MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Övningstentamen i Matematisk fördjupning för Kf, TMA226, 2014-xx-xx, TID(xx.00-xx.00)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: xxxxxxxxxxxx

Besökstider: ca xx.00 och xx.00

OBS:	Ange linje samt personnummer och namn på omslaget. Ange kod på *varje* inlämnat blad. Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

1. Låt $C^2([0,1])$ beteckna det reella vektorrummet av alla reellvärda två gånger kontinuerligt deriverbara funktioner på intervallet $[0,1]$ med den vanliga punktvisa additionen och multiplikationen med reella tal. Beteckna detta vektorrum V. Bestäm de reella tal a, b för vilka
$$U = \{f \in V : f(0) + af(1) = b\}$$
bildar ett underrum i V.

(7p)

2. Låt $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ beteckna två godtyckliga vektorer i $\mathbb{R}^n$ och sätt
$$\langle (x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \rangle = \Sigma_{k=1}^{n} 2^k x_k y_k.$$
Avgör om $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bildar en skalärprodukt för det reella vektorrummet $\mathbb{R}^n$.

(7p)

3. Bestäm en ON-bas för $\mathbb{R}^3$ med skalärprodukten
$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 2x_3y_3.$$
Bestäm en vektor på formen $(0, 1, a)$ för något reellt tal a som är ortogonal mot $(0, 1, 0)$. Du får utgå ifrån att uttrycket ovan definierar en skalärprodukt!

(7p)

V.G.V.

4. Härled variationsformulering och finita element-formulering, samt beräkna styvhets- och massmatris och högerledsvektor för den styckvis linjära finita element-approximationen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{4}u''(x) - 3u(x) = -1, & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0,1]$ med steglängd $h = 1/3$. Formulera det resulterande linjära ekvationssystemet (lösningen behöver ej beräknas).

(8p)

5. Avgör om följden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ där $a_1 = 2$ och

$$a_{n+1} = \frac{3}{2 + a_n}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

är konvergent, och om så är fallet beräkna dess gränsvärde.

(7p)

6. För vilka reella tal x är serien

$$\Sigma_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k k \ln k} x^k$$

absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent?

(8p)

7. Formulera och bevisa Weierstrass M-sats

(8p)

8. Formulera och bevisa integralkriteriet för positiva serier.

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK