

Teori-PM

TMA 226 Matematisk fördjupning 18/19

Vid tentamen ska man kunna definiera, förstå och använda alla begrepp och funktioner som ingår i de avsnitt i kurslitteraturen som anges i föreläsningsprogrammet på kursens sida. Alla satser som ingår ska kunna formuleras och användas vid problemlösning.

Teorifrågorna på tentamen kommer att hämtas från nedanstående lista. För samtliga satser i listan gäller att de både skall kunna formuleras och bevisas.

1. Visa att alla baser för ändligtdimensionellt vektorrum består av lika många vektorer.
(GH: Sats 1.4, 1.5, 1.6)

2. Dimensionssatsen, d.v.s. för matris $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ gäller att

$$\dim N(A) + \dim V(A) = n.$$

(GH: Sats 1.10)

3. Visa att ändligtdimensionellt vektorrum V har en ON-bas genom att beskriva Gram-Schmidts ortogonaliseringmetod.

(GH: Sats 2.3)

4. Visa existens och entydighet av ortogonal dekomposition med avseende på ändligtdimensionellt underrum U av vektorrum V , d.v.s. $\forall u \in V$ existerar entydigt $u' \in U$ och $u'' \in U^\perp$ s.a. $u = u' + u''$, samt att givet ON-bas $\{e_1, \dots, e_k\}$ för U ges u' av

$$u' = \langle u, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle u, e_k \rangle e_k.$$

(GH: Lemma 2.2, Sats 2.7)

5. Visa att styvhetsmatrisen A är inverterbar genom att först visa att den är positivt definit och sedan att varje positivt definit matris är inverterbar.

(se föreläsningssanteckningar)

6. Visa att för den linjära interpolanten $\pi_1 f$ av en två gånger deriverbar funktion f på intervallet $[a, b]$ finns en konstant C så att

$$\|\pi_1 f - f\|_{L^\infty(a,b)} \leq C(b-a)^2 \|f''\|_{L^\infty(a,b)}$$

(A: Sats 5.2a med $p = \infty$)

7. Givet variationsproblemet

$$(VF) \quad \text{Hitta } u \in H_0^1(0,1) \text{ så att} \\ \int_0^1 a(x)u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(0,1),$$

formulera motsvarande minimeringsproblem (MP) och visa att

$$(VF) \iff (MP).$$

(A: Sats 3.11)

8. Integralkriteriet
(ELW: Sats 18.6)
9. Rotkriteriet
(ELW: Sats 18.10)
10. Leibniz konvergenzkriterium
(ELW: Sats 18.13)
11. Weierstrass Majorantsats
(ELW: Sats 19.9)
12. Gränsövergång under integraltecken vid likformig konvergens
(ELW: Sats 19.10)