19 FOURIERSERIER

Många förlopp är som bekant periodiska, d.v.s. de upprepar sig efter en viss tid p. Exempelvis varierar spänning och strömstyrka periodiskt i ett växelströmsnät. Många maskiner gör samma arbetsmoment om och om igen. Ljud alstras genom periodiska svängningar t.ex. då man spelar på ett musikinstrument. Om $f(t)$ är mätresultatet vid tidpunkten t för en fysikalisk storhet i en sådan process, så är $f(t+p) = f(t)$, d.v.s. $f(t)$ är periodisk med perioden p. Ett viktigt exempel är funktionen

$$f(t) = A\sin(\omega t + \alpha) = c\cos\omega t + d\sin\omega t,$$

där A, ω, α, c och d är konstanter. Den har perioden $2\pi/\omega$ och beskriver en s.k. **harmonisk svängning**. På detta sätt varierar t.ex. spänningen i en växelströmsgenerator och avvikelsen från jämviktsläget i en harmonisk oscillator; jfr del 2, sid. 195ff. Andra mer komplicerade exempel är ritade i figur 19.1.

Det visar sig att en funktion $f(t)$, som har en period p, under mycket allmänna villkor kan skrivas

$$(1) \qquad f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k \cos k\omega t + d_k \sin k\omega t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \alpha_k),$$

där $\omega = 2\pi/p$. Variationen i en fysikalisk storhet, som representeras av en sådan periodisk funktion $f(t)$, kan alltså framställas som en överlagring ("superposition") av harmoniska svängningar. Termen $A_1\sin(\omega t + \alpha_1)$ svarar mot "grundtonen", och de övriga termerna $A_k \sin(k\omega t + \alpha_k)$ mot "övertonerna". Denna framställning hjälper oss att analysera periodiska förlopp. Den användes först av den franske matematikern och fysikern Joseph **Fourier**, då han studerade värmeledningsproblem (Theorie analytique de la chaleur, 1822). I kapitlets sista avsnitt skall vi tillämpa hans metod på en svängande sträng.

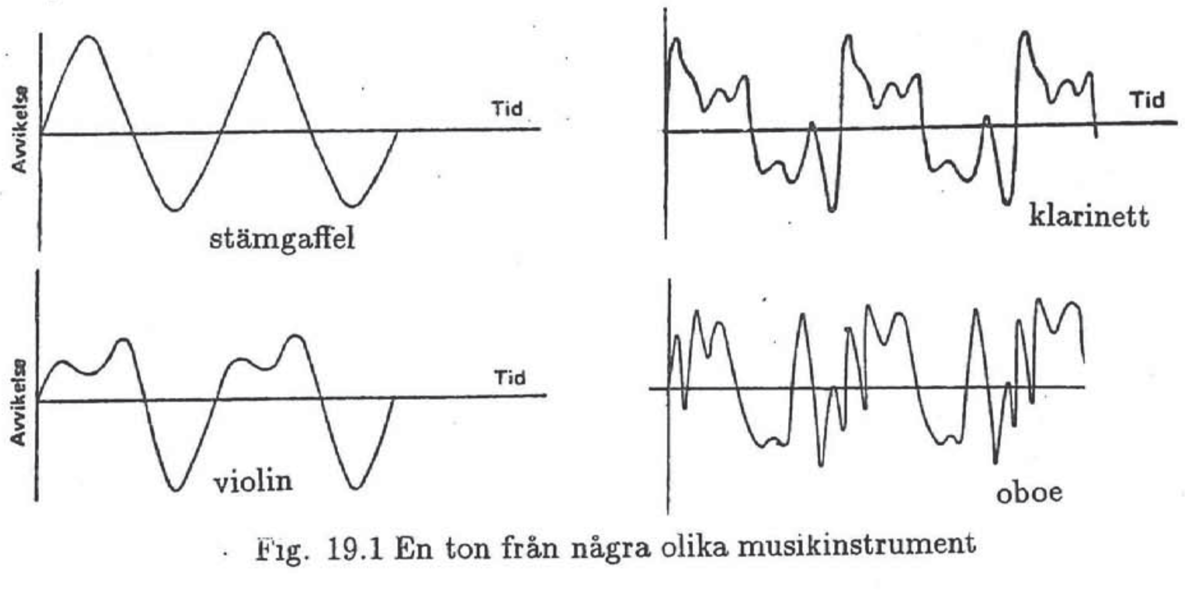


Fig. 19.1 En ton från några olika musikinstrument

19.1 Trigonometriska serier och polynom

DEFINITION (AV TRIGONOMETRISKA SERIER OCH POLYNOM)

En (funktions)serie av formen

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k \cos k\omega t + d_k \sin k\omega t), \tag{2}$$

där t är en reell variabel och ω, c_k och d_k är konstanter, kallas en **trigonometrisk serie**. En delsumma till serien (2)

$$\phi_n(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{n}(c_k \cos k\omega t + d_k \sin k\omega t) = \tag{3}$$

$$= c_0 + c_1 \cos \omega t + d_1 \sin \omega t + \ldots + c_n \cos n\omega t + d_n \sin n\omega t$$

kallas ett **trigonometriskt polynom**; jfr uppgift 1901. Detta polynom säges vara av **ordningen** n, om $c_n \neq 0$ eller $d_n \neq 0$.

Var och en av funktionerna $1, \cos \omega t, \sin \omega t, \cos 2\omega t, \sin 2\omega t, \ldots, \cos n\omega t, \sin n\omega t$ har perioden $2\pi/\omega$. Detta ger att även varje trigonometriskt polynom $\phi_n(t)$ av formen (3), har perioden $2\pi/\omega$, d.v.s. $\phi_n(t + 2\pi/\omega) = \phi_n(t)$ för alla t.

EXEMPEL 1. $\phi(t) = 6 \sin 1000\pi t + 2 \sin 2000\pi t + \sin 3000\pi t$ är ett trigonometriskt polynom av ordning 3 (med perioden 0.002). Det ger en grov approximation till violintonen i fig. 19.1. Det består av en grundton och dess två första övertoner. Den första övertonen är oktaven till grundtonen. Den andra är oktavens kvint. De tre tonernas frekvenser (= antal svängningar per sekund) är 500, 1000 resp. 1500. Jfr fig. 19.2!

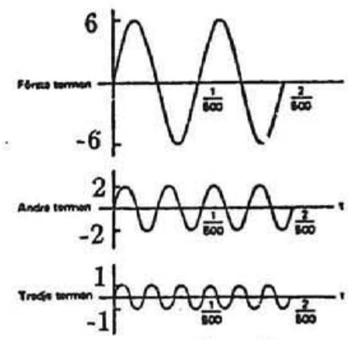


Fig. 19.2 Kurvor för grundton och två övertoner i en violinton

EXEMPEL 2.

a) $1 - \frac{1}{4}\cos t - \frac{1}{9}\cos 2t + \frac{1}{16}\cos 3t$ är ett trigonometriskt polynom av ordning 3

b) $1 + \cos t + \sin t + \cos 2t + \sin 2t$ är ett trigonometriskt polynom av ordning 2.

För varje t-värde t_0 erhålles av (2) **en numerisk serie**, d.v.s. en serie där varje term är ett tal. Konvergensen hos en sådan serie kan undersökas enligt kap. 17.

EXEMPEL 3. Betrakta den trigonometriska serien $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos k\pi t}{k}$. För $t = 0$ får man den divergenta serien $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$; se sid. 65. För $t = 1$ erhålles serien $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$, som är konvergent med summan $1 - \ln 2 \approx 0.307$; se sid. 78 och sats 18.1.

EXEMPEL 4. Den trigonometriska serien $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin 7kt}{k^2}$ är (absolut) konvergent för **alla** t. För varje reellt t är nämligen $|\frac{\sin 7kt}{k^2}| \le \frac{1}{k^2}$ och serien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergerar, varför påståendet följer av jämförelsekriteriet för positiva serier och satsen om absolut konvergens (sats 17.9).

EXEMPEL 5. Den trigonometriska serien $\sum_{k=1}^{\infty} (\cos kt + \sin kt)$ är divergent för **alla** t, ty $\cos kt_0 + \sin kt_0 = \sqrt{2} \sin(kt_0 + \frac{\pi}{4})$ går inte mot 0 då $k \to \infty$.

UPPGIFTER

1901. a) Bevisa att $\phi_3(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{3} (c_k \cos kt + d_k \sin kt)$ är ett polynom i $\cos t$ och $\sin t$, d.v.s. att $\phi_3(t)$ kan erhållas genom att man i ett polynom $P(u, v)$ av två variabler sätter in $u = \cos t, v = \sin t$. Är $P(u, v)$ entydigt bestämt av $\phi_3(t)$?

b) Bevisa att $\phi_n(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k \cos kt + d_k \sin kt)$ är ett polynom i $\cos t$ och $\sin t$.

c) Bevisa att $\phi_n(t)$ kan skrivas $\phi_n(t) = \sum_{k=-n}^{k=n} \gamma_k e^{ikt}$.

1902. För vilka reella t konvergerar serien

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k\sqrt{k}}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \cos kt$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \sin kt$?

19.2 Fourierserien till funktioner med perioden 2π

Vi vill nu undersöka om en godtycklig periodisk funktion f kan skrivas som en trigonometrisk serie med samma period. För enkelhets skull börjar vi i avsnitten 19.2–19.4 med fallet då perioden är 2π. I dessa avsnitt betecknar vi den oberoende variabeln med x. Vi vill alltså hitta lämpliga villkor för att

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos kx + d_k \sin kx).$$

DEFINITION (AV FOURIERSERIEN TILL EN FUNKTION MED PERIODEN 2π)

Antag att funktionen f är definierad på $[-\pi, \pi]$ utom eventuellt i ändligt många punkter. Sätt för $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx \text{ och } b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx\,, \tag{4}$$

om dessa integraler existerar. Den trigonometriska serien

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) = \tag{5}$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \ldots$$

kallas **fourierserien med perioden 2π till f**, och seriens koefficienter $\frac{a_0}{2}, a_1, b_1, \ldots$ kallas **fourierkoefficienterna** till f. Att f har fourierserien (5) betecknas

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

Av definitionen (4) på fourierkoefficienterna följer omedelbart att fourierkoefficienterna till en summa $f+g$ av funktioner är summan av motsvarande fourierkoefficienter till f och g. Vidare har cf fourierkoefficienter som är c gånger motsvarande fourierkoefficienter till f.

Att valet av fourierkoefficienter enligt (4) är naturligt ser man kanske inte direkt. Det kan motiveras på följande sätt. För korthets skull inför vi beteckningen

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx,$$

och observerar att den uppfyller de enkla räknelagarna
$(f, g+h) = (f, g) + (f, h)$ och $(f, cg) = c(f, g)$. Vi inför också beteckningarna

$$g_{2k-1}(x) = \sin kx \text{ resp. } g_{2k}(x) = \cos kx,$$

d.v.s.

$$\{g_n\}_0^{\infty} = \{g_0, g_1, g_2, \ldots\} = \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \ldots\}.$$

En enkel räkning ger att

$$(g_i, g_k) = \int_{-\pi}^{\pi} g_i(x)g_k(x)\, dx = 0 \text{ för } i \neq k.$$

T.ex. får vi med hjälp av en produktformel i sats 5.1 att

$$(g_{2k}, g_{2m}) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(k-m)x + \cos(k+m)x\} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}[\frac{1}{k-m}\sin(k-m)x + \frac{1}{k+m}\sin(k+m)x]_{-\pi}^{\pi} = 0 \text{ då } k \neq m.$$

Se i övrigt uppgift 1904.

Frågan är nu hur vi bör välja koefficienterna c_i för att likheten

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i g_i(x) \tag{6}$$

skall gälla. Om vi sätter in (6) i integralen (g_k, f), får vi

$$(g_k, f) = (g_k, \sum_{i=0}^{\infty} c_i g_i) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} c_i g_k(x) g_i(x) \, dx.$$

Under förutsättning att integrationen får göras termvis[1] blir det sista ledet

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i \int_{-\pi}^{\pi} g_k(x) g_i(x) \, dx = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(g_k, g_i) = 0 + c_k(g_k, g_k) = c_k(g_k, g_k).$$

Vi får alltså $c_k = (g_k, f)/(g_k, g_k)$. Detta ger formlerna (4), eftersom $(g_k, g_k) = \pi$ för $k \geq 1$, medan $(g_0, g_0) = 2\pi$; se uppgift 1904.

Anm. 1. Integralerna (f, g) är ett slags **skalärprodukter**. Resultatet är helt analogt med att varje vektor $\mathbf{v}$ i vårt vanliga 3-dimensionella rum $\mathbf{R}^3$ kan skrivas

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3,$$

där $c_k = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{v}/(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k)$ för $k = 1, 2, 3$, och den vanliga skalärprodukten i $\mathbf{R}^3$ betecknas med $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Samma resonemang som vi nyss genomförde gäller för ett **godtyckligt ortogonalt funktionssystem** $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ på ett intervall $[a, b]$. Skalärprodukten (f, g) är då $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$, och att systemet är ortogonalt betyder att $(h_i, h_k) = 0$ då $i \neq k$. Man finner att i en utveckling $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k h_k(x)$ i s.k. **ortogonalserie** (eller **allmän fourierserie**) bör man välja koefficienterna $c_k = (h_k, f)/(h_k, h_k)$.

EXEMPEL 6. Bestäm fourierserien med perioden 2π till funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{för } x > 0 \\ 0 & \text{för } x \leq 0 \end{cases};$$

jfr fig.19.3.

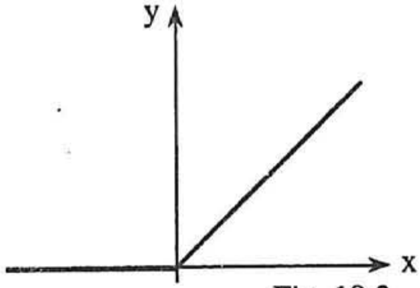


Fig. 19.3

[1] Detta är inte alltid tillåtet; se avsnitt 18.5.

Lösning: Fourierkoefficienterna beräknas enligt (4):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{\pi}{2};$$

$$\pi a_k = \int_0^\pi x\cos kx\,dx = [x\frac{\sin kx}{k}]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin kx}{k}\,dx =$$

$$= 0 + [\frac{\cos kx}{k^2}]_0^\pi = \frac{\cos k\pi - 1}{k^2} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \text{ för } k \geq 1, \text{ d.v.s.}$$

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{för jämna } k > 0 \\ -\frac{2}{\pi k^2} & \text{för udda } k \geq 1. \end{cases}$$

Vidare är

$$\pi b_k = \int_0^\pi x\sin kx\,dx = [-x\frac{\cos kx}{k}]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos kx}{k}\,dx =$$

$$= -\frac{\pi\cos k\pi}{k} + [\frac{\sin kx}{k^2}]_0^\pi = \frac{(-1)^{k+1}\pi}{k}, \text{ d.v.s.}$$

$$b_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{för } k \geq 1.$$

Detta ger oss

Svar: $f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}[\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}\cos kx + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx] =$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x + \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{2}{9\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{2}{25\pi}\cos 5x + \ldots.$$

Anm. 2. Om funktionen f är **periodisk med perioden** 2π kan integrationsintervallet $[-\pi, \pi]$ i formlerna (4) för bestämning av fourierkoefficienterna ersättas med ett godtyckligt valt intervall av längden 2π. T.ex. är då

$$\pi a_k = \int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx \text{ och } \pi b_k = \int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Bevisa detta!

Följande enkla sats underlättar ofta beräkningen av fourierkoefficienterna:

SATS 19.1 (OM FOURIERSERIER TILL JÄMNA OCH UDDA FUNKTIONER)

Om f är en jämn funktion som har en fourierserie, så är denna en s.k. **cosinusserie:**

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \text{ där } a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\, dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Om f är en udda funktion som har en fourierserie, så är denna en s.k. **sinusserie:**

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \text{ där } b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\, dx \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Bevis: Som bekant är $\sin kx$ en udda funktion och $\cos kx$ en jämn funktion. Om f är en jämn funktion, är därför $f(x)\sin kx$ udda och $f(x)\cos kx$ jämn. Således är (enligt uppgift 1017b)

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx = \frac{1}{\pi}\cdot 0 = 0 \quad \text{och}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\, dx.$$

Påståendet för en udda funktion bevisas analogt. |||

EXEMPEL 7. Bestäm fourierserien till funktionen

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{då } x < 0 \\ 1 & \text{då } x > 0 \end{cases};$$

jfr fig.19.4.

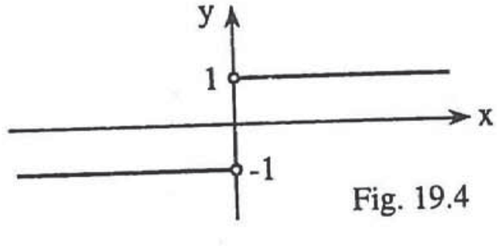


Fig. 19.4

Lösning: f är en udda funktion, varför fourierserien är en sinusserie

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

Vidare är

$$\frac{\pi}{2}b_k = \int_0^{\pi} 1\cdot \sin kx\, dx = [-\frac{\cos kx}{k}]_0^{\pi} = \frac{1-\cos k\pi}{k} =$$

$$= \frac{1-(-1)^k}{k} = \begin{cases} 0 & \text{för jämna } k \\ \frac{2}{k} & \text{för udda } k. \end{cases}$$

Alltså är

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{för jämna } k \\ \frac{4}{k\pi} & \text{för udda } k \end{cases}$$

och därmed

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sin x + \frac{4}{3\pi}\sin 3x + \frac{4}{5\pi}\sin 5x + \dots .$$

Svar: $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)x.$

EXEMPEL 8. Bestäm fourierserien till funktionen

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{då} \quad x < 0 \\ 1 & \text{då} \quad x > 0 \end{cases};$$

jfr fig.19.5.

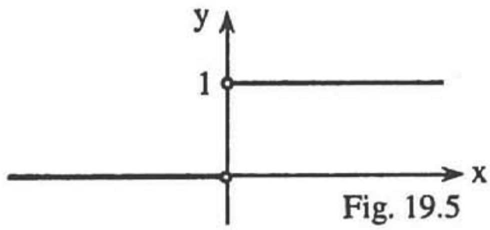


Fig. 19.5

Lösning: g är varken jämn eller udda. Däremot är

$$g(x) - \frac{1}{2} = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{2} & \text{då} \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{då} \quad x > 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}f(x),$$

där f är den udda funktionen i exempel 7. Av exempel 7 följer att

$$g(x) - \frac{1}{2} \sim \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{2}{3\pi}\sin 3x + \frac{2}{5\pi}\sin 5x + \dots .$$

Vidare gäller (kontrollera detta!) att

$$\frac{1}{2} \sim \frac{1}{2} + 0 + 0 + \dots .$$

Därmed får vi enligt stycket omedelbart efter definitionen på sid. 118

Svar: $g(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{2}{3\pi}\sin 3x + \frac{2}{5\pi}\sin 5x + \dots .$

UPPGIFTER

1903. Bestäm fourierserien till var och en av följande funktioner:

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{då } \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } |x| < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{då } \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{då } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 1 & \text{då } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{då } \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{då } -\pi < x < 0 \\ -1 & \text{då } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{då } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

e) $f(x) = |x|$ f) $f(x) = x^2$

g) $f(x) = \begin{cases} \pi + x & \text{då } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{då } x = 0 \\ \pi - x & \text{då } 0 < x < \pi \end{cases}$ h) $f(x) = \begin{cases} -\pi - x & \text{då } -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ x & \text{då } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{då } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$

i) $f(x) = x^2 + x$ j) $f(x) = x \sin x$

k) $f(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{då } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{då } 0 < x < \pi \end{cases}$ l) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{då } x < 0 \\ x^2 & \text{då } x > 0. \end{cases}$

1904. Bevisa att om k och n är naturliga tal så är

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{då } n \neq k \\ \pi & \text{då } n = k \geq 1 \\ 2\pi & \text{då } n = k = 0 \end{cases}$

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{då } n \neq k \\ \pi & \text{då } n = k \geq 1 \\ 0 & \text{då } n = k = 0 \end{cases}$ c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \, dx = 0.$

1905. a) Bestäm fourierserien till $\sin x + \cos 2x$.
b) Bevisa att om $\phi_n(x)$ är ett trigonometriskt polynom, så gäller att

$$\phi_n(x) \sim \phi_n(x) + 0 + 0 + \dots \text{ . (Använd uppg. 1904.)}$$

19.3 Fourierseriers konvergens och summa

I föregående avsnitt har vi rent formellt bildat fourierserien till en given funktion. Avsikten var, som vi nämnde på sid. 117, att framställa $f(x)$ som en trigonometrisk serie

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{7}$$

Nu kommer vi till frågan: I vilken mån har vi lyckats med detta? Det visar sig att (7) gäller under mycket allmänna villkor, dock inte alltid. Det är inte säkert att fourierserien konvergerar, och om den konvergerar är det inte säkert att dess summa är $f(x)$.

Vi gör först en enkel observation: Om fourierserien till en funktion f konvergerar och har summan $s(x)$, så har $s(x)$ perioden 2π, eftersom detta gäller för varje term i serien. Enligt definitionen av en series summa är ju $s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$, där

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

varför $s(x+2\pi) = \lim_{n\to\infty} s_n(x+2\pi) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$. Ett **nödvändigt** villkor för att $f(x)$ skall kunna framställas som summan av sin fourierserie på hela sin definitionsmängd är därför att f har perioden 2π.

Av det följande (speciellt sats 19.2) kommer det att framgå att likheten (7) gäller, om $f(x)$ är deriverbar och har perioden 2π. Deriverbarhet är dock ett onödigt starkt villkor. För att kunna formulera en sats som kan tillämpas även på allmännare funktioner är det lämpligt att införa begreppen styckevis kontinuerlig och styckevis deriverbar. Dessa innebär bl.a. kontinuitet resp. deriverbarhet utom i vissa undantagspunkter. Vi ger nu de precisa definitionerna:

DEFINITION (AV STYCKEVIS KONTINUERLIG OCH STYCKEVIS DERIVERBAR)

En funktion f säges vara **styckevis kontinuerlig** på ett intervall $[a, b]$, om f är definierad och kontinuerlig på $[a, b]$ utom eventuellt i ett ändligt antal undantagspunkter p, i vilka f har ensidiga gränsvärden:

(α) $\lim_{x\to p^+} f(x)$, då $p < b$. Detta gränsvärde betecknar vi här $f(p^+)$.

(β) $\lim_{x\to p^-} f(x)$, då $p > a$. Detta gränsvärde betecknar vi här $f(p^-)$.

En funktion f säges vara **styckevis deriverbar** på $[a, b]$, om f är definierad och deriverbar på $[a, b]$ utom eventuellt i ett ändligt antal undantagspunkter p, i vilka gränsvärden enligt (α) och (β) existerar liksom dessutom de ensidiga gränsvärdena

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(p+h) - f(p^+)}{h} \quad \text{och} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(p+h) - f(p^-)}{h}$$

(då $p < b$ resp. $p > a$).

Anm. 3. De sista gränsvärdena i definitionen är ett slags generaliserade höger- resp. vänsterderivator. De är nämligen precis $f'_+(p)$ resp. $f'_-(p)$ i normalfallet då $f(x)$ är höger- resp. vänsterkontinuerlig i p, d.v.s. då $f(p^+) = f(p)$ resp. $f(p^-) = f(p)$.

EXEMPEL 9. Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{då } 0 < x < 1 \\ 3 - x & \text{då } 1 < x < 2 \end{cases}$$

(jfr fig.19.6) är styckevis deriverbar på $[0, 2]$. I t.ex. punkten 1, där $f(x)$ inte är definierad, är $f(1^-) = 1$ och $f(1^+) = 2$. Vidare har $f(x)$ i denna punkt generaliserade ensidiga derivator:

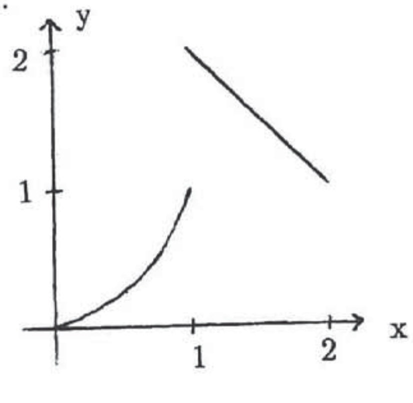


Fig. 19.6

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - 1}{h} = 2 \text{ och } \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - 2}{h} = -1.$$

SATS 19.2 (OM EN FOURIERSERIES SUMMA)

Antag att funktionen $f(x)$ är styckevis deriverbar på $[-\pi, \pi]$ och periodisk med perioden 2π. Då är fourierserien till f konvergent för varje reellt x och har summan $\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$. Speciellt har då fourierserien summan $f(x)$ i varje punkt x, där f är kontinuerlig.

Vi genomför inte beviset, men som anmärkning nämner vi något om ett väsentligt led:

Anm. 4. Man kan bevisa att delsumman $s_n(x)$ till fourierserien till en funktion $f(x)$ med perioden 2π kan skrivas

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} \, dt, \tag{8}$$

där högra ledet kallas **Dirichlets integral**. För att bevisa sats 19.2 delar man upp integralen i högra ledet av (8) som

$$\int_{-\pi}^{0} f(x+t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} \, dt + \int_{0}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} \, dt$$

och visar att dessa integraler har gränsvärdena $\pi f(x^-)$ resp. $\pi f(x^+)$ då $n \to \infty$. Därvid utnyttjar man likheten (8) för specialfallet $f(x) \equiv 1$ och förutsättningen att f är styckevis deriverbar. Den sistnämnda medför t.ex. att $[f(x+t) - f(x^+)]/\sin \frac{t}{2}$ har ett gränsvärde då $t \to 0^+$ och därmed är begränsad på $]0, \pi]$.

EXEMPEL 10. Låt f vara den funktion med perioden 2π för vilken
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{då } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{då } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

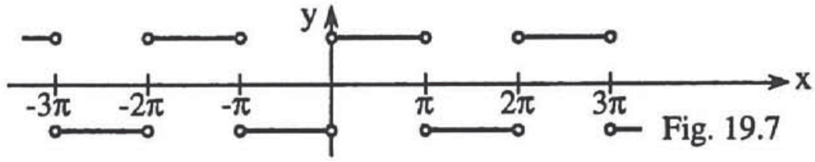


Fig. 19.7

$f(x)$ överensstämmer på intervallet $]-\pi, \pi[$ med funktionen i exempel 7, sid. 121. Dessa två funktioner har därför samma fourierserie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x$. Vidare uppfyller f förutsättningarna i sats 19.2 och är kontinuerlig utom då $x = n\pi$ där n är heltal. Alltså är
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)x \quad \text{då } x \neq n\pi.$$

T.ex. får vi för $x = \frac{\pi}{2}$ att $1 = \frac{4}{\pi}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots)$, och därmed
$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

Då $x = n\pi$ är $f(n\pi^+) + f(n\pi^-) = 0$, varför fourierseriens summa enligt satsen är 0 för dessa x. Detta ser man också direkt, eftersom varje term i serien blir 0 för $x = n\pi$.

Om f är styckevis deriverbar på $[-\pi, \pi]$ men inte har perioden 2π, så kan man tillämpa sats 19.2 på den funktion g, som överensstämmer med f på $]-\pi, \pi[$ och har perioden 2π. Funktionerna f och g har ju samma fourierserie, eftersom fourierkoefficienterna bestäms av funktionsvärdena på $]-\pi, \pi[$. Man säger att g bildas ur f genom **periodisk fortsättning**.

EXEMPEL 11.
Funktionen $f(x) = \begin{cases} x & \text{för } x > 0 \\ 0 & \text{för } x \leq 0 \end{cases}$
har fourierserien
$$\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} [\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \cos kx + \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx];$$

se exempel 6, sid.119-120. I fig. 19.8 har vi ritat den periodiska fortsättning g, som man får av f:s värden på $]-\pi, \pi[$. Observera att g inte är definierad för $x = (2n-1)\pi$ då n är heltal. För övriga x är fourierseriens summa $= g(x)$

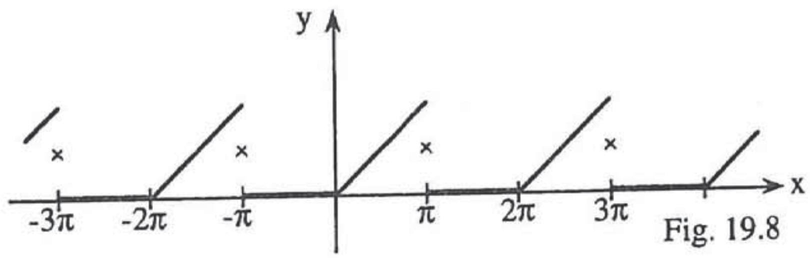


Fig. 19.8

enligt sats 19.2. Speciellt är

$$\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}[\frac{(-1)^k-1}{\pi k^2}\cos kx+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx]=\begin{cases} x & \text{då } 0<x<\pi \\ 0 & \text{då } -\pi<x\le 0. \end{cases}$$

Detta ger t.ex. för $x=0$ att

$$\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=0, \text{ d.v.s. } 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}\approx 1.234.$$

Då $x=(2n-1)\pi=x_n$ är fourierseriens summa $\frac{1}{2}[g(x_n^+)+g(x_n^-)]=\frac{\pi}{2}$; jfr fig. 19.8.

Det är instruktivt att studera graferna till några av delsummorna till en fourierserie. Betrakta t.ex. funktionen f i exempel 10. I detta fall är $s_1(x)=$ $=\frac{4}{\pi}\sin x, s_3(x)=\frac{4}{\pi}(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x), s_5(x)=\frac{4}{\pi}(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x)$ o.s.v. I fig. 19.9 ser man att $s_1(x)$ är en mycket grov approximation till $f(x)$. $s_3(x)$ är en bättre approximation, $s_5(x)$ en ännu bättre, o.s.v. Vi vet att

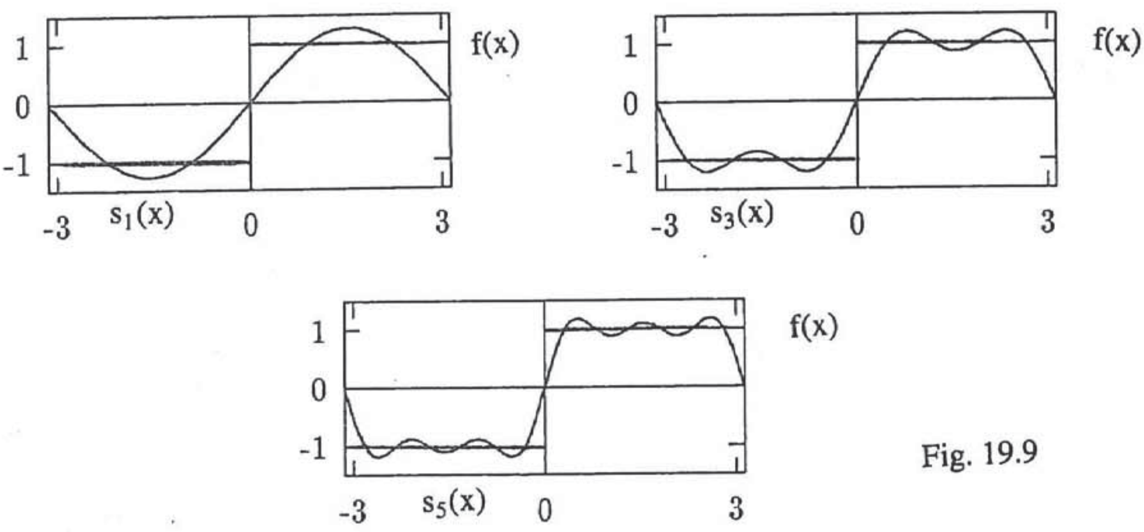


Fig. 19.9

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{då } x \neq n\pi,\ n \in Z \\ 0 & \text{då } x = n\pi. \end{cases}$$

Det framgår också av figuren att $s_1(n\pi) = s_3(n\pi) = s_5(n\pi) = 0$. Då $x = n\pi$ har alla delsummor till fourierserien värdet 0.

UPPGIFTER

1906. a)–l) Bestäm för varje reellt x summan av fourierserien till var och en av funktionerna i uppg. 1903. Rita grafen till fourierseriens summa.

1907. a) Bestäm fourierserien till funktionen $\cos\frac{x}{2}$.

b) Ange fourierseriens summa. c) Beräkna $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}}$.

1908. a) Funktionen $f(x)$ har perioden 2π och $f(x) = x^2$ då $x \in [0, 2\pi[$. Bestäm fourierserien till $f(x)$.

b) Använd fourierserien för att beräkna $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

c) Åskådliggör seriens summa grafiskt för $|x| < 7$.

19.4 Approximation med trigonometriska polynom. Parsevals formel

Man kan komma fram till fourierkoefficienterna på en annan väg, nämligen genom att studera ett approximationsproblem. Antag att f är en given funktion som har en fourierserie och att $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$ existerar. Vi betecknar denna integral $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$ med $(f,f) = ||f||^2$, där $||f||$ kallas **normen** av f. Problemet är att för ett givet heltal n finna det trigonometriska polynom p av ordning $\leq n$, som approximerar f bäst i den meningen att det s.k. **medelfelet**

$$\delta = ||f - p|| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - p(x)]^2\,dx\right)^{1/2} \tag{9}$$

blir så litet som möjligt. $p(x)$ är en linjärkombination av funktionerna

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx,$$

som vi här liksom i 19.2 betecknar med $g_0 = 1$, $g_1 = \sin x, \ldots$ resp. $g_{2n} = \cos nx$. Uppgiften är därmed att bestämma koefficienterna γ_k i $p(x) = \sum_{k=0}^{2n} \gamma_k g_k(x)$, så att medelfelet blir minimalt. Vi betecknar som i 19.2 integraler av formen

$\int_{-\pi}^{\pi} u(x)v(x)dx$ med (u,v) och observerar att de uppfyller de tre enkla räknelagarna:

$$(u,v) = (v,u), \quad (u, v+w) = (u,v) + (u,w) \text{ och } (cu,v) = c(u,v)$$

samt att $||u||^2 = (u,u) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)^2 dx \geq 0$. Vår uppgift, att minimera $||f - \sum_{k=0}^{2n} \gamma_k g_k||$, har nu en rent algebraisk lösning. För ett godtyckligt val av koefficienter γ_k får vi

$$\delta^2 = ||f - \sum_{k=0}^{2n} \gamma_k g_k||^2 = (f - \sum_{k=0}^{2n} \gamma_k g_k, f - \sum_{i=0}^{2n} \gamma_i g_i) =$$

$$= (f,f) - \sum_{i=0}^{2n} \gamma_i (f, g_i) - \sum_{k=0}^{2n} \gamma_k (g_k, f) + \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=0}^{2n} \gamma_k \gamma_i (g_k, g_i) =$$

$$= (f,f) - 2\sum_{k=0}^{2n} \gamma_k (f, g_k) + \sum_{k=0}^{2n} \gamma_k^2 (g_k, g_k),$$

eftersom $(g_k, g_i) = 0$ då $k \neq i$ enligt uppg. 1904. Om vi inför talen c_k definierade av att $(f, g_k) = c_k ||g_k||^2$, kan vi skriva det sista ledet

$$\delta^2 = ||f||^2 - 2\sum_{k=0}^{2n} \gamma_k c_k ||g_k||^2 + \sum_{k=0}^{2n} \gamma_k^2 ||g_k||^2 =$$

$$= ||f||^2 + \sum_{k=0}^{2n} ||g_k||^2 (\gamma_k^2 - 2\gamma_k c_k + c_k^2 - c_k^2) =$$

$$= ||f||^2 + \sum_{k=0}^{2n} ||g_k||^2 (\gamma_k - c_k)^2 - \sum_{k=0}^{2n} ||g_k||^2 c_k^2.$$

Här är det uppenbart att det minsta möjliga värdet av δ^2 blir

(10) $$\delta_0^2 = ||f||^2 - \sum_{k=0}^{2n} ||g_k||^2 c_k^2$$

och erhålles då

$$\gamma_k = c_k = (f, g_k)/||g_k||^2 = ||g_k||^{-2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g_k(x)\, dx$$

för $k = 0, 1, \ldots, 2n$. Eftersom $||g_k||^2 = \pi$ då $k > 0$ och $||g_0||^2 = 2\pi$ — se uppg. 1904, är de optimala γ_k vi funnit

$$\gamma_k = (f, g_k)/\pi = \begin{cases} a_m & \text{då } k = 2m > 0 \\ b_m & \text{då } k = 2m - 1 \end{cases} \quad \text{och } \gamma_0 = (f, g_0)/2\pi = a_0/2,$$

d.v.s. precis fourierkoefficienterna enligt definitionen på sid.118. Därmed har vi bevisat:

SATS 19.3 (OM APPROXIMATION MED TRIGONOMETRISKA POLYNOM)

Låt $f(x)$ vara en funktion, sådan att f har fourierserie och $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx$ existerar. Det trigonometriska polynom (med perioden 2π) av ordning $\leq n$, som bäst approximerar f, i den meningen att medelfelet δ blir så litet som möjligt, är då delsumman av ordningen n till f:s fourierserie.

Anm. 5. Att normen $||f - p|| = \delta$ i (9) är liten innebär att avvikelsen $|f(x) - p(x)|$ är liten **i genomsnitt** över $[-\pi, \pi]$. Detta hindrar inte att $|f(x) - p(x)|$ kan vara ganska stor på ett kort delintervall av $[-\pi, \pi]$.

Anm. 6. Vi har valt att använda beteckningarna g_k och skrivsättet med s.k. skalärprodukter (f, g) av två skäl:
(I) Lösningen kan då skrivas relativt kort och enkelt, så att dess väsentliga struktur blir synlig.
(II) Lösningen gäller i samma form för ett mycket allmännare fall — i ett godtyckligt vektorrum med skalärprodukt. Vi har egentligen visat följande: För varje system $\{g_k\}$ av parvis ortogonala vektorer och en godtycklig given vektor f i ett sådant rum, är

$$\sum_{k=0}^{N} c_k g_k = \sum_{k=0}^{N} (f, g_k)||g_k||^{-2} g_k$$

den linjärkombination av $g_0, g_1, \ldots, g_N$ som "ligger närmast" f. Denna brukar kallas **projektionen** av f på det underrum som bestäms av $g_0, g_1, \ldots, g_N$.

Av lösningen till approximationsproblemet får vi lätt ytterligare en sats:

SATS 19.4 (BESSELS OLIKHET)

Antag att funktionen f har en fourierserie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

och att $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx$ existerar. Då gäller

$$\text{(11)} \quad \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx \qquad \textbf{(Bessels olikhet)}$$

och

$$\text{(12)} \quad \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0 \quad . \quad \textbf{(Riemann-Lebesgues lemma).}$$

Bevis: I vårt approximationsproblem ovan måste kvadraten på det minsta medelfelet (10) vara ≥ 0, d.v.s.

$$0 \leq ||f - s_n||^2 = ||f||^2 - \sum_{k=0}^{2n} ||g_k||^2 c_k^2) = \tag{13}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx - 2\pi c_0^2 - \pi \sum_{k=1}^{2n} c_k^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx - \frac{\pi}{2} a_0^2 - \pi \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 + b_i^2).$$

Detta ger

$$\sigma_n = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 + b_i^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx,$$

vilket innebär att delsummorna σ_n till den positiva serien $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^2 + b_i^2)$ är begränsade uppåt. Denna serie är därför konvergent enligt huvudsatsen för positiva serier. Det följer också att dess summa $= \lim_{n\to\infty} \sigma_n \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx$, vilket är Bessels olikhet.
Vidare måste enligt sats 17.1 seriens allmänna term $a_n^2 + b_n^2 \to 0$ då $n \to \infty$. Av detta följer det sista påståendet (12) i satsen. |||

Mellan de båda leden i (11) råder i själva verket **likhet** . Detta är innehållet i följande sats, som vi ger utan bevis:

SATS 19.5 (PARSEVALS FORMEL)

Antag att funktionen f har en fourierserie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

och att $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx$ existerar. Då gäller

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx \qquad \textbf{(Parsevals}^2 \textbf{ formel).}$$

EXEMPEL 12. Tillämpas Parsevals formel på funktionen $f(x) = |x|/x$ i exempel 7, sid. 121, där $b_k = 4/k\pi$ för udda k medan övriga fourierkoefficienter är 0, så får man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{(2n-1)^2 \pi^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 2.$$

[2] Fransmannen M.A.Parseval visade en variant av formeln år 1799.

Av detta följer att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 2 \cdot \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{8} \approx 1.234.$$

Anm. 7. Parsevals formel innebär att det sista ledet i (13), sid.131, går mot 0 då $n \to \infty$, d.v.s. $||f - s_n|| \to 0$ då $n \to \infty$. Man kan således, genom att approximera f med en delsumma s_n till fourierserien av tillräckligt hög ordning, få det kvadratiska medelfelet hur litet som helst. Man brukar formulera detta i frasen: $s_n(x)$ **konvergerar i norm** mot $f(x)$ då $n \to \infty$.

UPPGIFTER

1909. a) Bestäm talen a, b och c så att integralen

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - a - b\cos x - c\sin x)^2 \, dx$$

blir så liten som möjligt och ange minimivärdet.
b) Bestäm talen a, b, c, d och e så att integralen

$$\int_{-\pi}^{\pi} (x - a - b\cos x - c\sin x - d\cos 2x - e\sin 2x)^2 \, dx$$

blir så liten som möjligt och ange minimivärdet.
c)Bestäm $s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ med minsta möjliga n så att

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [x - s_n(x)]^2 \, dx < 0.4.$$

1910. Bestäm summan av var och en av följande serier genom att använda Parsevals formel på den angivna funktionen:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$; $f(x) = x$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$; $f(x) = |x|$ c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}$; $f(x) = x^3 - \pi^2 x$.

Beräkna vidare

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ och e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^6}$

utgående från resultaten i b) resp. c).

1911. Finns det någon funktion sådan att $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx$ existerar, som har fourierserien $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$? Motivera svaret!

1912. Bevisa att om funktionen $f(x)$ har perioden 2π och kontinuerlig andraderivata, så gäller för dess fourierkoefficienter a_k och b_k att $\lim_{k\to\infty} k^2 a_k = \lim_{k\to\infty} k^2 b_k = 0$.

19.5 Fourierserien till en funktion med godtycklig period

Vi går nu över till det allmänna fallet, då $f(t)$ är en periodisk funktion med godtycklig period p. Vi sätter $p = 2a$ och gör substitutionen $t = ax/\pi$. Vår funktion kan då skrivas

$$f(t) = f(\frac{ax}{\pi}) = g(x),$$

där $g(x)$ har perioden 2π, eftersom

$$g(x+2\pi) = f(\frac{a}{\pi}(x+2\pi)) = f(\frac{ax}{\pi}+2a) = f(\frac{ax}{\pi}) = g(x).$$

Om g har en fourierserie $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ kan denna skrivas

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\frac{k\pi t}{a} + b_k \sin\frac{k\pi t}{a}).$$

Vidare ger vår substitution, eftersom $g(x) = f(t)$ och $x = \pi t/a$, att

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(t)\cos\frac{k\pi t}{a}\,dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(t)\sin\frac{k\pi t}{a}\,dt.$$

Följande definition är därför naturlig:

DEFINITION (AV FOURIERSERIE)

Serien $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\frac{k\pi t}{a} + b_k \sin\frac{k\pi t}{a})$, där

$$a_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(t)\cos\frac{k\pi t}{a}\,dt \text{ och } b_k = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(t)\sin\frac{k\pi t}{a}\,dt$$

kallas **fourierserien med perioden** $2a$ till $f(t)$.

OBS. 1. Om den periodiska funktionen $f(t)$ är styckevis deriverbar på $[-a,a]$, uppfyller hjälpfunktionen $g(x)$ förutsättningarna i sats 19.2. Denna sats visar därför att fourierserien är konvergent för varje t och har summan $\frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)]$. Speciellt är summan $= f(t)$ i de punkter där $f(t)$ är kontinuerlig.

Vidare gäller **Parsevals formel**

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2\,dx = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(t)^2\,dt,$$

om denna integral existerar.

EXEMPEL 13. Bestäm fourierserien med perioden 1 till funktionen $f(t) = t - [t]$ och ange seriens summa. ($[t]$ är heltalsdelen av t; se uppg. 304 i del 1 och fig. 19.10.)

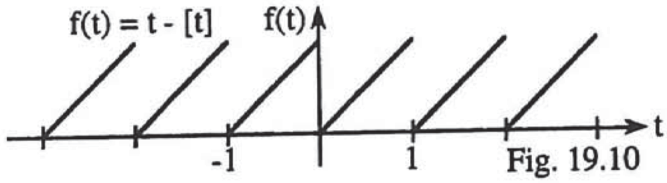


Fig. 19.10

Lösning: Vi skall beräkna fourierkoefficienterna

$$a_k = 2\int_{-1/2}^{1/2} f(t)\cos 2k\pi t\, dt \text{ och } b_k = 2\int_{-1/2}^{1/2} f(t)\sin 2k\pi t\, dt.$$

Eftersom $f(t)$ har perioden 1 och $f(t) = t$ då $0 \le t < 1$, är (jfr anm. 2, sid.120)

$$a_k = 2\int_0^1 t\cos 2k\pi t\, dt = [2t\frac{1}{2k\pi}\sin 2k\pi t]_0^1 - \int_0^1 t\frac{1}{k\pi}\sin 2k\pi t\, dt =$$

$$= [\frac{1}{2k^2\pi^2}\cos 2k\pi t]_0^1 = 0 \text{ då } k > 0,$$

$a_0 = 2\int_0^1 t\, dt = [t^2]_0^1 = 1,$

$$b_k = 2\int_0^1 t\sin 2k\pi t\, dt = [-2t\frac{1}{2k\pi}\cos 2k\pi t]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{k\pi}\cos 2k\pi t\, dt =$$

$$= -\frac{1}{k\pi} + [\frac{1}{2k^2\pi^2}\sin 2k\pi t]_0^1 = -\frac{1}{k\pi}.$$

Den sökta fourierserien blir därför enligt ovan

$$\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\pi}\sin 2k\pi t.$$

Enligt OBS.1 är fourierseriens summa $= f(t) = t - [t]$ utom för heltalsvärden på t. För $t = n$ =heltal är summan $\frac{1}{2}[f(n^+) + f(n^-)] = \frac{1}{2}[0+1] = \frac{1}{2}$.
För t.ex. $t = \frac{1}{2\pi}$ får man alltså att $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k} = \frac{1}{2\pi}$, d.v.s.

$$\frac{\sin 1}{1} + \frac{\sin 2}{2} + \frac{\sin 3}{3} + \ldots = \frac{\pi - 1}{2} \approx 1.07.$$

UPPGIFTER

1913. Funktionen f är periodisk med perioden 2 och $f(t) = 1 - |t|$ då $|t| \leq 1$. Bestäm fourierserien med perioden 2 till $f(t)$.

1914. Utveckla funktionen $f(t) = |\sin t|$ i fourierserie med perioden π.

1915. Bestäm fourierserien med perioden 4 till funktionen
$$f(t) = \begin{cases} E & \text{då } |t| < 1 \\ 0 & \text{då } 1 < |t| < 2. \end{cases}$$

1916. Utgångsspänningen $u(t)$ från en halvvågslikriktare har perioden T och

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{då } -T/2 < t < 0 \\ E \sin \omega t & \text{då } 0 < t < T/2 \end{cases}, \text{ där } T = 2\pi/\omega.$$

Utveckla $u(t)$ i fourierserie med perioden T.

19.6 Cosinusserier och sinusserier

Antag att funktionen $f(t)$ är styckevis deriverbar på intervallet $[0, a]$. Vi definierar då en ny funktion f_0 så att $f_0(t) = f(t)$ på $[0, a]$, och så att f_0 blir en **jämn** funktion på $[-a, a]$; se fig.19.11. $f_0(t)$ är styckevis deriverbar på $[-a, a]$ och har en fourierserie med perioden $2a$. Eftersom f_0 är jämn, är denna en cosinusserie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi t}{a}, \qquad \text{där} \qquad a_k = \frac{2}{a} \int_0^a f(t) \cos \frac{k\pi t}{a} \, dt;$$

jfr sats 19.1 och definitionen på sid. 133. För varje kontinuitetspunkt t till f i intervallet $[0, a]$ har vi enligt OBS.1

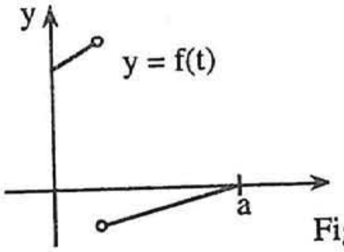
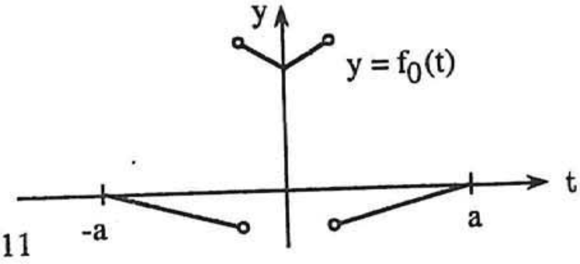


Fig. 19.11



$$f(t) = f_0(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi t}{a}.$$

Man säger att funktionen $f(t)$ har utvecklats i **cosinusserie** på $[0, a]$.

Helt analogt kan man utveckla $f(t)$ i **sinusserie** på det öppna intervallet $]0, a[$: I alla punkter $t \in]0, a[$, där f är kontinuerlig, är

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi t}{a} \qquad \text{där} \qquad b_k = \frac{2}{a} \int_0^a f(t) \sin \frac{k\pi t}{a}\, dt.$$

Serien i högra ledet är då fourierserien till den **udda** funktion $f_1(t)$ på $[-a, a]$ för vilken $f_1(t) = f(t)$ då $t \in]0, a]$; se fig. 19.12.

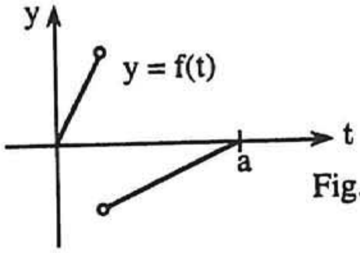
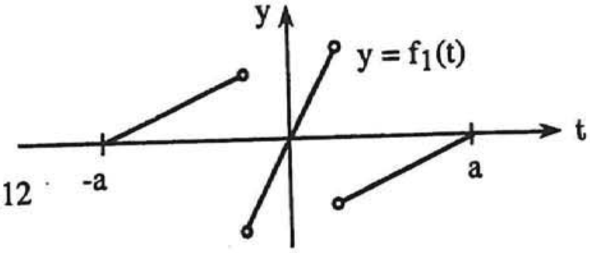


Fig. 19.12



EXEMPEL 14. Utveckla $f(x) = x$ dels i cosinusserie, dels i sinusserie på $[0, \pi[$.

Lösning: Med beteckningarna ovan inför vi den jämna funktionen $f_0(x) = |x|$ på $[-\pi, \pi]$ och beräknar dess fourierkoefficienter

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{\pi}{2};$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{för jämna } k > 0 \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{för udda } k; \end{cases}$$

se lösningen av ex. 6, sid. 120. Enligt ovan får vi med dessa koefficienter en fourierserie med summan $f(x)$, d.v.s.

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x \text{ då } 0 \le x \le \pi. \tag{14}$$

Koefficienterna i den sökta sinusserien är enligt ovan

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx\, dx = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}.$$

(Även dessa integraler har beräknats på sid. 120.) Alltså är då $0 < x < \pi$

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx, \tag{15}$$

och denna likhet gäller uppenbarligen även för $x = 0$.
Observera att högerleden i (14) och (15) visserligen båda är $= x$ då $0 \leq x < \pi$, men då $-\pi < x < 0$ är de båda högerleden olika. De är då $-x$ resp. x.

UPPGIFTER

1917. Utveckla $x(\pi - x)$ i cosinus- resp. sinusserie på $[0, \pi]$. Rita graferna till seriernas summor på $[-2\pi, 2\pi]$.

1918. Utveckla i cosinusserie på $[0, \pi]$

a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{då } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{då } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$ b) $\sin x$

1919. Utveckla i sinusserie för $0 < t < a$

a) $f(t) = \begin{cases} 2ht/a & \text{då } 0 < t < \frac{a}{2} \\ 2h(a-t)/a & \text{då } \frac{a}{2} < t < a \end{cases}$ b) t^2

1920. Utveckla

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2s} & \text{då } 0 \leq x \leq 2s \\ 0 & \text{då } 2s < x \leq \pi \end{cases}$$

i cosinusserie på $[0, \pi]$. Beräkna sedan $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\sin ks}{ks})^2$ och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2ks}{k^2}$.

19.7 Ett svängningsproblem. Fouriers metod

Vi skall studera en homogen sträng som är fastspänd i sina båda ändar i punkterna $(0, 0)$ och $(a, 0)$. Strängen svänger transversellt kring sitt rätliniga jämviktsläge, d.v.s. punkterna på strängen kan endast röra sig parallellt med y-axeln. Om $u(x, t)$ betecknar avvikelsen från jämviktsläget vid tiden t (räknad med tecken) för en punkt på strängen med x-koordinaten x, så kan man för **små** svängningar visa att $u(x, t)$ med stor noggrannhet satisfierar den partiella differentialekvationen (**vågekvationen** i en rumsvariabel)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{16}$$

där c är en konstant, som beror på strängens spänning, tvärsnitt och massa per längdenhet. Funktionen $u(x,t)$ uppfyller också **randvillkoren**

$$(17) \qquad u(0,t) \equiv 0 \qquad \text{och} \qquad u(a,t) \equiv 0.$$

Om dessutom strängens läge och hastighet vid tiden 0 är givna, så innebär detta att $u(x,t)$ även uppfyller **begynnelsevillkor** av typen

$$(18) \qquad u(x,0) = \varphi(x) \text{ och } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \text{ för } 0 \le x \le a.$$

(På grund av (17) måste tydligen $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$ och $\psi(0) = \psi(a) = 0$.)

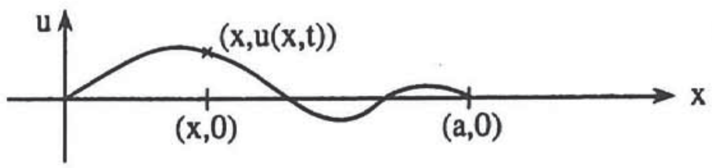


Fig. 19.13 Strängens utseende vid tiden t, d.v.s. $u = u(x,t)$.

Strängens svängningar bestäms av den lösning till vågekvationen (16) som också uppfyller (17) och (18). Vi skall nu presentera en metod att bestämma en sådan lösning, nämligen **variabelseparationsmetoden (Fouriers metod).**

Vi börjar med att söka lösningar till (16) av den speciella formen

$$(19) \qquad u(x,t) = f(x)g(t).$$

Partiell derivering ger i detta fall

$$(20) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x)g(t) \qquad \text{och} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x)g''(t),$$

varför (16) får formen

$$f(x)g''(t) = c^2 f''(x)g(t), \qquad \text{d.v.s.} \qquad \frac{g''(t)}{g(t)} = c^2 \frac{f''(x)}{f(x)}$$

(om $g(t) \neq 0, f(x) \neq 0$). Här är vänstra ledet oberoende av x och högra ledet oberoende av t (variablerna är separerade). Å andra sidan är ju leden lika, varför båda leden måste vara oberoende av både x och t, d.v.s. konstanta. Alltså är

$$\frac{g''(t)}{g(t)} = c^2 \frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda.$$

Vi får därmed för funktionerna $f(x)$ och $g(t)$ de ordinära differentialekvationerna

$$f''(x) - \frac{\lambda}{c^2} f(x) = 0 \quad \text{resp.} \tag{21}$$

$$g''(t) - \lambda g(t) = 0. \tag{22}$$

Av (17) och (19) följer att $f(x)$ också måste uppfylla randvillkoren

$$f(0) = f(a) = 0. \tag{23}$$

Den allmänna lösningen till (21) är för $\lambda = \mu^2 c^2 > 0$, för $\lambda = 0$ resp. för $\lambda = -\nu^2 c^2 < 0$:

$$Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}, \quad Ax + B \text{ resp. } A \sin \nu x + B \cos \nu x.$$

Randvillkoret $f(0) = 0$ ger $B = -A$, $B = 0$ resp. $B = 0$. Vi har därmed

$$f(x) = 2A \sinh \mu x, \quad f(x) = Ax \text{ resp. } f(x) = A \sin \nu x.$$

Randvillkoret $f(a) = 0$ kräver sedan att $A = 0$, och vi får den ointressanta lösningen $f(x) \equiv 0$, utom i det sista fallet om $\nu = n\pi/a$. För $\lambda = -(n\pi c/a)^2$ uppfyller lösningen $f(x) = A \sin(n\pi x/a)$ för godtyckligt A randvillkoret $f(a) = 0$.

Det s.k. **egenvärdesproblem** som ges av (21) och (23) har således icke-triviala lösningar endast för $\lambda_n = -(n\pi c/a)^2$, där $n = 1, 2, \ldots$. Dessa tal kallas **egenvärden** till problemet, och motsvarande lösningar $f(x) = A \sin(n\pi x/a)$ kallas **egenfunktioner**.

Den allmänna lösningen till (22) för $\lambda = -(n\pi c/a)^2$ är

$$g(t) = A_n \cos \frac{n\pi ct}{a} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{a}.$$

(16) och (17) satisfieras därför av

$$u(x,t) = \sin \frac{n\pi x}{a} (A_n \cos \frac{n\pi ct}{a} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{a}) \tag{24}$$

för $n = 1, 2, \ldots$.
Det återstår nu att uppfylla även villkoren (18). Detta är i allmänhet inte möjligt med en lösning av formen (24). Vi observerar emellertid att om $u_1(x,t)$ och $u_2(x,t)$ båda uppfyller (16) och (17), så gäller detta även för $u_1(x,t) + u_2(x,t)$. Motsvarande observation gäller för en summa av flera eller t.o.m. oändligt många

lösningar till (16) och (17). I det sistnämnda fallet förutsättes då givetvis att serien konvergerar och att den får deriveras termvis. Vi försöker därför uppfylla (18) med en funktion

$$(25) \qquad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{a}\left(A_n \cos\frac{n\pi ct}{a} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{a}\right).$$

Villkoren (18) får då formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x/a) = \varphi(x) \qquad \text{och} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{a} B_n \sin(n\pi x/a) = \psi(x).$$

Koefficienterna A_n och $\frac{n\pi c}{a}B_n$, för $n = 1, 2, \ldots$ skall därför väljas som koefficienterna i sinusserien till $\varphi(x)$ resp. $\psi(x)$ på intervallet $[0, a]$. Genom att bestämma dessa enligt 19.6 får vi problemets lösning på formen (25).

UPPGIFTER

1921. Sök en lösning till vågekvationen $u''_{tt} = u''_{xx}$ i punktmängden $D = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, t \ge 0\}$, som uppfyller randvillkoren $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $u(x,0) = x - x^2$, $u'_t(x,0) = 0$. Vilket fysikaliskt problem motsvarar detta?

1922. Bestäm rörelsen hos en svängande sträng

a) om strängen släpps utan begynnelsehastighet från det läge, som anges av polygondraget från $(0,0)$ via $(\frac{a}{2}, d)$ till $(a, 0)$.

b) om strängen vid $t = 0$ är rak och i vila utom på ett kort stycke $b - h < x < b + h$, vilket genom ett anslag får en viss begynnelsehastighet v.

c) Var på strängen bör anslaget i b) göras för att grundtonen skall bli så stark som möjligt? (Sök maximum av B_1 i (25) då b varierar men h och v är fixa.)

1923. Lös följande begynnelse- och randvärdesproblem för den s.k. **värmeledningsekvationen** (avkylning av en homogen platta med tjockleken a, vilken för $t = 0$ har temperaturen T_0 och då placeras mellan två isblock):

$$u'_t = u''_{xx} \qquad \text{för } 0 < x < a,\ t > 0,$$

$$u(x,0) = T_0 \quad \text{för } 0 < x < a, \quad u(0,t) = u(a,t) = 0 \quad \text{för } t > 0.$$

1806. a-b) Använd den geometriska serien (jfr ex.3).
c)Skriv $(\frac{1-x}{1+x})^2 = 1 - \frac{4x}{(1+x)^2}$ och använd ex. 3. d)Jfr ex.3.

1809. a) Integrera $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}$. b) Derivera först $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = s(x)$ och sedan $xs'(x)$. d) Börja med att derivera maclaurinserien för e^x.
e) Se ledn. till d). f) Ersätt först $\frac{1}{3}$ med x. g) Se ledn. till b).

1811. Derivera först $f(x)$ sedan $f'(x)$ o.s.v.

1813. Jämför $xf(x)$ med $f(x)$.

1818-22. Fixera x och låt sedan $n \to \infty$, när Du skall bestämma gränsfunktionen.

1842. Tag i de två sista serierna real- resp. imaginärdelen av den första serien.

1843. a) Skriv båda leden på polär form. b-d) Använd Eulers formler. Beräkna sedan $e^{iz} = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$.

KAPITEL 19

1901. a-b) Använd de Moivres formel. c) Använd Eulers formler.

1902. a) Använd satsen om absolut konvergens.
b-c) Undersök först om seriens n-te term $\to 0$ då $n \to \infty$ för fixt x.

1903. Använd sats 19.1 då $f(x)$ är jämn eller udda, annars def.
i) Jfr raderna omedelbart efter definitionen på sid. 118.

1904. Skriv om integranderna som summor.

1906. Använd sats 19.2. Se även kommentaren om periodisk fortsättning sid. 126.

1907. Använd b) och välj t.ex. x så att $\cos nx = (-1)^n$ för alla n.

1908. Använd a) och välj x lämpligt.

1909. Använd sats 19.3 och (13) sid.131.

1910. d) $s = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} = \sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{-4} + \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^{-4} = \frac{s}{16} + \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^{-4}$.
e) Jfr ledn. till d).

1911. Använd (12) i sats 19.4.

1912. Integrera fourierkoefficienterna a_k och b_k partiellt två gånger. Använd sedan sats 19.4 på f'' i stället för f.

1920. Välj x lämpligt i fourierserien när Du skall beräkna summorna; skriv om $\cos 2ks$ i den andra summan.

c) $\pm z = \frac{\pi}{2} - i\ln(1+\sqrt{2}) + 2n\pi$

d) $z = \arctan\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\ln 5 + 2n\pi$ och $z = \pi - \arctan\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\ln 5 + 2n\pi$

KAPITEL 19

1901. $P(u,v)$ är inte entydigt bestämt

1902. a) alla t b) inga t c) $t = n\pi$ för $n \in \mathbf{Z}$

1903. a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cos(2k-1)x$ b) $\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cos(2k-1)x$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ med $b_n = \begin{cases} 2/n\pi & \text{för} \quad \text{udda } n \\ 4/n\pi & \text{för} \quad n = 4k+2 \\ 0 & \text{för} \quad n = 4k \end{cases}$

d) $a_n = (-1)^k \frac{2}{n\pi}$ för udda $n = 2k-1$, $b_{4k+2} = -\frac{2}{\pi(2k+1)}$, övriga koeff. $= 0$

e) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^{-2}\cos(2k-1)x$ f) $\frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\cos kx$

g) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^{-2}\cos(2k-1)x$ h) $\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(2k-1)^{-2}\sin(2k-1)x$

i) $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}(4\cos kx - 2k\sin kx)$ j) $1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2-1}\cos kx$

k) $\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx$

l) $\frac{\pi^2}{6} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{(-1)^k\frac{2}{k^2}\cos kx + \left[(-1)^k\left(\frac{2}{\pi k^3} - \frac{\pi}{k}\right) - \frac{2}{\pi k^3}\right]\sin kx\right\}$

1905. $\sin x + \cos 2x$

1906. I alla deluppgifterna har fourierseriens summa $s(x)$ perioden 2π.
För $-\pi < x \leq \pi$ är $s(x) = f(x)$ med **följande undantag**:
a) $s(\pm\pi/2) = 1/2$ b) $s(\pm\pi/2) = 0$
c) $s(-\pi/2) = -1/2$, $s(0) = 0$, $s(\pi/2) = 1/2$
d) $s(0) = -1/2$, $s(\pi/2) = 0$, $s(\pi) = 1/2$
g) $s(0) = \pi$ i) $s(\pi) = \pi^2$ l) $s(\pi) = \pi^2/2$

1907. a) $\frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi(n^2-1/4)}\cos nx$ b) $\left|\cos\frac{x}{2}\right|$ c) 2

1908. a) $\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}(\cos nx - n\pi\sin nx)$ b) $\pi^2/6$

1909. a) $a = \pi^2/3,\ b = -4,\ c = 0,\ \ \pi\left(\dfrac{8\pi^4}{45} - 16\right) \approx 4.14$

b) $a = b = d = 0,\ c = 2,\ e = -1,\ \ \dfrac{2\pi^3}{3} - 5\pi$ c) $2\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kx$

1910. a) $\pi^2/6$ b) $\pi^4/96$ c) $\pi^6/945$ d) $\pi^4/90$ e) $\pi^6/960$

1911. Nej, det strider mot Riemann-Lebesgues lemma (12)

1913. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-2}\cos(2n+1)\pi t$

1914. $\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nt}{4n^2-1}$

1915. $\dfrac{E}{2} + \dfrac{2E}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi t$

1916. $\dfrac{E}{\pi} + \dfrac{E}{2}\sin\omega t - \dfrac{2E}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(4k^2-1)^{-1}\cos 2k\omega t$

1917. $\dfrac{\pi^2}{6} - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\cos 2nx$ resp. $\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-3}\sin(2n+1)x$

1918. a) $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)^{-1}\cos(2n-1)x$

b) $\dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{1}{2} - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(4n^2-1)^{-1}\cos 2nx\right]$

1919. a) $\dfrac{8h}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi t}{a}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{a}$, där $b_n = \begin{cases} -2a^2/n\pi & \text{för jämna } n \\ 2a^2/n\pi - 8a^2/\pi^3 n^3 & \text{för udda } n \end{cases}$

1920. $\dfrac{s}{\pi} + \dfrac{2}{\pi s}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}\sin^2 ks \cos kx,\ \ \frac{\pi}{2s} - \frac{1}{2},\ \ \frac{\pi^2}{6} - \pi s + s^2$

1921. $u(x,t) = \dfrac{8}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-3}\sin(2n+1)\pi x\cos(2n+1)\pi t$

1922. a) $u(x,t) = \dfrac{8d}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{a}\cos\frac{(2k+1)c\pi t}{a}$

b) $u(x,t) = -\dfrac{4v}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi b/a)\sin(n\pi h/a)}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{nc\pi t}{a}$ c) $b = a/2$

1923. $u(x,t) = \dfrac{4T_0}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\sin[(2k+1)\pi x/a]}{2k+1}e^{-(2k+1)^2\pi^2t/a^2}$

KAPITEL 20

2001. a) $\dfrac{3}{s^2}+\dfrac{4}{s}$ b) $\dfrac{a}{s^2}+\dfrac{b}{s}$ c) $\dfrac{2}{s^3}+\dfrac{a}{s^2}+\dfrac{b}{s}$ d) $\dfrac{2b^2}{s^3}+\dfrac{2ab}{s^2}+\dfrac{a^2}{s}$
e) $\dfrac{2}{(s-1)^2}$ f) $\dfrac{2}{(s+2)^3}$ g) $\dfrac{e^b}{s-a}$ h) $\dfrac{s+1}{s^2+2s+5}$
i) $\dfrac{2n\pi T}{T^2s^2+4n^2\pi^2}$ j) $\dfrac{s\cos\theta-\omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}$ k) $\dfrac{\omega\cos\theta+s\sin\theta}{s^2+\omega^2}$

2002. a) $\dfrac{k}{s}(1-e^{-cs})$ b) $-\dfrac{k}{s}e^{-cs}+\dfrac{k}{cs^2}(1-e^{-cs})$
c) $\dfrac{k}{s}-\dfrac{k}{cs^2}(1-e^{-cs})$ d) $\dfrac{k}{s}e^{-cs}(1-e^{-bs})$

2003. $2\omega^2/[s(s^2+4\omega^2)]$

2004. a) $\dfrac{1}{(s-2)^2}$ b) $\dfrac{2}{(s-1)^3}$ c) $\dfrac{2bs}{(s^2-b^2)^2}$ d) $\dfrac{12s^2+16}{(s^2-4)^3}$
e) $\dfrac{2s(s^2-3\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^3}$ f) $\dfrac{1}{s^3}+\dfrac{s^3-12s}{(s^2+4)^3}$ g) $\dfrac{1}{2}\ln(1+\dfrac{\omega^2}{s^2})$ h) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{s+b}{s-b}$

2006. a) $5e^{-3t}$ b) $\dfrac{1}{2}\sin 4t$ c) $\cos t+\sin t$
d) $\cosh 2t-2\sinh 2t=\dfrac{3}{2}e^{-2t}-\dfrac{1}{2}e^{2t}$ e) te^{-9t} f) $e^{-2t}\cos t$
g) $e^t(\cosh 2t+\dfrac{1}{2}\sinh 2t)=\dfrac{3}{4}e^{3t}+\dfrac{1}{4}e^{-t}$ h) $\dfrac{1}{a-b}(e^{at}-e^{bt})$ i) $e^{-t}\sin t$

2007. a) $1-e^{-t}$ b) $\cosh 2t-1$ c) $\dfrac{1}{4}(1-\cos 2t)$ d) $\dfrac{1}{a}(1-e^{-at})$
e) $2e^{-at}-1$ f) $\sinh 2t-2t$ g) $\dfrac{1}{8}(e^{2t}-1-2t-2t^2)$ h) $1+t-\cos t-\sin t$

2008. a) $3-2e^{-4t}$ b) $2e^{-4t}+e^{2t}$ c) $1-2\sinh 5t$ d) $3\cos 3t-\dfrac{1}{3}\sin 3t$
e) $e^t(\cos t+\sin t)$ f) $2e^{3t}+\cos t+\sin t$ g) $e^{2t}(2t-4)$
h) $e^{-t}(\cos 2t-2t\sin 2t)$ i) $te^t-\dfrac{t^2}{2}e^{2t}$ j) $\dfrac{t^2}{2}e^{-t}+\dfrac{t^3}{2}$
k) $\dfrac{1}{10}(e^{-2t}+3e^t\sin t-e^t\cos t)$ l) $(1-2t+\dfrac{t^2}{2})e^{-t}$
m) $\dfrac{e^{-2t}}{12}-\dfrac{e^{-t}}{12}[\cos(t\sqrt{3})-\sqrt{3}\sin(t\sqrt{3})]$ n) $t-\sin t$ o) $\dfrac{1}{2}(\sinh t-\sin t)$

2009. a) $\dfrac{e^t-1}{t}$ b) $\dfrac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}$ c) $e^{-t}\cdot\dfrac{\sin t}{t}$