

Låt A vara styvhetsmatrisen i en Finita element-formulering på intervallet $[0, 1]$ med homogena Dirichlet-randvillkor, med matriselementen

$$A_{ij} = \int_0^1 \varphi'_i(x)\varphi'_j(x)dx,$$

där $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N-1}$ är styckvis linjära hattfunktioner på den likformiga indelningen av intervallet $[0, 1]$ med steglängd $h = 1/N$.

Följande två satser visar att A är inverterbar.

Sats 1 *Styvhetsmatrisen A är positivt definit.*

Bevis Vi skall visa att $\eta \neq 0 \Rightarrow \eta^T A \eta > 0$ (där $\eta \in \mathbb{R}^{N-1}$). Välj därför ett $\eta \neq 0$. Då gäller att

$$\begin{aligned} \eta^T A \eta &= \sum_{i,j=1}^{N-1} \eta_i A_{ij} \eta_j = \sum_{i,j=1}^{N-1} \int_0^1 \eta_i \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) \eta_j dx \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{N-1} \eta_i \varphi'_i(x) \right) \left(\sum_{j=1}^{N-1} \eta_j \varphi'_j(x) \right) dx = \int_0^1 |v'(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

där $v(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \eta_j \varphi_j(x)$. Alltså är $\eta^T A \eta > 0$ om $v' \neq 0$ (där 0 är noll-funktionen, dvs $v'(x) \neq 0$ någonstans på intervallet).

Det räcker därför att visa att $\eta \neq 0 \Rightarrow v' \neq 0$. Antag motsatsen, nämligen att $\eta \neq 0$ och $v' = 0$. Då finns ett k med $v(x_k) = \eta_k \neq 0$ och vi kan (eftersom vi antar att $v' = 0$) skriva

$$0 = \int_0^{x_k} v'(x) dx = v(x_k) - v(0) = \eta_k - 0 = \eta_k$$

Detta är en motsägelse och satsen är därmed bevisad. ■

Sats 2 *Varje positivt definit matris är inverterbar.*

Bevis Låt $A \in \mathbb{R}^{M \times M}$ vara positivt definit. Vi vet (se Gustafsson/Holmåker, sats 1.14) att

$$A \text{ är inverterbar} \Leftrightarrow (Ax = 0 \Rightarrow x = 0).$$

Men då A är positivt definit gäller att

$$Ax = 0 \Rightarrow x^T Ax = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Alltså är A inverterbar. ■