TMA226 Matematisk fördjupning, Kf 2019
Tobias Gebäck
Matematiska vetenskaper, Chalmers & GU

Extrauppgifter, vecka 3

1. Ge exempel på minst en funktion som ligger i $L^2(0,1)$ och minst en som inte ligger i $L^2(0,1)$.

2. Samma som 1., fast för $H^1(0,1)$.

3. Samma uppgift för $H_0^1(0,1)$.

4. Visa att $H^1(0,1)$ är ett linjärt rum, och att $H_0^1(0,1)$ är ett delrum till $H^1(0,1)$.

5. En norm i ett funktionsrum ger ett sätt att beräkna storleken på funktionerna. Sätt $f(x) = x$ och $g(x) = 2x^4$. Beräkna $\|f\|_{L^1(0,1)}$ och $\|g\|_{L^1(0,1)}$, samt $\|f\|_{L^2(0,1)}$ och $\|g\|_{L^2(0,1)}$. Vilken funktion är störst, f eller g?
(Kom ihåg att $\|f\|_{L^1(0,1)} = \int_0^1 |f(x)|dx$ och $\|f\|_{L^2(0,1)} = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$)

6. Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -u''(x) = 1, & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 & \end{cases}$$

   (a) Beräkna den analytiska lösningen $u(x)$.

   (b) Beräkna ortogonala projektionen av u på underrummet som spänns av funktionerna $v_1(x) = \sin \pi x$ och $v_2(x) = \sin 2\pi x$.

Svar

1. T.ex. gäller att varje polynom ligger i $L^2(0,1)$, medan t.ex. $f(x) = x^{-\alpha}$, $\alpha \geq 1/2$ inte ligger i $L^2(0,1)$.

2. T.ex. gäller att varje polynom ligger i $H^1(0,1)$, medan t.ex. $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \leq 1/2$ inte ligger i $H^1(0,1)$.

3. Exempelvis ligger varje polynom $p(x)$ som uppfyller $p(0) = p(1) = 0$ i $H_0^1(0,1)$, t.ex. $p(x) = x(1-x)$. Varje funktion $f(x)$ som inte uppfyller $f(0) = f(1) = 0$ ligger ej i $H_0^1(0,1)$, t.ex. $f(x) = x$.

4. (se anteckningar från räkneövningen)

5. $\|f\|_{L^1(0,1)} = \frac{1}{2}$, $\|g\|_{L^1(0,1)} = \frac{2}{5}$, $\|f\|_{L^2(0,1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\|g\|_{L^2(0,1)} = \frac{2}{3}$
   Vilken som är störst beror på vilken norm man använder: $f > g$ i L^1-norm, medan $g > f$ i L^2-norm.

6. (a) $u(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$
   (b) Projektionen $Pu(x) = \frac{4}{\pi^3}\sin \pi x$.