TMA226 Matematisk fördjupning, Kf lp4 2013/2014
Peter Kumlin
Mathematics
Chalmers & GU

Lösningsförslag till tentamen för TMA226 den 29/8 2014

Uppgift 1: Låt V beteckna vektorrummet av alla reellvärda kontinuerliga funktioner på intervallet $[-1, 1]$ med den vanliga punktvisa additionen och multiplikationen med reella tal. Bestäm alla postiva heltal n och reella tal m för vilka

$$U = \{f \in V : (f(0))^n = m\}$$

bildar ett underrum i V.

Lösning: Vi noterar att nollelementet $\mathbb{0}$ i V ges av $\mathbb{0}(x) = 0, x \in [-1, 1]$, och måste tillhöra U. Detta medför att $m = 0$. Då vidare för varje reellt tal a gäller att

$$a^n = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

följer att

$$U = \{f \in V : f(0) = 0\}.$$

Detta implicerar att varje linjärkombination av element i U tillhör U.

Svar: $m = 0$ och n godtyckligt positivt heltal

Uppgift 2: Visa att $\langle(x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_1y_2$ är en skalärprodukt på $\mathbb{R}^2$. Bestäm en ON-bas för $\mathbb{R}^2$ med denna skalärprodukt.

Lösning: Vi noterar att $\langle\cdot, \cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ och $\mathbb{0} = (0, 0)$. Ska visa att de tre axiomen för skalärprodukt är uppfyllda.
Axiom 1: För $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gäller

$$\langle(x, y), (x, y)\rangle = x^2 - 4xy + 5y^2 \geq x^2 - (x^2 + 4y^2) + 5y^2 = y^2 \geq 0.$$

Vidare har vi att $\langle(x, y), (x, y)\rangle = 0$ medför $y = 0$ vilket i sin tur medför att $x = 0$. Alltså

$$\langle(x, y), (x, y)\rangle = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0).$$

Axiom 2: För $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$ och $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gäller

$$\langle\alpha(x_1, x_2) + \beta(y_1, y_2), (z_1, z_2)\rangle = \langle(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2), (z_1, z_2)\rangle =$$

$$= \ldots = \alpha\langle(x_1, x_2), (z_1, z_2)\rangle + \beta\langle(y_1, y_2), (z_1, z_2)\rangle.$$

Axiom 3: För $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ gäller

$$\langle(x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = \ldots = \langle(y_1, y_2), (x_1, x_2)\rangle.$$

(Detaljerna svarande mot ... måste ges)

Alltså definierar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en skalärprodukt på $\mathbb{R}^2$.

Utgå t ex från att $(1,0),(0,1)$ är linjärt oberoende och spänner $\mathbb{R}^2$. Applicera Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod. Sätt $\mathbb{u}_1 = (1,0)$. Det gäller att

$$\|\mathbb{u}_1\| = \sqrt{\langle \mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2 \rangle} = 1.$$

Sätt

$$\mathbb{e}_1 = \frac{1}{\|\mathbb{u}_1\|}\mathbb{u}_1 = (1,0).$$

Sätt $\mathbb{u}_2 = (0,1) - \langle (0,1), \mathbb{e}_1 \rangle \mathbb{e}_1 = (2,1)$ och

$$\mathbb{e}_2 = \frac{1}{\|\mathbb{u}_2\|}\mathbb{u}_2 = (2,1).$$

Svar: $\mathbb{e}_1 = (1,0)$, $\mathbb{e}_2 = (2,1)$ t.ex.

Uppgift 3: Härled variationsformulering och finita element-formulering, samt beräkna styvhets- och konvektionsmatris och högerledsvektor för den styckvis linjära finita element-approximationen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -u''(x) + 3u'(x) = 2, & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0,1]$ med steglängd $h = 1/4$. Formulera det resulterande linjära ekvationssystemet (lösningen behöver ej beräknas). Beräkningen av integralerna i matriserna behöver ej redovisas i detalj om resultatet är känt.

Lösning: Variationsformulering: Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1(0,1)$ och integrera över intervallet $[0,1]$. Partialintegration i första termen ger

$$-[u'(x)v(x)]_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + 3\int_0^1 u'(x)v(x)dx = 2\int_0^1 v(x)dx.$$

Med insättning av randdata $v(0) = v(1) = 0$ fås variationsformuleringen: Hitta $u \in H_0^1(0,1)$ så att

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + 3\int_0^1 u'(x)v(x)dx = 2\int_0^1 v(x)dx, \qquad \forall v \in H_0^1(0,1)$$

Motsvarande finita element-problem är:

Hitta $U \in V_h^0 = \{\varphi : \varphi$ är kontinuerlig och styckvis linjär på $\mathcal{T}_h, \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$ så att

$$\int_0^1 U'(x)\varphi'(x)dx + 3\int_0^1 U'(x)\varphi(x)dx = 2\int_0^1 \varphi(x)dx, \qquad \forall \varphi \in V_h^0. \tag{1}$$

Vi ansätter $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x) + \xi_2\varphi_3(x)$ där

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{j-1}), & x \in [x_{j-1}, x_j) \\ \frac{1}{h}(x_j - x), & x \in [x_j, x_{j+1}) \ , \\ 0, & \text{annars} \end{cases} \qquad j = 1, 2, 3$$

är hattfunktionerna svarande mot nodpunkterna $x_j = j/4$, $j = 1, 2, 3$.

Vi sätter in $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x) + \xi_3\varphi_3(x)$ i (1) och väljer testfunktioner $\varphi = \varphi_i$, $i = 1, 2, 3$. Vi får då ekvationssystemet

$$(A + 3C)\,\xi = b,$$

där A är styvhetsmatrisen med element $A_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'\varphi_j' dx$, $i, j = 1, 2, 3$, och C är konvektionsmatrisen med element $C_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'\varphi_j dx$, $i, j = 1, 2, 3$. b är högerledsvektorn med element $b_j = 2\int_0^1 \varphi_j dx$, $j = 1, 2, 3$ och $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ är lösningsvektorn.

Beräkning av matriselementen ger

$$\left(\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = 2h\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

eller, med $h = 1/4$,

$$\begin{bmatrix} 8 & -5/2 & 0 \\ -11/2 & 8 & -5/2 \\ 0 & -11/2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

(Lösningen är $\xi \approx (0.1310, 0.2192, 0.2132)^T$.)

Svar: –

Uppgift 4: Är serien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}(1 - \cos\frac{\pi}{k})$$

konvergent eller divergent?

Lösning: Vi noterar att

$$1 - \cos\frac{\pi}{k} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{k})^2 + O((\frac{1}{k})^4)$$

samt att $\Sigma_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ konvergerar om och endast om $p > 1$. Jämförelsekriteriet på gränsvärdesform ger att serien konvergerar.

Svar: konvergent

Uppgift 5: För vilka reella tal x är serien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{k!}x^k$$

absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent?

Lösning: Sätt $a_k = \frac{k^k}{k!}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Steg 1: Beräkna konvergensradien R för potensserien

Stirlings formel ger $k! = (\frac{k}{e})^k \sqrt{2\pi k}(1 + \epsilon_k)$ där $\epsilon_k \to 0$ då $k \to \infty$. Vi har

$$\sqrt[k]{|a_k|} = e(\sqrt{2\pi k}(1 + \epsilon_k))^{\frac{1}{k}} \to e,\ k \to \infty.$$

Alltså gäller

$$R = \frac{1}{e}.$$

Av detta följer att potensserien är absolutkonvergent för $|x| < \frac{1}{e}$ och divergent för $|x| > \frac{1}{e}$.

Steg 2: Studera konvergensen för $x = \pm\frac{1}{e}$

$x = \frac{1}{e}$: $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k (\frac{1}{e})^k = \Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi k}(1+\epsilon_k)}$ som är en positiv divergent serie eftersom $\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ är konvergent om och endast om $p > 1$.

$x = -\frac{1}{e}$: $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k (-\frac{1}{e})^k$ är en alternerande serie som inte är absolutkonvergent enligt ovan. Då $(\frac{k^k}{e^k k!})_{k=1}^{\infty}$ är en avtagande följd (åtminstone för stora k) då

$$\frac{a_{k+1}(\frac{1}{e})^{k+1}}{a_k(\frac{1}{e})^k} = e^{-1+k\ln(1+\frac{1}{k})} = e^{-1+k(\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\frac{1}{k^2}+O(\frac{1}{k^3}))} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{k^2}+O(\frac{1}{k^3})}$$

med gränsvärdet 0 (trivialt enligt Stirling) ger Leibniz konvergenskriterium att serien konvergerar.

Av detta följer att potensserien är divergent för $x = \frac{1}{e}$ och betingat konvergent för $x = -\frac{1}{e}$.

Svar: absolutkonvergent för $|x| < \frac{1}{e}$, betingat konvergent för $x = -\frac{1}{e}$ och divergent för övrigt

Uppgift 6: Visa att funktionsserien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} x e^{-k^2 x}$$

är likformigt konvergent på $[0, \infty)$.

Lösning: Sätt $f_k(x) = xe^{-k^2 x}$. Vi noterar att

$$0 \le f_k(x) \le \frac{1}{k^2},\quad x \in [0, \infty)$$

eftersom $\frac{d}{dx} f_k(x) = e^{-k^2 x}(1 - k^2 x)$. Sätt t.ex. $a_k = \frac{1}{k^2}$. Det gäller att

1. $|f_k(x)| \le a_k$ för $x \in [0, \infty)$ och $k = 1, 2, 3, \ldots$
2. $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k = \Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ som konvergerar.

Weierstrass M-sats ger att funftionsserien är likformigt konvergent på $[0, \infty)$.

Svar: –

Uppgift 7: Se sats 4.2 a) i Asadzadeh, eller föreläsningsanteckningarna.

Uppgift 8: Se kurslitteraturen