgöra om en given serie konvergerar eller divergerar. Vi behandlar först, i detta och nästa avsnitt, det enklaste fallet, då alla seriens termer har samma tecken.

DEFINITION (AV POSITIV SERIE)

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ säges vara en **positiv serie** om $a_k \geq 0$ för alla k.

De viktigaste konvergenskriterierna för positiva serier bygger alla på följande sats.

SATS 18.5 (HUVUDSATSEN FÖR POSITIVA SERIER)

En positiv serie är konvergent om och endast om dess delsummor bildar en (uppåt) begränsad talföljd.

Bevis: För en positiv serie är talföljden $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ av seriens delsummor växande. Alltså existerar $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, d.v.s. serien är konvergent, om och endast om följden av delsummor är begränsad; se sats 18.2. |||

EXEMPEL 12. Serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{k^2} + \ldots$$

är konvergent. Serien är ju positiv och vidare är

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) =$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2 \quad \text{för alla } n \geq 2.$$

Följden $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ av delsummor är alltså (uppåt) begränsad och serien är därmed konvergent enligt huvudsatsen för positiva serier.—Man kan bevisa att seriens summa är $\pi^2/6 \approx 1.64493$; se kapitel 20.

Följande konvergenskriterium bygger på en jämförelse mellan en positiv serie och en generaliserad integral över ett obegränsat intervall. Satsen kan användas för att avgöra konvergens eller divergens hos serien, då man vet om motsvarande integral konvergerar eller divergerar.

SATS 18.6 (INTEGRALKRITERIET)

Antag att funktionen f är positiv och avtagande på intervallet $[1, \infty[$. Då är serien $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergent om och endast om integralen $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ är konvergent.

EXEMPEL 13. Den harmoniska serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent, ty funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ är positiv och avtagande på $[1, \infty[$ och integralen $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$ är divergent; se sats 10.14.

EXEMPEL 14. Serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ är konvergent enligt integralkriteriet, eftersom funktionen $1/x^{3/2}$ är positiv och avtagande på $[1, \infty[$ och $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\, dx$ är konvergent; se sats 10.14.

Bevis för sats 18.6: Den positiva serien $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ har den n:te delsumman $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$. Geometriskt kan s_{n-1} och $\sum_{k=2}^{n} f(k) = s_n - f(1)$ tolkas som areamåtten av de trappstegsformade rektangelunionerna

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n-1} \{(x, y) : k \leq x \leq k+1,\ 0 \leq y \leq f(k)\} \quad \text{i figur 18.6 resp.}$$

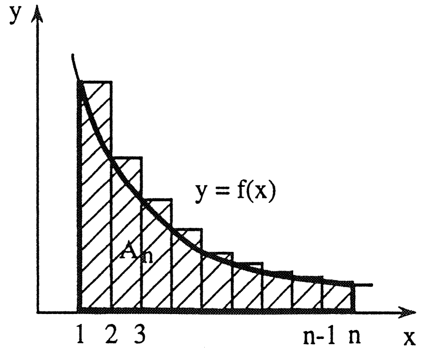


Fig. 18.6

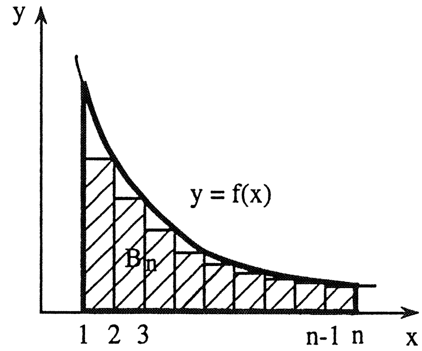


Fig. 18.7

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n-1} \{(x,y) : k \le x \le k+1,\ 0 \le y \le f(k+1)\} \text{ i figur 18.7.}$$

Den punktmängd C_n, som markerats med den tjockare konturen i figurerna ovan, d.v.s. $C_n = \{(x,y) : 1 \le x \le n,\ 0 \le y \le f(x)\}$, har areamåttet $m(C_n) =$
$= \int_1^n f(x)\,dx$. Eftersom $B_n \subseteq C_n \subseteq A_n$, är $m(B_n) \le m(C_n) \le m(A_n)$, d.v.s.

$$s_n - f(1) \le \int_1^n f(x)\,dx \le s_{n-1} \le s_n. \tag{2}$$

1°: Om $\int_1^\infty f(x)\,dx$ är konvergent, så är talföljden $\{s_n\}_{n=1}^\infty$ uppåt begränsad, eftersom $s_n - f(1) \le \int_1^n f(x)\,dx \le \int_1^\infty f(x)\,dx$. Därmed är serien $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ konvergent enligt huvudsatsen för positiva serier; se sats 18.4.

2°: Om $\int_1^\infty f(x)\,dx$ divergerar, d.v.s. $\int_1^n f(x)\,dx \to \infty$ då $n \to \infty$, så följer av den högra olikheten i (1) att även $s_n \to \infty$ då $n \to \infty$, varför serien $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ divergerar. |||

Nästa sats är en enkel tillämpning av integralkriteriet.

SATS 18.7 (OM SERIERNA $\sum_{k=1}^\infty k^{-p}$)

Då p är en given konstant, är serien $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^p}$ konvergent om $p > 1$ men däremot divergent om $p \le 1$.

Bevis: Vi betraktar först $p > 0$ och använder integralkriteriet med $f(x) = 1/x^p$, som är positiv och avtagande på $[1, \infty[$. Eftersom $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ är konvergent när $p > 1$ och divergent när $p \leq 1$ (se sats 10.14), får vi att $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^p$ är konvergent då $p > 1$ och divergent då $0 < p \leq 1$. Om slutligen $p \leq 0$, så är serien divergent enligt sats 18.1; då går nämligen $1/k^p$ inte mot noll då $k \to \infty$. |||

EXEMPEL 15. Serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1.01}}$ är alltså konvergent, medan serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent.—Det är intressant att jämföra de båda seriernas delsummor: t.ex. är $\sum_{k=1}^{1\,000} \frac{1}{k^{1.01}} \approx 7.253$ och $\sum_{k=1}^{1\,000} \frac{1}{k} \approx 7.485$ samt $\sum_{k=1}^{10\,000} \frac{1}{k^{1.01}} \approx 9.377$ och $\sum_{k=1}^{10\,000} \frac{1}{k} \approx 9.788$. Skillnaden mellan dessa resp. delsummor är ju inte särskilt stor, men trots detta är den ena serien konvergent och den andra divergent. Vi noterar att (2) ger att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{1.01}} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^{1.01}} = 1 + \left[\frac{x^{-0.01}}{-0.01}\right]_1^n = 101 - \frac{100}{n^{0.01}} < 101 \text{ för alla } n$$

och att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n \to \infty \text{ då } n \to \infty.$$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ växer dock så långsamt med n att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \ln n < 101 \quad \text{då} \quad n < e^{100} \approx 2.688 \cdot 10^{43}.$$

Anm. 3. För en dator, som gör 10^9 additioner per sekund, skulle fortfarande efter $8 \cdot 10^{26}$ år $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ vara < 101. Datorer hjälper oss alltså inte här.

UPPGIFTER

1822. Bevisa att serien $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$ konvergerar för $p > 1$ men divergerar för $0 < p \leq 1$.

1823. Bevisa att serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{a^2 + k^2}$, där $a > 0$ är en konstant, konvergerar och har en summa s sådan att $0 < s < \pi/2$.

1824. Antag att man på ett horisontellt underlag staplar lika stora tegelstenar på varandra, så att kortändan på varje tegelsten skjuter ut utanför kortändan på den sten, som ligger närmast under. Om man har ett obegränsat antal tegelstenar till sitt förfogande, hur långt kan man med bibehållen balans hos stapeln få den översta stenen att skjuta ut utanför den understa?

1825. Hur många termer i den harmoniska serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ behövs för att delsumman skall överstiga a) 10 b) 100? (Svara genom att uppskatta det sökta antalet uppåt och nedåt.)

c*) Låt s_n vara n:te delsumman till serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, d.v.s. $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Bevisa att talföljden $\{s_n - \ln n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar mot ett gränsvärde γ sådant att $0 \leq \gamma < 1$. (Resultatet kan skrivas $s_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n$, där $\varepsilon_n \to 0$ då $n \to \infty$. Talet γ kallas **Eulers konstant**; dess värde[4] avrundat till 4 decimaler är 0.5772.)
Ledning: Visa att talföljden är avtagande och nedåt begränsad och tillämpa sats 16.2. Använd bl.a. uppskattningen (2) i beviset för sats 18.6
d) Lös uppgifterna a) och b) med hjälp av resultatet i c).

1826.* Låt $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+x}}$ för $x > 0$. Bevisa att

a) $\lim_{x \to 0+} x f(x) = 1$ b) $\lim_{x \to \infty} 2^x (f(x) - 1) = 1/2$.

18.4 Ytterligare några konvergenskriterier för positiva serier

Den viktigaste metoden, då man vill undersöka om en positiv serie är konvergent, är **jämförelse** med en serie, om vilken man redan vet att den är konvergent eller att den är divergent. Man använder då det s.k. **jämförelsekriteriet**, som vi här skall presentera i två versioner. Senare i detta avsnitt ger vi ytterligare två konvergenskriterier, vilkas bevis bygger på jämförelsekriteriet.

SATS 18.8 (JÄMFÖRELSEKRITERIET)

Antag att $0 \leq a_k \leq b_k$ för alla k. Då gäller

1°: $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergerar $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar;

2°: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergerar.

[4] $\gamma = 0.57721\,56649\,01532\,86060\,65120\ldots$

Bevis: Om de n:te delsummorna till $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ betecknas s_n resp. σ_n, så är

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k = \sigma_n.$$

$1°$: Antag att $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergent. Då är talföljden $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ uppåt begränsad enligt huvudsatsen för positiva serier och olikheten ovan visar därmed att även talföljden $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ är uppåt begränsad. Huvudsatsen ger därför att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent.
$2°$: Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är divergent, så ger huvudsatsen att $s_n \to \infty$ då $n \to \infty$. Alltså följer av olikheten ovan att även $\sigma_n \to \infty$ då $n \to \infty$, varför $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är divergent. |||

$1°$ säger att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar om $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, som då kallas **jämförelseserie**, konvergerar. Analogt säger $2°$ att $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergerar om jämförelseserien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergerar.

OBS. 4. Det är i själva verket tillräckligt att olikheten $0 \leq a_k \leq b_k$ är uppfylld för $k > m$, där m är något positivt heltal, eftersom ändring av ett ändligt antal termer i en serie inte ändrar seriens egenskap att vara konvergent resp. divergent; se OBS. 2.

OBS. 5. När $0 \leq a_k \leq b_k$ ger jämförelsekriteriet inget besked om $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, då $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar, eller om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, då $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergerar!

EXEMPEL 16. Konvergerar eller divergerar serien $\sum_{k=1}^{\infty} \tan(1/k)$?
Lösning: Vi vet att $1/k < \tan(1/k)$ för varje heltal ≥ 1 och att $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ divergerar; se avsnitt 5.5 resp. sats 18.7. Med $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ som jämförelseserie ger därför $2°$ i jämförelsekriteriet att $\sum_{k=1}^{\infty} \tan(1/k)$ divergerar.
Svar: Serien divergerar.

EXEMPEL 17. Undersök om serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ konvergerar eller divergerar.
Lösning: Vi erinrar oss att logaritmfunktionen växer långsammare än varje potensfunktion; se avsnitt 6.5. T.ex. gäller

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{\sqrt{k}} = 0,$$

varför $\dfrac{\ln k}{\sqrt{k}} < 1$ (t.ex.) för alla $k > m$, där m är en viss konstant. För $k > m$ gäller därmed att

$$0 \leq \frac{\ln k}{k^2} = \frac{\ln k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{k^{3/2}} < \frac{1}{k^{3/2}}.$$

Jämförelseserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ är konvergent enligt sats 18.7. Jämförelsekriteriet och OBS. 4 ger därmed att serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ är konvergent.

Svar: Serien konvergerar.

Anm. 4. I exempel 17 duger varje serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ med $1 < p < 2$ som jämförelseserie. Vi kan då utnyttja att $\frac{\ln k}{k^q} \to 0$ för $q = 2 - p > 0$.

Ibland är det inte så lätt att jämföra termerna i två serier med hjälp av en olikhet. Då kan följande kriterium fungera bättre:

SATS 18.9 (JÄMFÖRELSEKRITERIET PÅ GRÄNSVÄRDESFORM)

Om $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = A > 0$, så är de positiva serierna $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ antingen båda konvergenta eller båda divergenta.

Bevis: Av gränsvärdesdefinitionen följer att det finns ett tal m sådant att

$$\left|\frac{a_k}{b_k} - A\right| < \frac{A}{2} \quad \text{för alla } k > m,$$

d.v.s.

$$\frac{1}{2}A < \frac{a_k}{b_k} < \frac{3}{2}A \quad \text{då } k > m.$$

Detta kan skrivas

$$\frac{1}{2}Ab_k < a_k < \frac{3}{2}Ab_k \quad \text{för alla } k > m.$$

Vi använder nu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}Ab_k$ resp. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2}Ab_k$ som jämförelseserier till $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, då $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är divergent resp. konvergent. Eftersom multiplikation av alla termerna i en serie med en och samma konstant $\neq 0$ ej påverkar konvergens eller divergens (se OBS. 2), följer påståendet därmed ur jämförelsekriteriet (sats 18.8). |||

Anm. 5. På liknande sätt bevisas för positiva serier:

A. Om $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergerar och $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 0$, så konvergerar även $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

B. Om $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergerar och $\frac{a_k}{b_k} \to \infty$ då $k \to \infty$, så divergerar även $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

EXEMPEL 18. Konvergerar eller divergerar serien $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(1/k)$?
Lösning: Olikheten $0 < \sin(1/k) < 1/k$ ger inget resultat om vi använder jämförelsekriteriet med serien $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ som jämförelseserie, eftersom denna serie divergerar; se sats 18.7 och OBS. 5. Jämförelsekriteriet **på gränsvärdesform** ger dock att även serien $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(1/k)$ är **divergent**, eftersom
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sin(1/k)}{1/k} = 1.$$
Svar: Serien divergerar.

EXEMPEL 19. Undersök om serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$ konvergerar.
Lösning: För att få en uppfattning om storleken av seriens allmänna term använder vi Maclaurins formel för $\ln(1+x)$; se kap. 16:
$$a_k = \frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2k^2} - O\left(\frac{1}{k^3}\right) = \left(\frac{1}{2} - O\left(\frac{1}{k}\right)\right)\frac{1}{k^2}.$$
Med den konvergenta serien $\sum_{k=1}^{\infty}(1/k^2)$ som jämförelseserie ger nu jämförelsekriteriet på gränsvärdesform att serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är **konvergent**, eftersom
$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{1/k^2} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2} - O\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \frac{1}{2}.$$
Svar: Serien konvergerar.

Genom jämförelse med en geometrisk serie kan vi med hjälp av jämförelsekriteriet härleda ytterligare två konvergenskriterier, som **vid sin användning** inte kräver någon jämförelse. Tyvärr är dessa kriterier dock användbara endast för serier som "konvergerar resp. divergerar snabbt"—ungefär som geometriska serier. Man är därför i regel tvungen att använda de allmännare jämförelsekriterierna, d.v.s. satserna 18.8 och 18.9. De båda kriterier vi nu skall behandla är dock lämpliga att använda för potensserier (kapitel 19).

SATS 18.10 (ROTKRITERIET)

Antag att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är en positiv serie och att $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = A$. Då är serien konvergent om $A < 1$ och divergent om $A > 1$.

OBS. 6. Rotkriteriet ger inte någon upplysning då $A = 1$. Detta inses om vi betraktar serierna $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$, av vilka den förstnämnda divergerar och den sistnämnda konvergerar. För båda dessa serier är $A = 1$.

Bevis: Om $A < 1$, så finns tal q och m så att $\sqrt[k]{a_k} < q < 1$ för $k > m$. Man kan t.ex. välja $q = \frac{A+1}{2}$. Alltså är $a_k < q^k$ då $k > m$. Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är därmed konvergent enligt jämförelsekriteriet, eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ är en konvergent geometrisk serie då $0 < q < 1$.

Om $A > 1$, så finns ett tal N sådant att $\sqrt[k]{a_k} > 1$, d.v.s. $a_k > 1$, för $k > N$. Därmed divergerar $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, eftersom a_k inte går mot 0 då $k \to \infty$. |||

SATS 18.11 (KVOTKRITERIET)

Antag att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är en positiv serie och att $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = A$. Då är serien konvergent om $A < 1$ och divergent om $A > 1$.

OBS. 7. Inte heller kvotkriteriet ger någon upplysning i fallet $A = 1$; studera samma serier som nämnts i OBS. 6.

Bevis: Om $A < 1$, så finns tal q och m så att $\frac{a_{k+1}}{a_k} < q < 1$ då $k \geq m$. Alltså är

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot a_m < a_m q^{k-m} = cq^k \text{ då } k > m.$$

Därmed ger jämförelsekriteriet och OBS. 4 att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent, eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} cq^k$ är en konvergent geometrisk serie då $|q| < 1$.

Om $A > 1$, så finns ett tal N så att $\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$, och därmed $a_{k+1} > a_k$, när $k > N$. Då måste $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ vara divergent, eftersom a_k ej går mot 0 då $k \to \infty$. |||

EXEMPEL 20. Undersök för vilka värden på den positiva konstanten a, som serien $\sum_{k=1}^{\infty} k^{99}a^k$ konvergerar resp. divergerar.

Lösning: Vi använder rotkriteriet. Eftersom

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^{99}a^k} = \left(\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}\right)^{99} \cdot a = 1 \cdot a = a,$$

är serien konvergent om $a < 1$ men divergent om $a > 1$. Vi kunde också ha använt kvotkriteriet, ty

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{99}a^{k+1}}{k^{99} \cdot a^k} = a \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{99} = a.$$

Om slutligen $a = 1$, så har vi serien $\sum_{k=1}^{\infty} k^{99}$, som är divergent, eftersom seriens termer ej går mot 0.

Svar: Serien konvergerar om $0 < a < 1$, divergerar om $a \geq 1$.

OBS. 8. För att undersöka konvergensen av en **negativ serie** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, där $a_k \leq 0$, kan man tillämpa de ovan givna kriterierna på $\sum_{k=1}^{\infty}(-a_k)$; se OBS. 2. Kriterierna kan också användas på serier, vilkas termer från och med något visst index är ≥ 0 resp. ≤ 0, eftersom ändring av ett ändligt antal termer i en serie ej ändrar seriens egenskap att vara konvergent resp. divergent; se OBS. 2.

UPPGIFTER

Avgör vilka av följande serier som är konvergenta och vilka som är divergenta (uppgift 1827-1830).

1827. a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k^2\sqrt{k+1}}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+\sin 3k}{k\sqrt{k}}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k+k^2}{4^k+1}$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{10^k}{k!}$.

1828. a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k\sqrt{k}}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{(3k)!}$.

1829. a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k+\frac{1}{k}}-\sqrt{k}\right)$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{\pi}{k}\right)$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{k}$ d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \left(\ln\frac{k+1}{k-1}-\frac{2}{k}\right)$.

1830. a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[k]{k}-1\right)$ b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \ln\cos\frac{\pi}{k}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+(1/k)}}$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{-(\ln k)^2}$.

1831. Visa att var och en av följande serier är konvergent och beräkna seriens summa:

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)(k+4)}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}-2\sqrt{k})$.

1832. För vilka positiva tal x konvergerar

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{\sqrt{n}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{\ln n}$?

18.5 Serier med godtyckliga termer

Satserna i avsnitten 18.3 och 18.4 gäller endast för **positiva** serier. För exempelvis serierna

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k} = \sin 1 + \frac{1}{2}\sin 2 + \frac{1}{3}\sin 3 + \dots$$

och

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-z \ln k}, \text{ där } z \text{ är ett givet komplext tal,}$$

får vi söka andra metoder för att avgöra frågan om konvergens eller divergens. Vi behandlar till en början serier med **reella** termer och nöjer oss sedan med en kort kommentar om serier med **komplexa** termer; se också uppgift 1839. Först bevisar vi följande enkla sats.

SATS 18.12 (OM ABSOLUT KONVERGENS; REELLA FALLET)

Om serien $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är konvergent, så är också serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

Bevis: Vi skriver

$$a_k = (a_k + |a_k|) - |a_k|.$$

Eftersom $0 \leq a_k + |a_k| \leq 2|a_k|$, följer av förutsättningen i satsen och jämförelsekriteriet att serien $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + |a_k|)$ är konvergent. a_k är alltså differensen mellan de k:te termerna i de båda konvergenta serierna $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + |a_k|)$ och $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Då är också serien $\sum_{k=1}^{\infty}((a_k + |a_k|) - |a_k|) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent; se OBS. 2. |||

DEFINITION (AV ABSOLUT RESP. BETINGAT KONVERGENT SERIE)

Om serien $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergerar, så kallas (den konvergenta) serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **absolut konvergent**. Om serien $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergerar och $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar, så kallas serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **betingat konvergent**.

EXEMPEL 21. Serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ är (absolut) konvergent, eftersom serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent.

EXEMPEL 22. Serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^{3/2}}$ är (absolut) konvergent enligt jämförelsekriteriet, ty

$$\left|\frac{\sin k}{k^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{k^{3/2}} \text{ för alla } k$$

och serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ är konvergent.

EXEMPEL 23. Serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ är inte absolut konvergent, eftersom serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent. Vi skall nedan visa att serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ändå är konvergent; den är därmed betingat konvergent.

OBS. 9. Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är absolut konvergent, så är $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Enligt triangelolikheten är nämligen
$|s_n| = |\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = A$, varför $-A \leq s_n \leq A$ för alla n. Eftersom $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ existerar enligt sats 18.12, ger en räkneregel för gränsvärden (se 6° i sats 3.1) att $-A \leq s \leq A$, d.v.s. $|s| \leq A$.

OBS. 10. Om $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ eller $\lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| > 1$, så är serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **divergent**, ty då gäller ju **inte** att $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$; jfr bevisen för rot- och kvotkriterierna.

DEFINITION (AV ALTERNERANDE SERIE)

En serie kallas **alternerande** om **varannan** term är positiv och **varannan** negativ. Om seriens första term är positiv, har serien alltså formen

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k, \quad \text{där } a_k > 0.$$

Vi presenterar nu ett kriterium, som för alternerande serier ger ett tillräckligt villkor för konvergens, utan att serien behöver vara absolut konvergent.

SATS 18.13 (LEIBNIZ' KONVERGENSKRITERIUM)

Om $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ är en **avtagande** följd av (positiva) tal med gränsvärdet 0, så är den alternerande serien $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ konvergent.

Bevis: Förutsättningarna i satsen innebär att

(3) $$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_k \geq a_{k+1} \geq \ldots \text{ och}$$

(4) $$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Betrakta delsummorna s_{2n} med jämnt index. Eftersom

$$s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) = s_{2n-2} + (a_{2n-1} - a_{2n}),$$

så medför (2) att $s_{2n} \geq s_{2n-2}$ för varje n. Man kan också skriva

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n},$$

och det följer därför av (3) att $s_{2n} \leq a_1$ för alla n. Talföljden $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ är alltså växande och uppåt begränsad och därmed konvergent (enligt sats 18.2 om monotona talföljder). Om dess gränsvärde betecknas med s, är således

(5) $$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s.$$

Betrakta nu delsummorna s_{2n+1} med udda index. Eftersom

$$s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1},$$

så följer av (4) och (5) att även

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = s + 0 = s.$$

Alltså är $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, d.v.s. serien är konvergent. |||

EXEMPEL 24. Serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ är alternerande och termernas absolutbelopp bildar den avtagande talföljden $\{1/k\}_{k=1}^{\infty}$, som har gränsvärdet 0. Alltså är serien (betingat) konvergent; jfr exempel 23 ovan.

EXEMPEL 25. Man kan använda Leibniz' kriterium på serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ och finner då att den är konvergent. Men i detta fall kan man också med hjälp av sats 18.12 konstatera att serien är (absolut) konvergent; se exempel 21.

EXEMPEL 26.* Leibniz' kriterium kan inte användas på serien $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k + (-1)^k}$. Serien är visserligen alternerande och termerna går mot 0 då $n \to \infty$, men termernas belopp bildar ej en avtagande talföljd. Ty om $a_k = 1/(k+(-1)^k)$, är $a_{2m} = 1/(2m+1)$ och $a_{2m+1} = 1/(2m)$ och därmed $a_{2m} < a_{2m+1}$. Serien är inte heller absolut konvergent. Visa som övning att serien är betingat konvergent! (Ledning: Studera delsummorna s_{2n}; de kan förenklas genom att man slår ihop termerna två och två. Visa att $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s$ existerar och sedan att också $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s$.)

Antag slutligen att serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ har **komplexa termer**. Även i detta fall gäller satsen om absolut konvergens:

SATS 18.14 (OM ABSOLUT KONVERGENS; KOMPLEXA FALLET)

Om $a_k \in \mathbf{C}$ och serien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är konvergent, så är också serien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

Bevis: Om $a_k = b_k + ic_k$ med reella b_k och c_k, så är $|b_k| \leq |a_k|$ och $|c_k| \leq |a_k|$. Enligt jämförelsekriteriet är då serierna $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ och $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ konvergenta och därmed är enligt sats 18.12 även serierna $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergenta. Påståendet följer sedan av OBS. 2 eller uppgift 1839. |||

UPPGIFTER

1833. Visa att serien $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin(kx)}{k\sqrt{k}}$ är konvergent för varje reellt tal x.

1834. Är serien $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k^2} \arctan k^2}{k^2}$ konvergent eller divergent?

1835. Konvergerar eller divergerar serierna

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k \ln k}{k^{4/3}}$ b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(\sin k)\tan(1/k)}{\sqrt{k}}$?

1836. Vilka av följande serier är konvergenta?

a) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{\ln k}$ b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \dfrac{k+1}{2k}$ c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin \dfrac{k+1}{k}\pi$ e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin \dfrac{k^2+1}{k}\pi$.

1837. Konvergerar eller divergerar

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \arctan n}{n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ c*) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n n}$

d*) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1+(-1)^n\sqrt{n}}$?

1838.* Ge exempel på två serier $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sådana att den ena är konvergent och den andra är divergent och $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = 1$. (Jämför med sats 18.9.)

1839. Bevisa att serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ med komplexa termer $a_k = b_k + ic_k$, där b_k och c_k är reella, är konvergent om och endast om serierna $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ båda är konvergenta, och att i så fall

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k + i\sum_{k=1}^{\infty} c_k.$$

(Jämför med sats 12.12.)

1840. Konvergerar eller divergerar serien

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n(\ln n)^2}\ ?$$

1841.* Visa att serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-s\ln k}, \quad \text{där } s \text{ är ett komplext tal,}$$

är absolut konvergent i halvplanet Re $s > 1$.

(Funktionen $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ kallas **Riemanns zätafunktion**.)

18.6 Omordning av serier

I kapitel 19 kommer vi att bevisa att den konvergenta serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ (se exempel 24) har summan ln 2, d.v.s.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k} + \ldots = \ln 2 \approx 0.693147\ldots; \tag{6}$$

se också avsnitt 16.3. Följande serie får man ur (6) genom att summera termerna i en annan ordning—efter varje positiv term kommer två negativa termer:

$$(7)\quad 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\ldots.$$

Summan av de $3n$ första termerna i denna serie är

$$\sigma_{3n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}s_{2n},$$

där s_{2n} är summan av de $2n$ första termerna i serien (6). Alltså har σ_{3n}.gränsvärdet $\frac{1}{2}\ln 2$ då $n\to\infty$. Detsamma gäller för $\sigma_{3n+1}=\sigma_{3n}+1/(2n+1)$ och $\sigma_{3n+2}=$ $=\sigma_{3n}+1/(2n+1)-1/(4n+2)$. Således är $\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k=\dfrac{1}{2}\ln 2$, d.v.s. serien (7) har summan $\frac{1}{2}\ln 2$. Omordningen av serien (6) har alltså gett en serie med hälften så stor summa!

Serien (6) är betingat konvergent (och alltså ej absolut konvergent). Man kan bevisa följande sats, vars innehåll väl måste betraktas som ganska överraskande:

SATS 18.15 (OM OMORDNING AV EN BETINGAT KONVERGENT SERIE)

En **betingat konvergent** serie kan alltid omordnas så, att den erhållna serien får **vilken summa man vill** eller **blir divergent**.

Däremot gäller följande sats.

SATS 18.16 (OM OMORDNING AV EN ABSOLUT KONVERGENT SERIE)

Varje omordning av en **absolut konvergent** serie ger en absolut konvergent serie med samma summa som den givna serien.

Vi genomför ej bevisen för dessa satser. Se dock uppg. 1842 nedan!

UPPGIFTER

1842. Antag att serierna

$$(8)\quad \sum_{k=1}^{\infty}a_k,\qquad (9)\quad \sum_{k=1}^{\infty}a_k^+\qquad \text{och}\qquad (10)\quad \sum_{k=1}^{\infty}a_k^-$$

har följande egenskaper: (8) är betingat konvergent, och (9) resp. (10) består av de positiva resp. negativa termerna i (8).

a) Visa att serierna (9) och (10) är divergenta.

b) Visa att (8) kan omordnas till en serie med en godtyckligt vald summa A. (Genom att omväxlande ta n_1 termer ur (9), n_2 termer ur (10), n_3 termer ur (9) o.s.v. kan man konstruera delsummor, som består av n_1, n_1+n_2, $n_1+n_2+n_3, \ldots$ termer och som omväxlande är större än A resp. mindre än A. Eftersom $a_k \to 0$ då $k \to \infty$, kan man samtidigt få dessa delsummor att skilja sig godtyckligt lite från A genom att ta med tillräckligt många termer.)

1843. Följande serier är omordningar av serien (6) i början av detta avsnitt. Undersök om serierna är konvergenta eller divergenta.

a) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{2n+2}+\ldots$

b) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}-\frac{1}{18}+\frac{1}{7}-\ldots$

(Efter varje term av formen $\frac{1}{2n-1}$ följer $2n-1$ negativa termer.)

18.7 Kort historik

Oändliga geometriska serier med kvot mellan 0 och 1 betraktades mycket tidigt. Redan **Aristoteles** (på 300-talet f.Kr.) insåg att dessa har en summa, Nicolas **d'Oresme** bevisade ca 1360 att den harmoniska serien är divergent med metoden i uppgift 1805. Francois **Viète** angav 1593 formeln för summan av en oändlig geometrisk serie och Gregoire **de Saint Vincent** visade (1647) att **Zenons** paradox om Akilles och sköldpaddan (400-talet f.Kr.; se uppg. 1806) kan lösas genom summation av en oändlig geometrisk serie.

Leibniz fann (1674) den berömda formeln

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}.$$

Denna är dock inte särskilt lämpad för beräkning av talet π, eftersom den konvergerar så långsamt att det skulle krävas ca 100 000 termer för att nå den noggrannhet som var känd redan av Arkimedes! Även serien

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots=\ln 2$$

konvergerar mycket långsamt. James **Gregory** fann dock(1668) den betydligt snabbare konvergerande serien

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5+\frac{2}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7+\ldots=\ln 2;$$

jfr anm. 2 i avsnitt 16.3. Jakob **Bernoulli** använde jämförelsekriteriet för att bevisa att serien

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$$

är divergent; han jämförde med den harmoniska serien.

Innan stränga definitioner av konvergens och av en series summa hade formulerats, ledde studiet av vissa serier till häftiga kontroverser och orimliga resultat. En sådan serie var

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots,$$

som med olika motiveringar angavs ha summan 0, 1 eller 1/2. Det sistnämnda värdet förespråkades av **Leibniz** och av **Euler**. Ett annat exempel på resultat, som vid denna tid betraktades som svårförklarliga, är

$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots = -1,$$

vilket erhölls genom att man satte $q = 2$ i likheten (jfr exempel 4)

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q}.$$

Euler beräknade med geniala metoder ett stort antal seriers summor, t.ex.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

och

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots = \frac{\pi^3}{32}.$$

Han visade också att

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma$$

existerar; detta gränsvärde kallas numera **Eulers konstant** (jfr uppgift 1825).

Termerna "konvergent serie" resp. "divergent serie" infördes av **Gregory** (1668). **Leibniz** fann 1713 sin sats om konvergens av vissa alternerande serier. Colin **Maclaurin** bevisade 1742 integralkriteriet, vilket senare återupptäcktes av **Cauchy**. Kvotkriteriet formulerades av **d'Alembert** (1768) och mera fullständigt av Edward **Waring** (1776). Den sistnämnde angav också att $\sum_1^\infty k^{-p}$ konvergerar då $p > 1$ och divergerar då $p < 1$.

Omkring 1810 började **Fourier, Gauss** och **Bolzano** grundlägga en stringent teori för serier, vilket saknades tidigare, Fourier formulerade 1811 definitionen av konvergens för en serie. Han betonade också att ett nödvändigt villkor för konvergens är att seriens termer går mot 0.

Cauchy och **Abel** gjorde också betydande insatser inom teorin för serier. Cauchy var även den förste som (1821) i en lärobok utförligt behandlade serier, då han bl.a. angav rot- och kvotkriterierna.

Dirichlet bevisade 1837 att man i en absolut konvergent serie kan omordna termerna på godtyckligt sätt utan att konvergensen påverkas och utan att summan ändras. Han angav också exempel, som visade att termerna i en betingat konvergent serie kan omordnas så att summan ändras. **Riemann** visade 1854 att man genom en lämplig omordning kan få vilken summa man vill.

Stirlings formel för $n!$ härleddes samma år (1730) först av Abraham **de Moivre** och sedan av James **Stirling**, som också bestämde ett noggrant uttryck för felet i approximationen av $\ln n!$ för stora n.

19 POTENSSERIER

I kapitel 18 har vi studerat serier $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, vilkas termer a_k är reella eller komplexa tal. Vi skall nu betrakta s.k. **potensserier** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$, där a och a_k är konstanter och x är en reell eller komplex variabel. De är ett specialfall av allmänna **funktionsserier** $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$. Vi kommer att visa att många funktioner f kan framställas som potensserier, i den meningen att $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$, då x tillhör något lämpligt intervall. Vi kommer också att använda potensserier för att lösa vissa differentialekvationer. Några av de icke-elementära funktioner, som kommer fram på detta sätt, är viktiga för olika tillämpningar och har fått egna namn. Ett sådant exempel är Besselfunktioner.

Potensserier har sin största betydelse i teorin för komplexvärda funktioner av en komplex variabel, då x, a och a_k får anta komplexa värden. Vi formulerar den viktiga satsen om potensseriers konvergens (sats 19.2) i den allmänna komplexa formen, men i övrigt håller vi oss i huvudsak till det reella fallet.

19.1 Taylorserier och maclaurinserier

Antag att f är en funktion som har derivator av **alla** ordningar på ett intervall I. Om a och x tillhör I, ger då Taylors formel (sid. 1) en framställning

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x), \tag{1}$$

för varje naturligt tal n . Summan $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ i högra ledet är en delsumma till serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Denna kallas **taylorserien till f i punkten a.**

Enligt (1) är $P_n(x) = f(x) - R_{n+1}(x)$, vilket visar att $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$, **om** (och endast om) **resttermen $\mathbf{R_{n+1}(x)} \to \mathbf{0}$** då $n \to \infty$. Enligt definitionen av en series summa, är således taylorserien till f konvergent och har summan $f(x)$, för varje x sådant att $R_{n+1}(x) \to 0$ då $n \to \infty$. För dessa x är alltså

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

d.v.s. $f(x)$ kan framställas som summan av sin taylorserie.

Vi skall nu utnyttja denna observation för att härleda serieutvecklingar av några elementära funktioner. Vi väljer $a = 0$ och får då serien $\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)x^k/k!$, som i överensstämmelse med terminologin i kapitel 16 kallas **maclaurinserien till** f.

SATS 19.1 (OM MACLAURINSERIER FÖR VISSA ELEMENTÄRA FUNKTIONER)

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \text{ för alla } x$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \text{ för alla } x$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \text{ för alla } x$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \text{ då } -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \text{ då } |x| \leq 1$$

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^k = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \ldots \text{ då } |x| < 1$$

för alla reella tal p (den s.k. **binomialserien**).

Bevis: Enligt vad vi sagt ovan, följer formlerna i satsen av motsvarande maclaurinutvecklingar (se kap. 16), om vi kan visa att resp. resttermer $R_{n+1}(x) \to 0$ då $n \to \infty$.

För $f(x) = e^x$ är $R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$; se sid. 5. I detta fall är därmed $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$ för varje x, eftersom $0 < e^{\theta x} \leq e^{|x|}$ och $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ då $n \to \infty$; se 3° i sats 18.4, sid. 64. Formlerna för $\sin x$ och $\cos x$ får man på samma sätt; jfr resttermsuppskattningarna på sid. 6-7.

För $f(x) = \ln(1+x)$ är resttermen enligt (2), sid.10

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)},$$

vilket ger uppskattningarna

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{1}{n+1} \text{ om } 0 \leq x \leq 1 \text{ resp.}$$

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{1}{(n+1)(1+x)} \text{ om } -1 < x < 0.$$

Detta medför att $R_{n+1}(x) \to 0$ då $n \to \infty$, då $-1 < x \leq 1$. (Däremot går resttermen inte mot noll för $x > 1$.)

I maclaurinutvecklingen av $\arctan x$ är

$$R_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+(\theta x)^2)},$$

där $0 < \theta < 1$; se (9), sid. 14. Om $|x| \leq 1$ ger detta att $|R_{2n+1}(x)| \leq \frac{1}{2n+1}$, varför $R_{2n+1}(x) \to 0$ då $n \to \infty$. (Däremot går resttermen inte mot noll om $|x| > 1$.) Utvecklingen av $(1+x)^p$ härleds senare, i exempel 5, sid. 93.|||

Anm. 1. I den komplexa funktionsteorin utvidgas sats 19.1 till komplexa tal z. Potensserieutvecklingarna av e^z, $\sin z$ och $\cos z$ gäller då för alla z, medan utvecklingarna av $\ln(1+z)$, $\arctan z$ och $(1+z)^p$ gäller då $|z| < 1$ (och för vissa z med $|z| = 1$).

Anm. 2. Det **kan** inträffa att taylorserien till en funktion $f(x)$ är konvergent men har en summa som **inte** är $f(x)$. T.ex. gäller det för funktionen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{för } x \neq 0 \\ 0 & \text{för } x = 0 \end{cases}$$

att $f^{(k)}(0) = 0$ för $k = 0, 1, 2, \ldots$; jfr uppg. 1621, sid. 13. Maclaurinserien till f är alltså $0 + 0 + 0 + \ldots$ och är konvergent med summan 0 för alla x, trots att $f(x) \neq 0$ för $x \neq 0$.

UPPGIFTER

1901. Utveckla följande funktioner i maclaurinserie med hjälp av sats 19.1, och ange de intervall där utvecklingarna gäller

a) $\cosh x$ b) $\sinh x$ c) xe^x

d) $(e^x - 1)/x$ för $x \neq 0$, $f(0) = 1$ e) $\dfrac{\arctan x}{x}$ för $x \neq 0$, $f(0) = 1$

f) $\ln\sqrt{1+x^2}$ g) $(1-x^2)\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ h) $\sin^2 x$.

19.2 Potensserier och deras konvergens

Serierna i föregående avsnitt är exempel på potensserier. Vi skall nu studera allmänna resultat om sådana seriers konvergens.

DEFINITION (AV POTENSSERIE)

Med en **potensserie** menas en serie av formen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ eller allmännare } \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

där koefficienterna a_k och talet z_0 är givna reella (eller komplexa) tal och z är en reell (eller komplex) variabel.

Mängden av de komplexa tal z, för vilka en given potensserie är konvergent, är i stort sett en cirkelskiva med centrum i 0 resp. z_0; se närmare följande sats. Eftersom det allmänna fallet kan återföras på specialfallet $z_0 = 0$ genom substitutionen $z - z_0 = w$, behandlar vi i fortsättningen bara fallet $z_0 = 0$.

SATS 19.2 (OM POTENSSERIERS KONVERGENS)
För konvergensen av en given potensserie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ gäller en av följande tre möjligheter; se fig. 19.1:

1°: Serien konvergerar endast för $z = 0$.

2°: Serien konvergerar (absolut) för alla z.

3°: Det finns ett tal $R > 0$ sådant att serien konvergerar (absolut) då $|z| < R$ och divergerar då $|z| > R$.

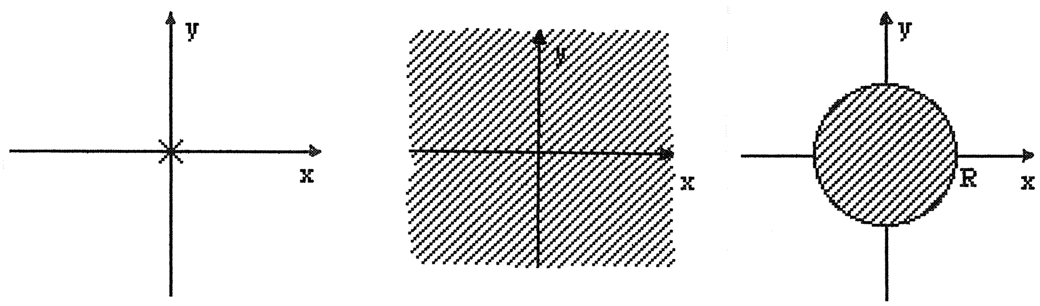


Fig. 19.1

OBS. 1. I fall 3° konvergerar alltså (den komplexa) potensserien i varje punkt z innanför cirkeln med radien R och medelpunkten i origo, och serien divergerar i varje punkt utanför cirkeln. Denna kallas **konvergenscirkeln** och talet R kallas **konvergensradien** till den givna potensserien. I fall 1° säger vi att $R = 0$ och i fall 2° att "$R = \infty$".

OBS. 2. För reella z innebär fall 3° att potensserien konvergerar på ett intervall av längd $2R$ med mittpunkt i 0. Detta kallas seriens **konvergensintervall**. Det kan, som vi kommer att se, vara öppet, halvöppet eller slutet. I ytterlighetsfallen 1° och 2° urartar konvergensintervallet till enbart punkten 0 resp. hela tallinjen.

OBS. 3. Observera att satsen **inte** ger någon upplysning om konvergens eller divergens för potensserien då $|z| = R > 0$, d.v.s. för punkterna på konvergenscirkeln — bl.a. konvergensintervallets ändpunkter $\pm R$.

Anm. 3. Att alla tre möjligheterna i sats 19.2 verkligen inträffar visas av exemplen i slutet av detta avsnitt.

Vi nöjer oss med att bevisa den del av sats 19.2, som behandlar konvergensen för **reella** värden på z, i det fall då också koefficienterna a_k är reella. Samma bevis fungerar även i det allmänna, komplexa fallet utan några större ändringar. Vi börjar med en hjälpsats:

SATS 19.3 (HJÄLPSATS OM POTENSSERIERS KONVERGENS)
Om potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar i punkten $x_0 \neq 0$, så konvergerar serien (absolut) för alla x sådana att $|x| < |x_0|$. (Jfr fig. 19.2!)

Bevis: Eftersom $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ konvergerar, är $\lim_{k\to\infty} a_k x_0^k = 0$; sats 18.1, sid. 57. Därför har vi t.ex. att $|a_k x_0^k| < 1$ för alla tillräckligt stora k — låt oss säga för $k > K$. Detta ger att

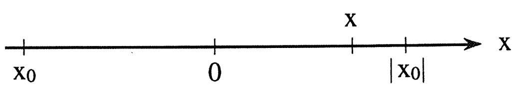


Fig. 19.2

$$|a_k x^k| = |a_k x_0^k (\frac{x}{x_0})^k| = |a_k x_0^k| |\frac{x}{x_0}|^k < |\frac{x}{x_0}|^k \text{ då } k > K.$$

För varje x är $\sum_{k=0}^{\infty} |\frac{x}{x_0}|^k$ en geometrisk serie med kvoten $\frac{|x|}{|x_0|}$ och konvergerar därför då $|x| < |x_0|$. Enligt jämförelsekriteriet (sid. 70) är alltså $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$ konvergent och därmed $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ (absolut) konvergent då $|x| < |x_0|$; se sats 18.12, sid. 76). |||

Bevis för sats 19.2: Låt M vara den delmängd av tallinjen, där potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar. Eftersom serien konvergerar för $x = 0$, är mängden M inte tom. Vi skiljer nu på två fall:

A. M är inte begränsad. Till varje tal x finns då ett tal x_0 i M sådant att $|x_0| > |x|$. Enligt sats 19.3 måste därför $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergera (absolut). Eftersom detta gäller för varje x, har vi fall 2°.

B. M är begränsad. Då har M ett supremum R, som är det minsta tal b, för vilket M är delmängd av $]-\infty, b]$. Detta tal R är ≥ 0. För varje $x = x_0$ med $|x_0| > R$ måste serien vara divergent. Om den vore konvergent, skulle den ju enligt sats 19.3 konvergera även på intervallet mellan R och $|x_0|$, vilket strider mot definitionen av R. Därmed är det i fallet $R = 0$ klart att serien konvergerar endast för $x = 0$, så att fall 1° föreligger.
Om $R > 0$, återstår det att visa att serien är konvergent för varje $x = x_1$ med $|x_1| < R$. Enligt definitionen av R måste det i intervallet $]|x_1|, R[$ finnas något x_0 för vilket serien konvergerar, och då konvergerar den också för x_1 enligt sats 19.3. Alltså har vi fall 3°. |||

För många potensserier kan konvergensradien bestämmas ganska enkelt med hjälp av ett gränsvärde, enligt någon av de två följande satserna.

SATS 19.4 (ROTFORMELN FÖR KONVERGENSRADIEN)
Om $\sqrt[k]{|a_k|} \to H$ då $k \to \infty$, så har potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ konvergensradien $R = 1/H$. Om $H = 0$ är "$R = \infty$", d.v.s. serien konvergerar för alla z. Om "$H = \infty$", är $R = 0$.

Anm. 4. Ytterlighetsfallen $H = 0$ och "$H = \infty$" svarar alltså mot fall 2° resp. fall 1° i sats 19.2.

Bevis: I. Vi antar först att gränsvärdet H existerar och är $\neq 0$. Då är

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k z^k|} = |z| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |z|H. \tag{2}$$

Enligt rotkriteriet (sats 18.10) konvergerar därför potensserien absolut om $|z|H < 1$, d.v.s. för alla z med $|z| < 1/H$. För $|z| > 1/H$ ger rotkriteriet endast att serien **ej** är absolut konvergent. Men av (2) följer i detta fall att

$$\sqrt[k]{|a_k z^k|} > 1 \text{ och därmed } |a_k z^k| > 1 \tag{3}$$

för alla tillräckligt stora k . Termerna $a_k z^k$ går då inte mot 0 när $k \to \infty$, och serien måste därför vara divergent (sats 18.1). Vi har alltså visat att $R = 1/H$.

II. Om $H = 0$, ger (2) och rotkriteriet att serien konvergerar för alla z, d.v.s. att "$R = \infty$".

III. Om slutligen $\sqrt[k]{|a_k|} \to \infty$ då $k \to \infty$ och $z \neq 0$, så gäller (3) för stora k. Detta medför som ovan att serien divergerar. Vi har $R = 0$. |||

SATS 19.5 (KVOTFORMELN FÖR KONVERGENSRADIEN)
Om $|a_{k+1}/a_k| \to K$ då $k \to \infty$, så har potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ konvergensradien $R = 1/K$. Ytterlighetsfallen $K = 0$ och "$K = \infty$" svarar mot "$R = \infty$" resp. $R = 0$. (Jämför med föregående sats!)

Beviset är helt analogt med beviset ovan men bygger på kvotkriteriet (sats 18.11). Vi genomför det inte.

Anm. 5. Sats 19.4 kan generaliseras så att konvergensradien kan bestämmas även i de fall då inget gränsvärde H existerar. Detta sker genom att man på följande sätt inför ett annat begrepp i stället för gränsvärde:
Om man för en godtycklig **begränsad** talföljd $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ sätter $A_n = \sup_{k \geq n} t_k$, så får man en avtagande talföljd $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ och denna har alltid ett gränsvärde A. Detta kallas **limes superior** för $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ och betecknas $\limsup_{k\to\infty} t_k$. Om talföljden är konvergent, är

$$\limsup_{k\to\infty} t_k = \lim_{k\to\infty} t_k.$$

Med limes superior i stället för limes blir formeln i sats 19.4 allmängiltig, d.v.s. konvergensradien är

$$R = 1/\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Om talföljden $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}_{k=0}^{\infty}$ inte är begränsad uppåt, sättes dess limes superior "$= \infty$", och konvergensradien R är 0.

EXEMPEL 1. Bestäm konvergensradien för binomialserien $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^k$, då p inte är ett naturligt tal.
Lösning: Vi använder sats 19.5:

$$|a_{k+1}/a_k| = \left|\binom{p}{k+1} / \binom{p}{k}\right| = \left|\frac{p-k}{k+1}\right| = \left|\frac{1-\frac{p}{k}}{1+\frac{1}{k}}\right| \to 1 = K \text{ då } k \to \infty$$

Konvergensradien är alltså $1/K = 1$.
Svar: $R = 1$.

EXEMPEL 2. Bestäm de reella x för vilka följande potensserier konvergerar:
a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k!x^k$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k2^k}$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{5^k\sqrt{k}}$.
Lösning: a) $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \frac{(k+1)!}{k!} = k+1 \to \infty$ då $k \to \infty$. Enligt sats 19.5 är därför konvergensradien $R = 0$. Potensserien konvergerar alltså bara för $x = 0$.
b) $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{1}{k^k}} = \frac{1}{k} \to 0$ då $k \to \infty$. Därmed är $R = \infty$ enligt sats 19.4. Vi har alltså (absolut) konvergens för varje x.

c) $\sqrt[k]{|a_k|} = 1/\sqrt[k]{k2^k} = 1/(2\sqrt[k]{k}) \to \frac{1}{2}$ då $k \to \infty$, ty $\sqrt[k]{k} \to 1$; se 2° i sats 18.4, sid. 64. Enligt sats 19.4 är därför $R = 2$. Potensserien konvergerar alltså (absolut) för $|x| < 2$ och divergerar för $|x| > 2$. Det återstår att undersöka om serien konvergerar då $x = \pm 2$. Då $x = 2$ har vi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, d.v.s. den harmoniska serien, som är divergent. Då $x = -2$ har vi serien $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$, som konvergerar enligt Leibniz' konvergenskriterium; se exempel 24, sid. 78. Potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k2^k}$ konvergerar alltså då $-2 \le x < 2$, men inte då $x < -2$ eller då $x \ge 2$.

d) Gränsvärdet i sats 19.4 existerar inte, eftersom $a_k = 0$ för udda k, medan vi för stora jämna tal $2k$ har $\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \frac{1}{\sqrt[2k]{5^k\sqrt{k}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4k]{k}} \approx 1/\sqrt{5}$. Vi kan ändå lösa uppgiften med hjälp av substitutionen $x^2 = t$ och omskrivning av serien på formen

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{t^k}{5^k\sqrt{k}}.$$

För denna potensserie i t är

$$H = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{5^k\sqrt{k}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{5\, k^{(1/2k)}} = \frac{1}{5}.$$

Den har alltså konvergensradien 5 enligt sats 19.4. För $t = 5$ får vi serien $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}$ som är konvergent enligt Leibniz' konvergenskriterium. Den givna serien konvergerar alltså för reella x med $x^2 \le 5$, d.v.s. för $|x| \le \sqrt{5}$.

Svar: a) $x = 0$ b) alla x c) $-2 \le x < 2$ d) $|x| \le \sqrt{5}$.

UPPGIFTER

1902. Bestäm de reella x, för vilka potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ är konvergent, då a_k är

a) $\dfrac{(-1)^k k}{2^k(k^2+1)}$ b) $\dfrac{1}{\cosh k}$ c) $(1+\dfrac{1}{k})^{k^2}$ d) $\dbinom{k+p}{k}$, p nat. tal

e) $\dfrac{(-1)^k k^{2k}}{k!}$ f) $\dfrac{k^k}{k!}$ g) $(-1)^k \dfrac{k!}{(2k)!}$ h) $\dfrac{(k!)^2}{k^{2k}}$

i) $\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}$ j) $\arctan \dfrac{1}{k}$ k) $(\arctan \dfrac{1}{k})^2$ l) $\dfrac{1}{k\ln(k+1)}$

m) $2^k(1 - \cos \dfrac{1}{\sqrt{k}})$ n) $\dfrac{(k+1)^{k^2}}{k^{k^2+2}}$ o) $\sqrt{\dfrac{2k+1}{k^2+1}}$ p) $1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{k}$

q) $\dfrac{1}{k(5^k - 4^k)}$ r) 3^p för $k = 2p-1$ och $(-4)^p$ för $k = 2p$.

1903. För vilka reella x konvergerar

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k}x^{2k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{-k}k!x^{2k-1}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k}x^{3k}$?

1904. Bestäm konvergensradierna till följande potensserier:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}x^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!}x^n$, där k är ett naturligt tal

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}$.

19.3 Derivation och integration av potensserier

SATS 19.6 (OM TERMVIS DERIVERING OCH INTEGRERING AV POTENSSERIER)

Antag att potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ har konvergensradien $R > 0$ och summan

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

då $-R < x < R$. För dessa x gäller då att

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \tag{4}$$

och att

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}. \tag{5}$$

Potensserierna i högerleden av (4) och (5) har också konvergensradien R.

Satsen säger att potensserien får deriveras och integreras "term för term" i intervallet $]-R, R[$. Detta är inte alls självklart, och det motsvarande gäller inte för godtyckliga funktionsserier. Vi skall diskutera termvis derivering och integrering något i 19.5 och utförligare i appendix, där vi bl.a. bevisar sats 19.6.

Anm. 6. Om $H = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ existerar, kan vi lätt visa påståendet att alla tre potensserierna i sats 19.6 har samma konvergensradie. Serierna (4) och (5) kan nämligen skrivas

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k \text{ för } x \neq 0 \text{ resp.}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^k.$$

Konvergensradierna bestäms därför enligt sats 19.4 av $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|ka_k|}$ resp. $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{|a_k|}{k+1}}$, som båda är H, eftersom $\sqrt[k]{k} \to 1$ och $\sqrt[k]{k+1} \to 1$, då $k \to \infty$.

EXEMPEL 3. Med hjälp av summan av den geometriska serien $1 - t^2 + t^4 - \ldots = \frac{1}{1+t^2}$ då $|t| < 1$, får vi då $|x| < 1$ att

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

(Jfr sats 19.1, där serieutvecklingen av $\arctan x$, för $|x| \le 1$, härleddes med en annan metod.)

EXEMPEL 4. Ur likheten

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \text{ då } |x| < 1$$

erhålles genom derivering

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots \text{ för } |x| < 1.$$

Speciellt får vi t.ex. för $x = 0.9$ att $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) 0.9^n = 100$.

EXEMPEL 5. Binomialserien
Antag att $p \neq 0, 1, 2, \ldots$. Potensserien

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^k$$

har konvergensradien 1; se exempel 1, sid. 90. Enligt sats 19.6 är då för $|x| < 1$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{p}{k} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{p}{k+1} x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{p(p-1)\ldots(p-k)}{(k+1)!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (p-k) \binom{p}{k} x^k =$$

$$= p \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{p}{k} x^k = pf(x) - x \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{p}{k} x^{k-1} = pf(x) - xf'(x).$$

Vi har alltså att $(1+x)f'(x) = pf(x)$ och därmed

$$D\ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{p}{1+x}.$$

Integration ger $\ln|f(x)| = p\ln(1+x)+\ln|C|$, varav $f(x) = C(1+x)^p$. Vidare måste då $C = f(0) = \binom{p}{0} = 1$, så att $f(x) = (1+x)^p$, d.v.s.

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^k.$$

Därmed har vi bevisat den sista formeln i sats 19.1.

EXEMPEL 6. Maclaurinserien för tan x
Eftersom $\tan x$ är en udda funktion, har den en maclaurinserie med enbart termer av udda grad:

(6) $$\tan x = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \ldots.$$

Vidare är som bekant $D(\tan x) = 1 + \tan^2 x$. Insättning av (6) i båda leden ger med hjälp av termvis derivering

$$c_1 + 3c_3x^2 + 5c_5x^4 + \ldots = 1 + (c_1x + c_3x^3 + \ldots)^2 =$$

$$= 1 + c_1^2x^2 + (c_1c_3 + c_3c_1)x^4 + (c_1c_5 + c_3c_3 + c_5c_1)x^6 + \ldots.$$

Då varje potens av x måste ha samma koefficient i båda leden, får vi

$$\begin{aligned} c_1 &= 1, \\ 3c_3 &= c_1c_1, \\ 5c_5 &= c_1c_3 + c_3c_1, \\ 7c_7 &= c_1c_5 + c_3c_3 + c_5c_1, \\ &\ldots \\ (2n+1)c_{2n+1} &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} c_{2k-1}c_{2n-2k+1}. \end{aligned}$$

Detta ger en möjlighet att successivt bestämma koefficienterna:
$c_1 = 1,\ \ c_3 = \frac{1}{3},\ \ c_5 = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{15},\ \ c_7 = \frac{1}{7}(\frac{4}{15} + \frac{1}{9}) = \frac{17}{315}, \ldots.$
Seriens konvergensradie är $\pi/2$, men det kan vi inte bevisa här.

Anm. 7. Det finns ingen explicit allmän formel för koefficienterna c_k i maclaurinserien för $\tan x$, som uttrycker dem i enklare kända storheter. Däremot kan de anges med hjälp av fakultetssymboler och de s.k. **Bernoullis tal** B_n, som också kan bestämmas rekursivt.

UPPGIFTER

1905. Visa att om potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ har positiv konvergensradie och summan $f(x)$, så är $a_k = f^{(k)}(0)/k!$, d.v.s. potensserien är maclaurinserien till f (**entydighetssats för maclaurinserier**).

1906. Utveckla följande funktioner i potensserier och ange seriernas konvergensradier:

a) $\frac{1}{x-2} (= -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}})$ b) $\frac{1}{x^2-4}$ c) $(\frac{1-x}{1+x})^2$

d) $\frac{1}{(1-x)^3}$ e) $\frac{1}{x^2-3x+2}$ (dela upp i partialbråk).

1907. Utveckla med hjälp av exempel 5 funktionen $1/\sqrt{1-x^2}$ i potensserie och härled sedan potensserieutvecklingen av $\arcsin x$.

1908. Bestäm konvergensintervallet och summan för följande potensserier. (Använd bl.a. termvis derivering.)

a) $1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} x^{2n+1}$.

1909. Beräkna (genom att använda lämpliga potensserier) summorna av följande serier:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ c) $1 - \frac{2}{4} + \frac{3}{16} - \frac{4}{64} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n 2^{2-2n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n!}$, för $p = 1, 2$ och 3 e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n!} = \frac{3}{2!} + \frac{8}{3!} + \frac{15}{4!} + \ldots$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n(n+2)3^{n+2}}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$.

1910. Visa att funktionen $f(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots$ satisfierar differentialekvationen $y'' + y' + y = e^x$ och bestäm $f(x)$ med hjälp av detta.

1911. Potensserien $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ har positiv konvergensradie. Beräkna för $p = 1, 2$ och 3 summan av serien

$$a_1 x + 2^p a_2 x^2 + 3^p a_3 x^3 + \ldots + n^p a_n x^n + \ldots.$$

1912*. Potensserien $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$ har konvergensradien $R > 0$. Sätt $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = s_n$ och visa att

$$\frac{f(x)}{1-x} = s_0 + s_1 x + \ldots + s_n x^n + \ldots, \text{ för } |x| < \min(1, R).$$

(Multiplicera utvecklingarna av $f(x)$ och $\frac{1}{1-x}$ termvis. Detta är tillåtet på grund av absolut konvergens. $\min(1, R)$ betecknar det minsta av talen 1 och R.)

1913*. Beräkna summan av serien

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n})x^n \text{ för } |x|<1.$$

19.4 Lösning av differentialekvationer med potensserier

Många problem leder till differentialekvationer som inte är av de typer, som vi behandlat i kap. 14-15. Ofta kan man dock erhålla vissa lösningar i form av potensserier. Denna metod har viktiga tillämpningar både inom teknik och ren matematik. Vi demonstrerar metoden med två exempel.

EXEMPEL 7. Bestäm i form av en potensserie en lösning till differentialekvationen $(4-x^2)y''+y=0$ med $y(0)=1$, $y'(0)=0$. Bestäm seriens konvergensradie.

Lösning: Antag att det finns en lösning $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, där serien har konvergensradie $R>0$. För $|x|<R$ är då enligt sats 19.6

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},\quad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n,$$

$$x^2y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n.$$

Insättning i differentialekvationens vänsterled ger att

$$(4-x^2)y''+y=\sum_{n=0}^{\infty}[4(n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n+a_n]x^n.$$

Detta blir $\equiv 0$ endast[1] om varje x-potens har koefficienten 0, d.v.s. om

$$4(n+2)(n+1)a_{n+2}=(n^2-n-1)a_n \text{ för } n=0,\ 1,\ 2,\ldots.$$

Alltså är

$$a_{n+2}=\frac{n^2-n-1}{4(n+2)(n+1)}\cdot a_n \text{ för } n=0,1,2,\ldots. \tag{7}$$

Begynnelsevillkoren ger $a_0=1$ och $a_1=0$. Därmed kan alla koefficienterna

[1] Jfr uppg. 1905

bestämmas successivt med hjälp av (7):

$a_2 = -\frac{1}{8}a_0 = -\frac{1}{8}$,

$a_3 = -\frac{1}{24}a_1 = 0 = a_5 = a_7 = \dots$,

$a_4 = \frac{1}{48}a_2 = -\frac{1}{384}$,

$a_6 = \frac{11}{120}a_4, \dots$.

Vi får inte något enkelt uttryck för a_{2k} i "sluten form". Däremot kan vi bestämma seriens konvergensradie: Om vi sätter $x^2 = t$, får serien formen $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}t^k$. Konvergensradien R^* för denna serie bestäms enligt sats 19.5 av

$$K = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{2(k+1)}}{a_{2k}}\right|.$$

Vi har enligt (7) att

$$\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = \frac{4k^2 - 2k - 1}{4(2k+2)(2k+1)} = \frac{1 - \frac{1}{2k} - \frac{1}{4k^2}}{4(1+\frac{1}{k})(1+\frac{1}{2k})} \to \frac{1}{4} = K.$$

Således är $R^* = \frac{1}{K} = 4$. Vår potensserie konvergerar alltså för $x^2 < 4$, d.v.s. för $|x| < 2$, men divergerar för $|x| > 2$.

Svar: $y = 1 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{384}x^4 - \dots$ med konvergensradie $R = 2$.

EXEMPEL 8. Bessel-funktionen $J_0(x)$.

En för tillämpningar viktig typ av icke elementära funktioner är de s.k. Bessel-funktionerna (eller cylinderfunktionerna) $J_n(x)$. De behövs t.ex. då man studerar elektriska fält med cylindrisk symmetri (symmetri med avseende på rotation kring en axel). $J_n(x)$ är lösning till **Bessels differentialekvation**

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

(där n inte behöver vara ett heltal). Här skall vi i form av en potensserie bestämma $J_0(x)$, som är den lösning till differentialekvationen $xy'' + y' + xy = 0$, för vilken $y(0) = 1$.

Lösning: Vi ansätter potensserien $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k$ och får analogt med föregående exempel för $|x| < R$, där R är seriens konvergensradie

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} ka_kx^{k-1}, \quad xy'' = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)a_kx^{k-1}.$$

Insättning i differentialekvationen ger därför

$$a_1 + \sum_{k=2}^{\infty}(k^2a_k + a_{k-2})x^{k-1} \equiv 0.$$

Detta medför att

$$a_1 = 0 \text{ och } k^2 a_k + a_{k-2} = 0 \text{ för } k = 2, 3, \dots$$

och därmed rekursionsformeln

$$a_k = -a_{k-2}/k^2 \text{ för } k = 2, 3, \dots . \tag{8}$$

Begynnelsevillkoret ger $a_0 = 1$. Vi får sedan successivt med hjälp av (8)

$$a_2 = -a_0/4 = -1/4 = -1/2^2,$$

$$a_3 = -a_1/9 = 0 = a_5 = \dots,$$

$$a_4 = -a_2/4^2 = 1/4^3 = 1/[2^4(2!)^2],$$

$$a_6 = -a_4/6^2 = -a_4/2^2 3^2 = -1/[2^6(3!)^2],$$

$$\dots$$

$$a_{2p} = -a_{2p-2}/(2p)^2 = \frac{(-1)^p}{2^{2p}(p!)^2}.$$

Alltså är

$$J_0(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(p!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots .$$

Serien konvergerar för alla x. Med $t = (\frac{x}{2})^2$ har vi nämligen en serie $\sum_{p=0}^{\infty} c_p t^p$, som vi kan tillämpa sats 19.5 på :

$$|c_{p+1}/c_p| = \frac{(p!)^2}{[(p+1)!]^2} = \frac{1}{(p+1)^2} \to 0 = K \text{ då } p \to \infty,$$

och den sistnämnda serien konvergerar därmed för alla t.

Kurvan $y = J_0(x)$ är ritad i fig. 19.3.

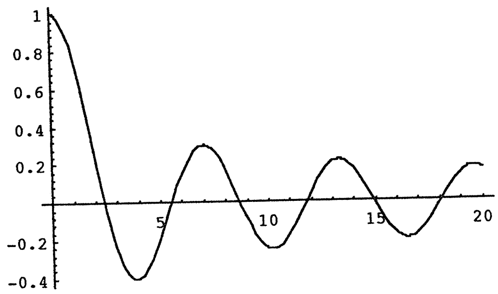


Fig. 19.3

UPPGIFTER

1914. Bestäm potensserier som satisfierar följande differentialekvationer och begynnelsevillkor. Bestäm också potensseriernas konvergensradier.

a) $xy'' + y' - y = 0$, $y(0) = 1$ b) $xy'' = y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
c) $xy'' + y = 0$, $y'(0) = 1$ d) $y'' - xy' + 2y = 0$.

1915. Lös med hjälp av potensserie differentialekvationen $y'' = xy$.

1916. Bestäm de x, för vilka potensserien

$$x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2nx^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

konvergerar och beräkna seriens summa.
Ledning: Visa att summan satisfierar differentialekvationen $y'' + y = -x - 2\sin x$.

1917. Bevisa att differentialekvationen

$$(x - x^2)y'' + [c - (a + b + 1)x]y' - aby = 0$$

satisfieras av potensserien

$$1 + \frac{ab}{1!c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{3!c(c+1)(c+2)}x^3 + \ldots$$

och bestäm seriens konvergensradie. (Serien kallas en **hypergeometrisk serie**.)

19.5 Allmänt om funktionsserier och funktionsföljder

Potensserierna är som sagt ett speciellt slag av **funktionsserier**, d.v.s. serier $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, vilkas termer är funktioner. Av en funktionsserie får man för varje särskilt x-värde, säg x_0, en "vanlig" (numerisk) serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$.

DEFINITION (AV PUNKTVIS KONVERGENS)

Om serien $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ är konvergent för varje fixt x i ett intervall I och $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = s(x)$, så säges funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ **konvergera punktvis** på I och ha **summan** $s(x)$.

Likheten $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = s(x)$ betyder som bekant att $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$, där $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Om funktionsserien konvergerar punktvis på I, existerar alltså $\lim_{n\to\infty} s_n(x)$ för alla x i I, och då säges även **funktionsföljden**

$\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergera punktvis på I. Vi skall nu ta upp problemen om termvis derivation och integration av funktionsserier och ytterligare ett närbesläktat problem.

Fråga 1. Får en funktionsserie deriveras termvis? D.v.s. är $s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$, om alla termerna $f_k(x)$ är deriverbara? Naturligtvis är $s_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x)$. Men är det säkert att

$$\frac{d}{dx}[\lim_{n\to\infty} s_n(x)] = \lim_{n\to\infty}[\frac{d}{dx}s_n(x)] \ ?$$

Fråga 2. Får en funktionsserie integreras termvis? D.v.s. är

$$\int_a^b [\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)]\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\, dx,$$

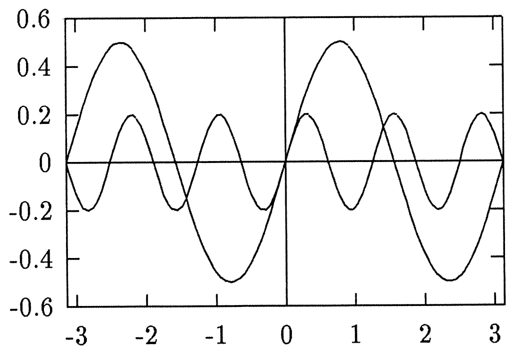
om alla termerna $f_k(x)$ är kontinuerliga på $[a,b]$? Naturligtvis är $\int_a^b s_n(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\, dx$. Men är det säkert att

$$\int_a^b [\lim_{n\to\infty} s_n(x)]\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\, dx \ ?$$

Fråga 3. Är funktionsseriens summa kontinuerlig, om alla termerna $f_k(x)$ är kontinuerliga? Delsumman $s_n(x)$ är naturligtvis kontinuerlig, men är det säkert att också $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ är kontinuerlig?

Dessa tre frågor har samma svar: Nej, inte allmänt! Detta framgår av följande exempel, där vi för enkelhets skull bara anger funktionsföljden $\{s_n\}$. Dessa s_n kan alltid uppfattas som delsummorna till en funktionsserie med allmänna termen $f_k(x) = s_k(x) - s_{k-1}(x)$ för $k \geq 2$ och $f_1(x) = s_1(x)$.

EXEMPEL 9. Funktionsföljden $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, där $s_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx$, konvergerar punktvis mot $s(x) = 0$, eftersom $|s_n(x)| \leq \frac{1}{n}$; jfr fig. 19.4. Men $s_n'(x) = \cos nx$ går inte mot $s'(x) = 0$ då $n \to \infty$. T.ex. har vi ju att $s_n'(0) = 1 \to 1 \neq 0 = s'(0)$.



$s_2 = \frac{1}{2}\sin 2x$

och $s_5 = \frac{1}{5}\sin 5x$

Fig. 19.4

EXEMPEL 10. Om $s_n(x) = n^2xe^{-nx}$ (jfr fig. 19.5) är $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty}(n^2xe^{-nx}) = 0$ för $x \geq 0$; se sats 6.9. Därmed är $\int_0^1 s(x)\,dx = 0$, medan

$$\int_0^1 s_n(x)\,dx = \int_0^1 n^2xe^{-nx}\,dx = [-nxe^{-nx}]_0^1 + \int_0^1 ne^{-nx}\,dx =$$

$$= -ne^{-n} + [-e^{-nx}]_0^1 = -(n+1)e^{-n} + 1 \to 1 \text{ då } n \to \infty.$$

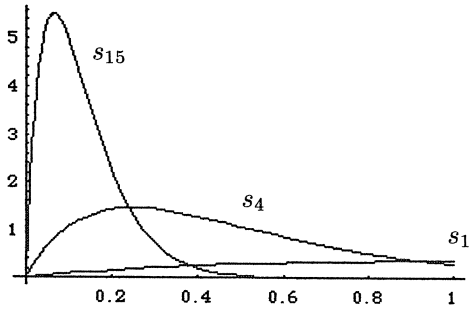


Fig. 19.5

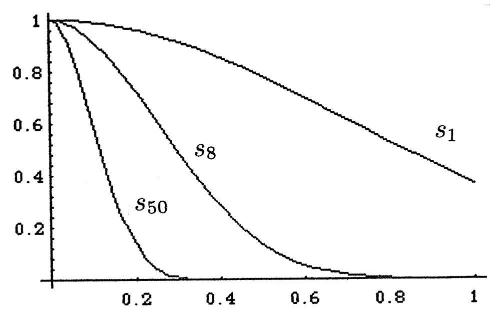


Fig. 19.6

EXEMPEL 11. För de kontinuerliga funktionerna $s_n(x) = e^{-nx^2}$ (jfr fig. 19.6) gäller att

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-nx^2} = 0 \text{ för } x \neq 0,$$

medan $s_n(0) = 1 \to 1$ då $n \to \infty$. Gränsfunktionen $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ är alltså diskontinuerlig i punkten $x = 0$.

Vårt resultat i exempel 11 kan formuleras

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{n\to\infty} e^{-nx^2}) = 0 \text{ men } \lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to 0} e^{-nx^2}) = 1.$$

På liknande sätt fann vi i exempel 9 att $\lim_{h\to 0}(\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin nh}{nh}) = 0$, medan $\lim_{n\to\infty}(\lim_{h\to 0} \dfrac{\sin nh}{nh}) = 1$. Vid upprepad gränsövergång är det alltså väsentligt i vilken ordning man utför gränsövergångarna. Detta är skälet till de nekande svaren på frågorna 1-3. Däremot har dessa frågor jakande svar för funktionsserier resp. funktionsföljder, som uppfyller vissa tilläggsvillkor, t.ex. för potensserier; se sats 19.6 och appendix.

UPPGIFTER

1918. Funktionsföljden $\{x^n\}_1^\infty$ konvergerar punktvis i intervallet $[0,1]$ mot en funktion $f(x)$. Bestäm f och undersök om f är kontinuerlig på $[0,1]$. (Jfr fig. 19.7)

1919. Visa att följande funktionsföljder konvergerar punktvis i angivna intervall och bestäm gränsfunktionerna:

a) $\{e^{-nx}\}_1^\infty$ på $[0, \infty[$ (jfr fig. 19.8) b) $\{\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}\}_1^\infty$ på $]-\infty, \infty[$.

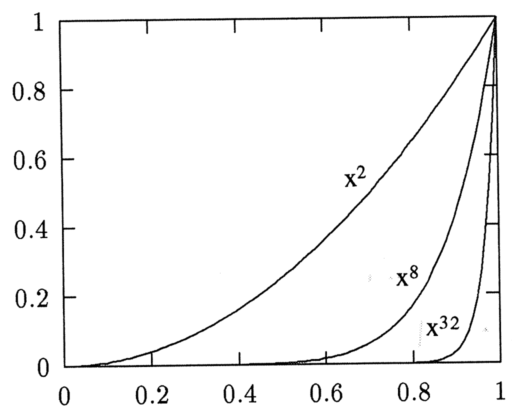


Fig. 19.7

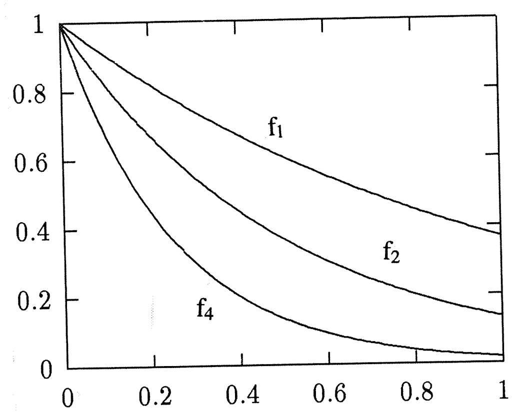


Fig. 19.8

1920. Visa att funktionsföljden $\{nx^{n-1}\}_1^\infty$ konvergerar punktvis på $[0, 1[$ och beräkna $\int_0^1 (\lim_{n\to\infty} nx^{n-1})\, dx$ och $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^{n-1}\, dx$.

1921. Beräkna för $s_n(x) = n^3x^2/(1 + n^6x^6)$ både $\int_{-\infty}^{\infty} [\lim_{n\to\infty} s_n(x)]\, dx$ och $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_n(x)\, dx$.

1922. Beräkna $\frac{d}{dx}[\lim_{n\to\infty} s_n(x)]$ och $\lim_{n\to\infty}[\frac{d}{dx} s_n(x)]$ för

a) $s_n(x) = n^2(1 - \cos \frac{x}{n})$ b) $s_n(x) = \frac{1}{n} \arctan nx$.

19.6 Kort historik

Redan på 1600-talet kände man till utvecklingarna av de viktigaste elementära funktionerna i potensserier (bl.a. de i sats 19.1). T.ex gavs serien för $\ln(1+x)$ av Nicolaus Mercator[2] år 1668 och har kallats **Mercators serie**. Serien för $\arctan x$ kallas ibland **Gregorys serie** efter James **Gregory** som fann den 1671. Den torde dock redan före år 1400 ha upptäckts av den indiske matematikern **Madhava**. **Newton** bidrog bl.a. med binomialserien (1665). Ur denna härledde Newton serien för $\arcsin x$; jfr uppg. 1907. Med hjälp av sambandet mellan två funktioner som är varandras inverser fann han sedan

[2]Denne Mercator bör inte förväxlas med den berömde kartografen Gerhard **Mercator**, som verkade på 1500-talet.

1669 serien för $\sin x$. Han utvecklade också e^x genom en liknande "invertering" av serien för $\ln(1+x)$, som han troligen kände till redan före Mercator.

Många speciella potensserier hade alltså studerats innan **Taylor** 1712 och **Maclaurin** 1742 gav sina allmänna serier. Även dessa torde ha varit kända på 1670-talet av Gregory och **Leibniz**. Före 1800-talet räknade man fritt med potensserier, utan att bekymra sig om gränser för resultatens giltighet och seriernas konvergens. Sådana frågor togs upp först av **Lagrange** (cirka 1800) och framförallt av **Cauchy** i "Cours d'Analyse" 1821. Cauchy redde ut konvergensförhållandena och gav de viktigaste resultaten om konvergensradien.

I samband med funktionsserier gjorde även Cauchy misstag, t.ex. i fråga om termvis integration och då han påstod att summan av en funktionsserie med kontinuerliga termer är kontinuerlig. **Abel** visade 1826 med ett motexempel att så ej behöver vara fallet. Klarhet om frågor av detta slag (se avsnitt 19.5 och appendix) uppnåddes först vid mitten av 1800-talet, särskilt genom Karl **Weierstrass'** insatser. Han använde bl.a. begreppet likformig konvergens; jfr appendix A. Att likformig konvergens behövdes insågs 1847 av tysken Philipp **Seidel** och irländaren George **Stokes**, oberoende av varandra. Weierstrass gav redan 1841 en precis definition av likformig konvergens, men den publicerades först långt senare.

Appendix

A. Likformig konvergens för funktionsserier och funktionsföljder

Vi skall här studera allmänna funktionsserier och funktionsföljder och speciellt ta upp de frågor som ställdes i avsnitt 19.5. Vi börjar med att repetera en definition (jfr sid. 99) och studera ett intressant exempel.

DEFINITION (AV PUNKTVIS KONVERGENS)

En funktionsföljd $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ säges **konvergera punktvis** på en mängd M mot funktionen f om

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ för alla } x \in M.$$

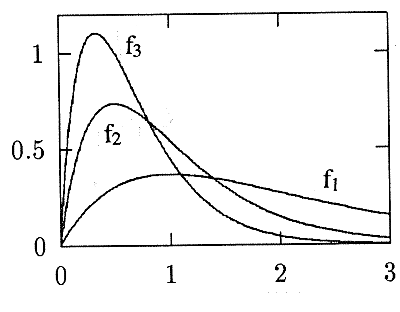
Vi skriver "$f_n \to f$ punktvis på M" och f kallas **gränsfunktion** till $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

EXEMPEL 12. Låt $f_n(x) = n^2xe^{-nx}$ på $M = [0,\infty[$. Vi har redan i 19.5 (sid. 101) konstaterat att $f_n(x_0) = x_0n^2e^{-nx_0} \to 0$ för varje fixt $x_0 > 0$ då $n \to \infty$, och att $f_n(0) = 0 \to 0$ då $n \to \infty$. Funktionsföljden $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar alltså punktvis mot gränsfunktionen 0 på M. Detta betyder dock inte att kurvan $y = f_n(x)$ "i sin helhet ligger nära" gränskurvan $y = 0$ för stora n. Vi har nämligen, som man lätt ser med hjälp av derivatan $f_n'(x)$, att

$$\max_M f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n/e \to \infty \text{ då } n \to \infty.$$

Då n är stort, innehåller alltså kurvan $y = f_n(x)$ punkter som ligger mycket långt bort från $y = 0$; jfr fig. 19.9.

Fig. 19.9



Vi skall nu införa ett konvergensbegrepp, som uttrycker just att hela kurvan $y = f_n(x)$ för stora n ligger "nära" kurvan $y = f(x)$. Detta konvergensbegrepp kommer vi sedan att använda för att formulera villkor som medför att

1° : $\frac{d}{dx}[\lim_{n\to\infty} f_n(x)] = \lim_{n\to\infty}[\frac{d}{dx} f_n(x)]$,

2° : $\int_a^b[\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$,

3° : $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ är kontinuerlig, då alla $f_n(x)$ är kontinuerliga.

Som framgår av 19.5 gäller $1^\circ - 3^\circ$ inte allmänt, då $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar punktvis.

DEFINITION (AV LIKFORMIG KONVERGENS)

Funktionsföljden $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ säges **konvergera likformigt mot funktionen** f **på mängden** M, om det till varje tal $\varepsilon > 0$ finns ett tal N_ε så att

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ för alla } x \in M \text{ då } n > N_\varepsilon.$$

Vi skriver då "$f_n \to f$ likformigt på M".

Definitionen kan åskådliggöras enligt fig. 19.10. För godtyckligt $\varepsilon > 0$ begränsar kurvorna $y = f(x) \pm \varepsilon$ ett band. Om $f_n \to f$ likformigt på M, ligger samtliga kurvor $y = f_n(x)$ för $n > N_\varepsilon$ i detta band. Om n är stort, ligger alltså kurvan $y = f_n(x)$ "i sin helhet nära" kurvan $y = f(x)$.

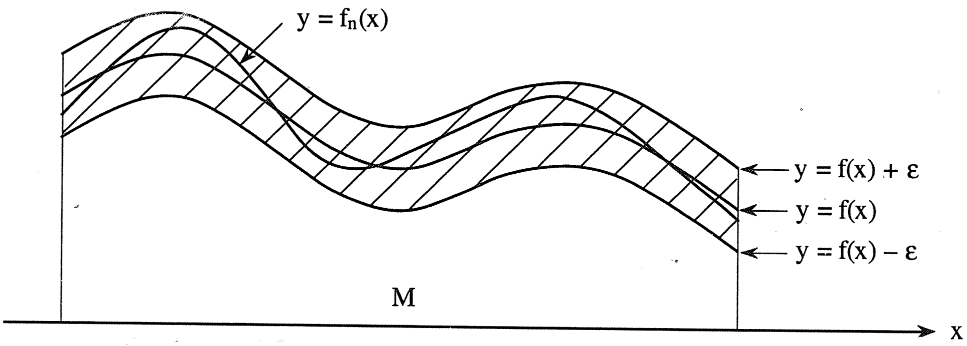


Fig. 19.10

Man kan definiera ett **avstånd** $d(f,g)$ mellan två funktioner f och g, definierade på samma mängd M, som

$$d(f,g) = \sup_M |f(x) - g(x)|.$$

Åskådligt betyder $d(f,g)$ supremum av avståndet mellan punkterna $(x, f(x))$ och $(x, g(x))$ på de båda funktionernas grafer; se fig. 19.11. Med detta avståndsbegrepp kan man uttrycka villkoret för att $f_n \to f$ likformigt på M mycket kort, som $d(f_n, f) \to 0$ då $n \to \infty$.

OBS. 4. Av definitionen av likformig konvergens följer direkt att

$$f_n \to f \text{ likformigt på } M \;\Rightarrow\; f_n \to f \text{ punktvis på } M.$$

Däremot gäller inte det omvända: En funktionsföljd, som konvergerar punktvis på M, behöver inte konvergera likformigt på M. Detta framgår av exempel 12, där (som vi sett) $f_n(x) = n^2xe^{-nx} \to 0$ punktvis på $M = [0, \infty[$, men konvergensen inte är likformig, eftersom

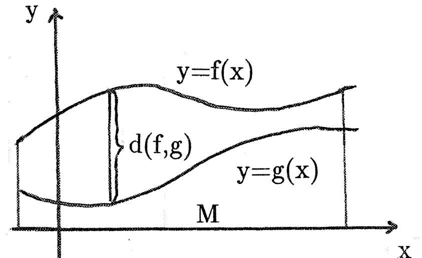


Fig. 19.11

$$d(f_n, 0) = \sup_M |f_n(x) - 0| = \max_M n^2xe^{-nx} = n/e \not\to 0 \text{ då } n \to \infty.$$

OBS. 5. Observera att **likformig konvergens alltid hänför sig till en viss punktmängd**. Så konvergerar, som sagt, funktionsföljden i exempel 12 inte likformigt på $[0, \infty[$, men däremot likformigt på varje intervall $I_a = [a, \infty[$ där $a > 0$. Vi har nämligen att

$$\sup_{x \geq a} |f_n(x) - 0| = n^2ae^{-na} \quad \text{då } n > 1/a.$$

Eftersom $n^2ae^{-na} \to 0$ då $n \to \infty$, är konvergensen likformig på I_a.

Gränsfunktionen till en punktvis konvergent följd av kontinuerliga funktioner behöver inte vara kontinuerlig, se exempel 11, sid. 101. För likformigt konvergenta funktionsföljder gäller däremot följande:

SATS 19.7 (OM GRÄNSFUNKTIONENS KONTINUITET)

Antag att funktionerna f_n är kontinuerliga på mängden M och att $f_n \to f$ likformigt på M. Då är f kontinuerlig på M.

Bevis: Vi skall för varje x_0 i M bevisa att

$$f(x) \to f(x_0) \text{ då } x \to x_0 \text{ och } x \in M,$$

d.v.s. att $|f(x) - f(x_0)|$ blir godtyckligt litet för x tillräckligt nära x_0. Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Eftersom $f_n \to f$ likformigt på M, vet vi att om p väljes tillräckligt stort, så är

(9) $$|f_p(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{för alla } x \text{ i } M.$$

Vi kan då uppskatta $|f(x) - f(x_0)|$ på följande sätt:

$$|f(x) - f(x_0)| = |[f(x) - f_p(x)] + [f_p(x) - f_p(x_0)] + [f_p(x_0) - f(x_0)]| \leq$$

$$\leq |f(x) - f_p(x)| + |f_p(x) - f_p(x_0)| + |f_p(x_0) - f(x_0)|.$$

Enligt (9) är första och tredje termen i det sista ledet båda $< \frac{\varepsilon}{3}$ då $x \in M$. För vårt fixa p är f_p är kontinuerlig på M och därmed i x_0, varför det finns ett tal $\delta > 0$ så att den andra termen $|f_p(x) - f_p(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ då $|x - x_0| < \delta$ och $x \in M$. För alla sådana x är alltså $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.|||

För **funktionsserier** kan vi tillämpa det föregående på följden av seriens delsummor $\{s_n(x)\}$. Därmed kan vi också formulera definitionerna och satsen för funktionsserier:

DEFINITION (AV PUNKTVIS OCH LIKFORMIG KONVERGENS FÖR FUNKTIONSSERIER)

En funktionsserie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ säges **konvergera punktvis** mot **summan** $s(x)$ på en mängd M, om $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \to s(x)$ för alla x i M då $n \to \infty$. Om $s_n \to s$ likformigt på M, säges funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ **konvergera likformigt på** M (mot summan $s(x)$).

Av sats 19.7 följer nu

SATS 19.8 (OM SERIESUMMANS KONTINUITET)

Om $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konvergerar likformigt mot $s(x)$ på M och funktionerna u_k är kontinuerliga där, så är också s kontinuerlig på M.

Bevis: Eftersom funktionerna u_k är kontinuerliga på M, är också alla $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ kontinuerliga där. Då vidare $s_n \to s$ likformigt på M, så ger sats 19.7 att s är kontinuerlig på M.|||

För att bevisa att en given funktionsserie konvergerar likformigt kan man i många fall använda följande sats:

SATS 19.9 (WEIERSTRASS' MAJORANTSATS)

Om $|u_k(x)| \leq a_k$ för alla $x \in M$ och $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar, så är $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ likformigt konvergent på M.

Anm. 8. Förutsättningen om $|u_k|$ kan också formuleras $\sup_{x\in M} |u_k(x)| \leq a_k$.

Bevis: För varje $x \in M$ är $|u_k(x)| \leq a_k$ och då $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar, är tydligen $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ absolut konvergent enligt jämförelsekriteriet, sid. 70, och sats 18.12, sid. 76. Serien konvergerar alltså punktvis på M och har en summa $s(x)$. Eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är konvergent, finns det till varje tal $\varepsilon > 0$ ett tal N så att

$$|\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k| = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon \text{ då } n \geq N.$$

Detta ger (se OBS. 9, sid. 77) att

$$|s_n(x) - s(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k < \varepsilon$$

för alla $x \in M$ då $n \geq N$. |||

EXEMPEL 13. Bevisa att funktionsserien $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(x+k)\ln^2(x+k)}$ definierar en kontinuerlig funktion för $x \geq 0$.

Lösning: För alla $x \geq 0$ är $0 \leq \frac{1}{(x+k)\ln^2(x+k)} \leq \frac{1}{k\ln^2 k}$. Vidare är serien $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln^2 k}$ konvergent; se uppg. 1822, sid. 69. Enligt Weierstrass' majorantsats är därför den givna funktionsserien likformigt konvergent på $[0,\infty[$. Låt $f(x)$ vara seriens summa. Eftersom seriens termer är kontinuerliga funktioner och konvergensen är likformig på $[0,\infty[$, är f kontinuerlig för $x \geq 0$ enligt sats 19.8 .

UPPGIFTER

1923. Visa att följande funktionsföljder konvergerar likformigt på de angivna intervallen:

a) $\{x^n\}_1^{\infty}$ på $[0,b]$, för $0 < b < 1$ b) $\{n \sin \frac{x}{n}\}_1^{\infty}$ på $[-a,a]$.

1924. a) Funktionsföljden $\{x\frac{x^n-1}{x^n+1}\}_1^{\infty}$ konvergerar punktvis på intervallet $[0,\infty[$. Mot vilken funktion?

b) Är konvergensen likformig på intervallet $[0,\infty[$ resp. $[2,\infty[$?

1925. Undersök om funktionsföljden $\{\frac{n^3x}{n^4x^2+1}\}_1^\infty$ konvergerar likformigt på intervallet $[0,1]$.

1926. Bestäm de x, för vilka följande funktionsserier konvergerar, och beräkna seriernas summor:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$.

1927. Visa att likheten

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}, \quad p > 1,$$

definierar en för alla x kontinuerlig funktion $f(x)$.

1928. Visa att funktionsserien $\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$ är konvergent för $x \geq 0$ och beräkna seriens summa. Visa också, att konvergensen är likformig på varje intervall $[a, \infty[$, där $a > 0$. Är konvergensen likformig på intervallet $]0, \infty[$?

1929. Visa att funktionsserien $\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-n^2x}$ är likformigt konvergent på intervallet $[0, \infty[$.

B. Gränsövergång under integraltecknet

Som vi sett i avsnitt 19.5 (exempel 10), finns det funktionsföljder $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sådana att

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \neq \int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\,dx.$$

Detta kan däremot inte inträffa om konvergensen är likformig på $[a, b]$:

SATS 19.10 (OM GRÄNSÖVERGÅNG UNDER INTEGRALTECKEN VID LIKFORMIG KONVERGENS)
Om funktionerna f_n är kontinuerliga och $f_n \to f$ likformigt på det slutna begränsade intervallet $[a, b]$, så är

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Bevis: Eftersom funktionerna f_n är kontinuerliga på $[a, b]$ och $f_n \to f$ likformigt där, så är också f kontinuerlig på $[a, b]$ enligt sats 19.7. Därmed existerar

$\int_a^b f_n(x)\,dx$ och $\int_a^b f(x)\,dx$. På grund av den likformiga konvergensen finns det till varje tal $\varepsilon > 0$ ett tal N så att

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ då } a \le x \le b \text{ och } n \ge N.$$

Detta ger att

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \le \varepsilon(b-a) \quad \text{då } n \ge N.$$

Enligt definitionen av gränsvärde för en talföljd (sid. 32) är därför

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. |||$$

OBS. 6. Vi observerar i följande exempel att satsen inte gäller om integrationsintervallet är obegränsat.

EXEMPEL 14. För $f_n(x) = n/(x^2+n^2)$ gäller att $f_n \to f$ likformigt på hela $\mathbf{R}$, ty

$$\sup|f_n(x) - 0| = \sup f_n(x) = f_n(0) = \frac{1}{n} \to 0, \text{ då } n \to \infty.$$

Vidare är $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dx = 0$, medan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n\,dx}{x^2+n^2} = (\text{ med subst. } x = nt) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \pi,$$

vilket alltså inte går mot 0 då $n \to \infty$.

Det finns emellertid också satser som ger tillräckliga villkor för att

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,dx = \int_I (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\,dx,$$

då I är ett godtyckligt intervall och de betraktade integralerna är generaliserade, t.ex. följande sats, som vi inte bevisar här:

SATS 19.11 (OM DOMINERAD KONVERGENS)
Likheten $\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx$ gäller under följande förutsättningar:
1° : Integralen $\int_I f_n(x)\,dx$ existerar för alla $n \geq n_0$.
2° : $f_n \to f$ punktvis på I och $\int_I f(x)\,dx$ existerar.
3° : Det finns en funktion g definierad på I sådan att $\int_I g(x)\,dx$ existerar och $|f_n(x)| \leq g(x)$ för alla $x \in I$ och för alla $n \geq n_0$.

OBS. 7. Exemplen 10 och 14 visar att vi inte kan stryka förutsättningen 3°. Funktionen g kallas en **majorantfunktion** till funktionerna f_n.

EXEMPEL 15. Beräkna $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$.

Lösning:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n} = \begin{cases} 1 & \text{för } 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & \text{för } x = 1 \\ 0 & \text{för } x > 1 \end{cases}$$

och $\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1$. Sats 19.11 ger därför att det sökta gränsvärdet är 1, ty:

1° : $\int_0^\infty (1+x^n)^{-1}\,dx$ existerar för $n \geq 2$.
2° : $(1+x^n)^{-1} \to f(x)$, då $n \to \infty$ (se ovan!).
3° : För $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } 0 \leq x \leq 1, \\ (1+x^2)^{-1} & \text{då } x > 1, \end{cases}$ är

$(1+x^n)^{-1} \leq g(x)$ då $n \geq 2$, och $\int_0^\infty g(x)\,dx = 1 + [\arctan x]_1^\infty = 1 + \frac{\pi}{4}$.

EXEMPEL 16. Beräkna $\lim_{n\to\infty} n\int_0^\infty e^{-nx^2}\sin x\,dx$.
Lösning: Substitutionen $x\sqrt{n} = t$ ger

$$n\int_0^\infty e^{-nx^2}\sin x\,dx = n\int_0^\infty e^{-t^2}\sin\frac{t}{\sqrt{n}}\frac{dt}{\sqrt{n}} = \int_0^\infty \sqrt{n}\sin\frac{t}{\sqrt{n}}e^{-t^2}\,dt.$$

Sätt $f_n(t) = \sqrt{n}\sin\frac{t}{\sqrt{n}}e^{-t^2}$. Då gäller att $f_n(t) \to te^{-t^2}$ då $n \to \infty$ och vidare att $|f_n(t)| \leq \sqrt{n}\frac{t}{\sqrt{n}}e^{-t^2} = te^{-t^2}$. Eftersom $\int_0^\infty te^{-t^2}\,dt$ existerar, så är

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^\infty e^{-nx^2}\sin x\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(t)\,dt = \int_0^\infty te^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}[e^{-t^2}]_0^\infty = \frac{1}{2}.$$

UPPGIFTER

1930. Låt $f_n(x) = \sqrt{x}e^{-x/n}$. Beräkna $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1931. Beräkna
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \frac{\sin x}{2} + (\frac{\sin x}{2})^2 + \ldots + (\frac{\sin x}{2})^n}.$$

1932. Beräkna
$$\lim_{n\to\infty} \int_2^{\infty} n^{-1}x^{-2}\ln(x^n - 1)\,dx.$$

1933. Låt $f_n(x) = \dfrac{n}{n + |\cos x| + (x\sqrt{n})^2}$. Bestäm $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx$.

1934. Beräkna följande gränsvärden:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{1 + x + x^2 + \ldots + x^n}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin \pi x}{1 + x^n}\,dx.$

1935*. Funktionen $f(x)$ har kontinuerlig derivata på $[0, 1]$. Visa att
$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^n f(x)\,dx = f(1).$$
(Integrera partiellt.)

1936*. Visa att

a) $\int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n \ln x\,dx = \frac{n}{n+1}(\ln n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{n+1})$.
(Ledning: Sätt $1 - \frac{x}{n} = t$. Serieutveckla $\ln(1 - t)$.)

b) $\int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx = -\gamma$, där γ är Eulers konstant (se uppg. 1825, sid. 70).

C. Termvis integration och derivation av funktionsserier

För funktionsserier har sats 19.10 följande konsekvens:

SATS 19.12 (OM TERMVIS INTEGRATION VID LIKFORMIG KONVERGENS)
Antag att termerna u_k i funktionsserien $\sum_{k=1}^\infty u_k(x)$ är kontinuerliga på ett slutet begränsat intervall I och att serien konvergerar likformigt på I. Då får funktionsserien integreras termvis över I, d.v.s.
$$\int_I \left(\sum_{k=1}^\infty u_k(x)\right) dx = \sum_{k=1}^\infty \int_I u_k(x)\,dx.$$

Bevis: Låt $s_n(x)$ vara funktionsseriens n:te delsumma, d.v.s. $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$. Eftersom vi har antagit att serien konvergerar på I, existerar dess summa

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \text{ då } x \in I.$$

Enligt sats 19.10 är $\lim_{n\to\infty} \int_I s_n(x)\,dx = \int_I \lim_{n\to\infty} s_n(x)\,dx$. Alltså gäller

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_I u_k(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_I u_k(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_I \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_I s_n(x)\,dx = \int_I (\lim_{n\to\infty} s_n(x))\,dx = \int_I (\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x))\,dx. \ |||$$

EXEMPEL 17. Då $|t| < 1$ är

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n =$$

$$= \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} \to \frac{1}{1+t} \text{ då } n \to \infty;$$

jfr exempel 4, sid. 56. Således är

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k \text{ för } |t| < 1.$$

Om $0 < a < 1$, är funktionsserien likformigt konvergent på intervallet $[-a, a]$ enligt Weierstrass' majorantsats, eftersom $|t^k| \le |a|^k$ och $\sum_{k=0}^{\infty} |a|^k$ konvergerar. Varje x med $|x| < 1$ tillhör ett sådant intervall $[-a, a]$, varför sats 19.12 för sådana x ger

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^k\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}.$$

Jämför med den fjärde formeln i sats 19.1!

Av sats 19.11 om dominerad konvergens följer direkt motsvarande sats för funktionsserier. Den gäller även för obegränsade intervall.

SATS 19.13 (OM TERMVIS INTEGRATION VID DOMINERAD KONVERGENS)

Likheten $\int_I(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x))\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_I u_k(x)\,dx$ gäller under följande förutsättningar:
1° : $\int_I u_k(x)\,dx$ existerar för alla k.
2° : $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konvergerar för alla $x \in I$ och $\int_I(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x))\,dx$ existerar.
3° : Det finns en funktion g definierad på I sådan att $|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)| \leq g(x)$ för alla $x \in I$ och för alla n samt $\int_I g(x)\,dx$ existerar.
(Om $\int_I \sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|\,dx$ existerar, duger $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|$.)

Vi avslutar så avsnittet om allmänna funktionsserier med följande sats, som ger ett tillräckligt villkor för omkastning av derivation och summation.

SATS 19.14 (OM TERMVIS DERIVERING)

Antag att
1° : $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konvergerar punktvis mot $s(x)$ på intervallet I;
2° : funktionerna u'_k är kontinuerliga på I;
3° : $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ konvergerar likformigt mot $g(x)$ på I.
Då är $s(x)$ deriverbar på I med derivatan $s'(x) = g(x)$, d.v.s.

$$\frac{d}{dx}(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_k(x) \text{ då } x \in I.$$

Bevis: 2° och 3° medför enligt sats 19.8 att funktionen g är kontinuerlig på I. Enligt sats 19.12 är då för a och x i I

$$\int_a^x g(t)\,dt = \int_a^x \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u'_k(t)\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}[u_k(x) - u_k(a)] = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} u_k(a) = s(x) - s(a).$$

Det första ledet här har derivatan $g(x)$, enligt sats 10.4 om derivering av en integral med avseende på övre integrationsgränsen. Likheten mellan första och sista ledet visar därför att också $s(x)$ har derivatan $g(x)$. |||

UPPGIFTER

1937. Bevisa att funktionen $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$ är kontinuerlig för $x \geq 0$. Beräkna också $\int_0^1 f(x)\,dx$ och $f'(x)$.

1938. Bevisa att $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx = 1 + 2^{-2} + 3^{-2} + \ldots + n^{-2} + \ldots$.

1939. Bevisa att om p är ett naturligt tal större än 1, så är

$$\frac{1}{(p-1)!}\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{e^x - 1}\,dx = 1 + 2^{-p} + 3^{-p} + \ldots + n^{-p} + \ldots.$$

(Bevisa först att $\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} + e^{-2x} + \ldots + e^{-nx} + \ldots$ för $x > 0$.)

1940. a) Bevisa att för $-1 < r < 1$ är

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1}{2}\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

b) Bevisa med hjälp av denna serie, för $|r| < 1$, att

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}\,d\theta = 1.$$

D.Tillämpningar på potensserier

Resultaten i C. kan speciellt tillämpas på potensserier och ger då bevis för sats 19.6. Därvid behöver vi en hjälpsats:

> **SATS 19.15 (OM LIKFORMIG KONVERGENS FÖR POTENSSERIER)**
> En potensserie konvergerar likformigt på varje intervall $|x| \leq r$, då $r < R =$ konvergensradien.

Bevis: För $|x| \leq r$ är $|a_k x^k| \leq |a_k| r^k$. Eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k$ är konvergent enligt sats 19.3, sid. 88, följer den likformiga konvergensen av Weierstrass' majorantsats (sats 19.9). |||

Nu genomför vi beviset för sats 19.6 — i tre etapper (I–III nedan). Först upprepar vi satsens formulering:

SATS 19.6 (OM TERMVIS DERIVERING OCH INTEGRERING AV POTENSSERIER)
Om potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ har konvergensradien $R > 0$ och summan $f(x)$ på konvergensintervallet, så är för $-R < x < R$ (och för alla x om $R = \infty$)

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{10}$$

och

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \tag{11}$$

Potensserierna i högerleden av (10) och (11) har också konvergensradien R.

Bevis: I. Enligt sats 19.15 konvergerar $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ likformigt på intervallet $[0, x]$ (resp. $[x, 0]$), då $-R < x < R$. Serien kan därför enligt sats 19.12 integreras termvis från 0 till x. Vi får således

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Detta bevisar (11) och även att potensserien i sista ledet konvergerar för $|x| < R$.

II. **Om** serien $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ i högra ledet av (10) också har konvergensradien R, följer påståendet (10) av sats 19.14, sid. 114. Sats 19.15, sid. 115, ger nämligen att $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ är likformigt konvergent på ett intervall som innehåller x.

III. Det återstår nu att visa att $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ och $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ har samma konvergensradie R som $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

IIIa. Vi såg redan i I att $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ konvergerar för $|x| < R$. För denna serie räcker det nu att visa att den inte kan vara konvergent för något x_0 med $|x_0| > R$. Om så vore fallet, skulle $\frac{a_n}{n+1} x_0^{n+1} \to 0$ då $n \to \infty$, varför

$$\left|\frac{a_n}{n+1} x_0^n\right| = \left|\frac{a_n}{n+1} x_0^{n+1}\right| / |x_0| \le M \quad \text{för något tal } M.$$

För $R < |x| < |x_0|$, skulle vi då få

$$|a_n x^n| = \left|\frac{a_n}{n+1} x_0^n\right| (n+1) \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M(n+1)\left|\frac{x}{x_0}\right|^n = b_n. \tag{12}$$

Men den positiva serien $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergerar enligt kvotkriteriet, eftersom $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = |\frac{x}{x_0}| < 1$. Då visar uppskattningen (12) att $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ är absolut konvergent, vilket strider mot definitionen av R eftersom $|x| > R$.

IIIb. Om vi tillämpar resonemanget i IIIa på serien $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ i stället för $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, finner vi att dessa båda serier har samma konvergensradie, eftersom den termvis integrerade serien då blir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$. |||

E. Exponentialfunktionen e^z och dess samband med sinus och cosinus

Vi har i kapitel 12 redan definierat e^z för komplexa z. Vi skall här ge en ekvivalent (och något naturligare) definition. Vi konstaterade i avsnitt 19.1 att

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{för alla reella tal } x.$$

Då potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konvergerar för alla komplexa tal z, är det naturligt att **definiera**

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Av samma skäl definierar vi

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad \text{och} \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

för godtyckliga komplexa tal z. Vi finner då att

$$e^{iz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^k}{k!} = 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{iz}{1!} - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \ldots =$$

$$= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + i(\frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots) = \cos z + i \sin z.$$

Omordningen av seriens termer är tillåten, eftersom serien är absolut konvergent (sats 18.16, sid. 81). Speciellt har vi för reella $z = x$ att $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, vilket stämmer överens med — och förklarar — definitionen på sid. 147 i del 2, som där kanske verkade godtyckligt vald.

På samma sätt får vi $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$ och därmed **Eulers formler**

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

(Jämför med formlerna för reella z på sid. 148 i del 2.)

UPPGIFTER

1941. Utveckla funktionerna $e^{(1+i)x}$, $e^x \cos x$ och $e^x \sin x$ i potensserie.

1942. Lös följande ekvationer

a) $e^z = -1$ b) $\sin z = 2$ c) $\cos z = i$ d) $\sin z = \frac{1}{5}(3 - 4i)$.