TMA226 Matematisk fördjupning, Kf 2019
Tobias Gebäck
Matematiska vetenskaper, Chalmers & GU

TMA226 datorlaboration

Syfte

Syftet med denna laboration är att du skall öva formuleringen av en Finita element-metod, dess implementering och lösning i Matlab, samt analys av resultaten.

Förhoppningen är att du genom att göra detta bättre skall förstå hur Finita element-metoden fungerar.

Upplägg

Laborationen består av två uppgifter, indelade i flera deluppgifter. Laborationen är godkänd när alla uppgifter har lösts och därefter redovisats och godkänts framför datorn vid något lektionstillfälle, samt en rapport med lösningar på alla uppgifter har lämnats in. En rapport per grupp skall lämnas in via PingPong och laborationen skall genomföras i grupper om 2-3 studenter. Varje deluppgift kan godkännas framför datorn för sig och för att alla skall hinna redovisa i tid är det viktigt att inte alla uppgifter sparas till slutet.

Vid redovisningen av en uppgift framför datorn skall alla relevanta grafer, uträkningar och datorprogram finnas tillgängliga.

Rapporten skall innehålla detaljerade svar på alla delfrågor samt relevanta grafer, men skall inte innehålla programkod. Delar av rapporten kan vara handskrivna, men skall skickas in i pdf-format. Glöm inte att skriva namn och personnummer på alla gruppmedlemmar i rapporten.

Uppgiften är ganska tidskrävande, så räkna inte med att kunna göra allt arbete under lektionstid. Notera också att uppgift 2 är ganska lik uppgift 1, så mer än hälften av arbetet är gjort då uppgift 1 är löst.

Rapporten skall vara inlämnad senast 31/5 och sista tillfället att bli godkänd framför datorn är 28/5 (men vänta inte till sista tillfället om ni är klara tidigare).

Uppgift 1

Vi betraktar den stationära diffusions-reaktions-ekvationen

$$\begin{cases} -Du''(x) + \alpha u(x) = f(x), & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

där D är diffusionskonstanten, $\alpha > 0$ är nedbrytningshastigheten och $f(x)$ är en produktionsterm.

I denna ekvation kan lösningen $u(x)$ till exempel beskriva den stationära koncentrationsfördelningen av ett ämne inuti en tunn film, där molekylerna diffunderar i filmen med diffusionskonstant D, bryts ned med hastighet α samt produceras i filmen med hastighet $f(x)$. På båda sidor av filmen hålls koncentrationen konstant lika med 0.[1]

Om vi för enkelhets skull sätter $D = 1$ och dessutom väljer $f(x) = \beta x$, så får vi ekvationen

$$\begin{cases} -u''(x) + \alpha u(x) = \beta x & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Det är nu er uppgift att lösa denna ekvation numeriskt med Finita element-metoden och analysera lösningens noggrannhet.

Uppgift 1 a) Tag fram den analytiska lösningen till ekvation (2) och plotta den i Matlab för några värden på α och β (börja med $\alpha = \beta = 1$). Vad är effekten av att ändra parametrarna α och β? Fundera och diskutera kring om detta är rimligt utifrån ekvationens utseende och det som den modellerar.

Uppgift 1 b) Härled variationsformuleringen för ekvation (2). Glöm inte ange testfunktionsrummet. Se exempel 7.1 i kursboken för ledning, men notera att randvillkoren är annorlunda.

Uppgift 1 c) Dela in intervallet $[0,1]$ i N delintervall av längden $h = 1/N$ och låt $V_h^{(0)}$ vara rummet av styckvis linjära funktioner $v(x)$ som är linjära på varje delintervall, och som uppfyller $v(0) = v(1) = 0$. Formulera Finita element-problemet för (2) på rummet $V_h^{(0)}$. Se återigen exempel 7.1 i kursboken för ledning.

Uppgift 1 d) Ansätt en styckvis linjär approximativ lösning $u_h(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \xi_j \varphi_j(x)$, där φ_j, $j = 1, \dots, N-1$ är "hattfunktioner" med $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij}$ och $x_j = jh$, $j = 1, \dots, N-1$. Härled matriserna och högerledsvektorn som svarar mot Finita element-problemet och formulera det linjära ekvationssystemet för koefficienterna $\xi_j,\ j = 1, \dots, N-1$. Beräkna alla element i matriserna och högerledsvektorn analytiskt.

Tips: För att t.ex. beräkna $\int_{x_j}^{x_{j+1}} \beta x \frac{(x_{j+1}-x)}{h} dx$, använd partiell integration och notera att $-\frac{1}{2h}(x_{j+1}-x)^2$ är en primitiv funktion till $\frac{1}{h}(x_{j+1}-x)$. Se även beräkningen av $m_{j,j+1}$ på sid 172 i kursboken.

Uppgift 1 e) Skriv ett Matlab-program som skapar matriserna ovan, löser matrisproblemet och beräknar koefficienterna $\xi_j,\ j = 1, \dots, N-1$. Plotta lösningen $u_h(x)$ i samma figur som den analytiska lösningen för några olika val av N och diskutera vad som händer. Glöm inte att ta med randvillkoren för u_h, så att $u_h(x)$ ritas på hela intervallet $[0,1]$.

För att beskriva noggrannheten och konvergenshastigheten hos en numerisk metod brukar man undersöka hur felet i approximationen minskar med steglängden h. Detta leder oftast till ett beroende av typen

$$E(h) \equiv \|u_h - u\| = Bh^p \tag{3}$$

[1]En annan modell är att $u(x)$ beskriver temperaturfördelningen i en vägg som värms/kyls inifrån och där temperaturen hålls konstant lika med 0 på båda sidor.

för några tal B och p, där $\|\cdot\|$ är någon norm, oftast L^2-norm eller L^∞-norm. För att hitta värdet på p brukar man ta logaritmen av båda sidor av (3) och får då

$$\log\left(\|u_h - u\|\right) = \log B + p\log h \tag{4}$$

Genom att anpassa en rät linje till punkterna $(\log h, \log(\|u_h - u\|))$ för några olika h kan man sedan lätt få värdet på p (och B). Om $p \approx 1$ har man en metod av första ordningen, medan om $p \approx 2$ är metoden av andra ordningen, vilket man oftast strävar efter.

Uppgift 1 f) Beräkna FEM-lösningen med några olika värden på h. Plotta felet $e_h(x) = u_h(x) - u(x)$ och se hur det varierar med h.

Beräkna för varje h normen av felet $E(h) = \|e_h\|_{L^2(0,1)}$, där integralen i normen kan beräknas approximativt mha trapetsmetoden enligt ekvation (5.3.15) på sid 124 i kursboken, dvs

$$\|e_h\|_{L^2(0,1)} = \left(\int_0^1 |e_h|^2 dx\right)^{1/2} \approx \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{h}{2}\left(e_h(y_k)^2 + e_h(y_{k-1})^2\right)\right)^{1/2}, \tag{5}$$

Gör en log-log-plot med $E(h) = \|u_h - u\|$ som funktion av h (se kommandot `loglog`) och anpassa en rät linje för att beräkna värdet på p enligt (4) Använd Matlab-kommandot

```
>> polyfit(log(hv), log(E), 1)
```

för att få koefficienterna för den räta linjen (om `hv` är en vektor med h-värden och `E` motsvarande felnormer). Diskutera resultatet! Jämför speciellt med a priori-feluppskattningen i kapitel 7.3 i kursboken. Säger de samma sak? Motsäger de varandra?

Uppgift 2

I denna uppgift betraktar vi den stationära konvektions-diffusions-reaktions-ekvationen

$$\begin{cases} -Du''(x) + \gamma u'(x) = f(x), & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

I denna ekvation kan $u(x)$ t.ex. återigen beskriva koncentrationsfördelningen av ett ämne som diffunderar med diffusionskonstant D i en tunn film. I detta fall transporteras dock ämnet också med ett flöde med hastighet γ (positiv för transport i positiv x-riktning, och negativ för det omvända), så kallad konvektion (eller advektion). Högerledet $f(x)$ är som tidigare produktionshastigheten.

Om vi sätter $D = 1$ och $f(x) = (x-1)^2 - (x-1)^4$, får vi

$$\begin{cases} -u''(x) + \gamma u'(x) = (x-1)^2 - (x-1)^4, & x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

I detta fallet är den analytiska lösningen besvärlig att ta fram. Vi hoppar därför över det steget.

Uppgift 2 a) Härled variationsformulering, finita element-problem och linjärt ekvationssystem för ekvation (7) som i uppgift 1 b)-d) ovan. Högerledsvektorn $\mathbf{b}$ behöver ej beräknas analytiskt. Se exempel 7.2 på sid 173 och framåt i kursboken för viss ledning.

Uppgift 2 b) Utgå från Matlab-programmet i uppgift 1 och skriv ett program som beräknar en finita element-lösning till (7). Den här gången är det komplicerat att beräkna högerledsvektorn analytiskt, så därför får vi göra det numeriskt med hjälp av trapetsformeln. Beräkna därför varje integral

$$\begin{aligned} b_j &= \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x)\varphi_j(x)dx \\ &\approx \frac{h}{2}\big(f(x_{j-1})\varphi_j(x_{j-1}) + 2f(x_j)\varphi_j(x_j) + f(x_{j+1})\varphi_j(x_{j+1})\big) = hf(x_j) \end{aligned} \tag{8}$$

Uppgift 2 c) Plotta lösningen för några olika (positiva och negativa) värden på γ (t.ex $0, \pm 1, \pm 10$) och några olika h. Stämmer utseendet på lösningen med modellbeskrivningen ovan? För stora $|\gamma|$ kan man få oscillationer i lösningen som försvinner då man minskar h. Anledningen till detta är intressant i sig, men är inget vi undersöker mer i denna labb.

Uppgift 2 d) Eftersom vi inte har den analytiska lösningen kan vi inte göra samma konvergensanalys som i uppgift 1. Men istället för den analytiska lösningen kan vi beräkna den numeriska lösningen med ett väldigt litet h (t.ex. 1/500) och sedan beräkna felet som skillnaden mot denna noggranna numeriska lösning $\tilde{u} \approx u$. Gör detta för något val av γ och presentera samma typ av resultat som i uppgift 1 f).

Tips: För att beräkna värdet på $\tilde{u}$ i punkterna x_k kan man använda kommandot

```
>> utilde1 = interp1(xtilde, utilde, x, 'linear');
```

om `utilde` ger den noggranna lösningens värden i punkterna `xtilde` och lösningen med större h har värden i punkterna `x`. Kommandot utför linjär interpolation enligt vad vi lärt oss i kursen.