TMA226 Matematisk fördjupning, Kf lp4 2014/2015
Peter Kumlin
Mathematics
Chalmers & GU

Lösningsförslag till tentamen för TMA226 den 30/5 2015

Uppgift 1: Låt V beteckna vektorrummet av alla polynom (med reella koefficienter) av grad högst 4 på intervallet $[0,1]$ med den vanliga punktvisa additionen och multiplikationen med reella tal. Låt q beteckna polynomet x^2. Visa att

$$M = \{p \in V : pq \in V\}$$

är ett underrum till V samt bestäm dimensionen för detta underrum.

Lösning: Vi noterar att grad $(pq) = \text{grad}\, p + \text{grad}\, q$ för varje par av polynom p och q. Av detta följer att

$$M = \{p \in V : \text{grad}\, p \leq 2\}$$

och alla polynom av grad högst 2 bildar ett vektorrum med den vanliga additionen och multiplikationen med reella tal. Alltså är M ett underrum till V. Vidare är $\dim M = 3$. (Detta är ett känt faktum och behöver ej bevisas. Om man önskar göra det kan man t.ex. visa att polynomen $1, x, x^2$ bildar en bas för M)

Svar: $\dim M = 3$

Uppgift 2: Låt V vara samma reella vektorrum som i uppgift 1. Sätt

$$\langle p, \tilde{p} \rangle = \Sigma_{k=0}^{4}\, p(\frac{k}{4})\tilde{p}(\frac{k}{4}), \quad p, \tilde{p} \in V.$$

Visa att $\langle p, p \rangle = 0$ medför att p är nollelementet i V. Bestäm en ON-bas för underrummet M i uppgift 1 med anseende på denna skalärprodukt[1] $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Lösning: För $p \in V$ gäller att

$$\langle p, p \rangle = \Sigma_{k=0}^{4}\, p(\frac{k}{4})^2 = 0$$

medför att polynomet p har (åtminstone) fem distinkta nollställen. Men ett polynom $p \neq \mathbb{0}$ i V kan ha högst 4 distinkta nollställen. Alltså gäller $p = \mathbb{0}$. För att bestämma en ON-bas för M utgår vi t.ex. från basen $1, x, x^2$ för M och applicerar Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod på denna.

Sätt $\tilde{p}_1(x) = 1$. Vi har $\langle \tilde{p}_1(x), \tilde{p}_1(x) \rangle = 5$. Sätt $p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

[1] Det behöver inte visas att $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definierar en skalärprodukt på V.

Sätt $\tilde{p}_2(x) = x - \langle x, p_1(x)\rangle p_1(x)$. Liten kalkyl ger $\tilde{p}_2(x) = x - \frac{1}{2}$ och $\langle \tilde{p}_2(x), \tilde{p}_2(x)\rangle = \frac{5}{8}$. Sätt $p_2(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}(x - \frac{1}{2})$.

Sätt $\tilde{p}_3(x) = x^2 - \langle x^2, p_1(x)\rangle p_1(x) - \langle x^2, p_2(x)\rangle p_2(x)$. Efter lite räknande fås $\langle x^2, p_1(x)\rangle = \frac{3\sqrt{5}}{8}$ och $\langle x^2, p_2(x)\rangle = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$. Detta ger $\tilde{p}_3(x) = x^2 - x + \frac{1}{8}$. Ytterligare lite räknande ger $\langle \tilde{p}_3(x), \tilde{p}_3(x)\rangle = \frac{7}{128}$. Sätt $p_3(x) = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{7}}(x^2 - x + \frac{1}{8})$. Vi har nu en ON-bas p_1, p_2, p_3 för M.

Svar: $p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $p_2(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}(x - \frac{1}{2}), p_3(x) = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{7}}(x^2 - x + \frac{1}{8})$ t.ex.

Uppgift 3: Härled variationsformulering och finita element-formulering, samt beräkna styvhets- och konvektionsmatris och högerledsvektor för den styckvis linjära finita element-approximationen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -4u''(x) + u'(x) = 1, & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0,1]$ med steglängd $h = 1/3$. Formulera det resulterande linjära ekvationssystemet (lösningen behöver ej beräknas). Beräkningen av integralerna i matriserna behöver ej redovisas i detalj om resultatet är känt.

Lösning: Variationsformulering: Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1(0,1)$ och integrera över intervallet $[0,1]$. Partialintegration i första termen ger

$$-4\left[u'(x)v(x)\right]_0^1 + 4\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u'(x)v(x)dx = \int_0^1 v(x)dx.$$

Med insättning av randdata $v(0) = v(1) = 0$ fås variationsformuleringen: Hitta $u \in H_0^1(0,1)$ så att

$$4\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u'(x)v(x)dx = \int_0^1 v(x)dx, \qquad \forall v \in H_0^1(0,1)$$

Motsvarande finita element-problem är:

Hitta $U \in V_h^0 = \{\varphi : \varphi$ är kontinuerlig och styckvis linjär på $\mathcal{T}_h, \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$ så att

$$4\int_0^1 U'(x)\varphi'(x)dx + \int_0^1 U'(x)\varphi(x)dx = 1\int_0^1 \varphi(x)dx, \qquad \forall \varphi \in V_h^0. \tag{1}$$

Vi ansätter $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ där

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{j-1}), & x \in [x_{j-1}, x_j) \\ \frac{1}{h}(x_j - x), & x \in [x_j, x_{j+1}) \\ 0, & \text{annars} \end{cases}, \qquad j = 1, 2$$

är hattfunktionerna svarande mot nodpunkterna $x_j = j/3$, $j = 1, 2$.

Vi sätter in $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ i (1) och väljer testfunktioner $\varphi = \varphi_i$, $i = 1, 2$. Vi får då ekvationssystemet

$$(4A + C)\,\xi = b,$$

där A är styvhetsmatrisen med element $A_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'\varphi_j' dx$, $i, j = 1, 2$, och C är konvektionsmatrisen med element $C_{ij} = \int_0^1 \varphi_i\varphi_j' dx$, $i, j = 1, 2$. b är högerledsvektorn med element $b_i = \int_0^1 \varphi_i dx$, $i = 1, 2$ och $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ är lösningsvektorn.

Beräkning av matriselementen ger

$$\left(\frac{4}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = h\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

eller, med $h = 1/3$,

$$\begin{bmatrix} 24 & -23/2 \\ -25/2 & 24 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

(Lösningen är $\xi \approx (0.0274, 0.0281)^T$.)

Svar: –

Uppgift 4: Är serien $\Sigma_{k=0}^{\infty} a_k$, där

$$a_k = \int_{k+1}^{k+2} \frac{\ln x}{x}\, dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

konvergent eller divergent?

Lösning: Serien $\Sigma_{k=0}^{\infty} a_k$ är en positiv serie med partialsummorna

$$s_n = \Sigma_{k=0}^{n-1} a_k = \int_1^{n+1} \frac{\ln x}{x}\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

För $R \geq 3$ gäller

$$\int_1^R \frac{\ln x}{x}\, dx > \int_e^R \frac{\ln x}{x}\, dx > \int_e^R \frac{1}{x}\, dx \to \infty,\ R \to \infty.$$

Detta ger oss att $s_n \to \infty$ då $n \to \infty$ och serien divergerar.

Svar: divergent

Uppgift 5: Sätt

$$a_k = (-1)^k \frac{\ln k}{k^2}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

För vilka reella tal x är serien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent?

Lösning:
Steg 1: Beräkna konvergensradien R för potensserien
Vi noterar att

$$\sqrt[k]{|a_k|} = e^{\frac{1}{k}\ln(\frac{\ln k}{k^2})} = e^{\frac{\ln\ln k}{k} - 2\frac{\ln k}{k}} \to e^0 = 1,\ k \to \infty.$$

Alltså gäller

$$R = \frac{1}{1} = 1.$$

Av detta följer att potensserien är absolutkonvergent för $|x| < 1$ och divergent för $|x| > 1$.
Steg 2: Studera konvergensen för $x = \pm 1$
Här observeras att $\Sigma_{k=1}^{\infty}|a_k(\pm 1)^k| = \Sigma_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k}{k^2}$, där serien i HL är en postiv serie som konvergerar. Detta inses lätt då t.ex.

$$0 \le \frac{\ln k}{k^2} = \frac{\ln k}{k^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}},\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

och

$$\Sigma_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p} \text{ konvergent } \iff p > 1$$

samt

$$0 \le \frac{\ln k}{k^{\frac{1}{2}}} \to 0,\ k \to \infty.$$

Vi har här använt jämförelsekriteriet för positiva serier. Slutsatsen är nu att potensserien är absolutkonvergent för $x = \pm 1$. Svaret följer.

Svar: absolutkonvergent för $|x| \le 1$ och divergent för $|x| > 1$ (finns inga x där potensserien är betingat konvergent)

Uppgift 6: Beräkna

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x^n - 1)\cos(nx)\,dx.$$

Motivera väl!!!

Lösning: Vi noterar att

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(nx)\,dx = [\frac{1}{n}\sin(nx)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n}\sin(\frac{n\pi}{4}) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Dessutom observerar vi att

$$x^n\cos(nx) \to 0 \text{ likformigt } [0, \frac{\pi}{4}],$$

vilket vi ska visa nedan. Eftersom konvergensen är likformig på integrationsintervallet kan vi göra en gränsövergång under integraltecknet. Detta ger oss

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\cos(nx)\,dx = 0$$

och följdakligen får vi

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x^n-1)\cos(nx)\,dx = \lim_{n\to\infty}(\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n\cos(nx)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(nx)\,dx) = 0.$$

Det återstår att visa den likformiga konvergensen på $[0,\frac{\pi}{4}]$. Fixera godtyckligt $\epsilon > 0$. Det gäller att

$$|x^n\cos(nx) - 0| \le (\frac{\pi}{4})^n \text{ för } x \in [0,\frac{\pi}{4}].$$

Eftersom $\pi < 4$ gäller att $(\frac{\pi}{4})^n \to 0$ då $n \to \infty$ och det finns därmed N (oberoende av x) sådant att

$$n \ge N \quad \Rightarrow |x^n\cos(nx) - 0| < \epsilon \text{ för alla } x \in [0,\frac{\pi}{4}].$$

Dena likformiga konvergensen på $[0,\frac{\pi}{4}]$ är därmed visad.

Svar: 0

Uppgift 7: Låt $u \in H_0^1(0,1)$ vara lösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

och $U \in V_h^0$ motsvarande styckvis linjära finita element-approximation på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0,1]$ med steglängd h, där

$$V_h^0 = \{\varphi : \varphi \text{ är kontinuerlig och styckvis linjär på } \mathcal{T}_h, \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}.$$

Visa att

$$\|u - U\|_E \le \|u - \varphi\|_E, \qquad \forall \varphi \in V_h^0,$$

där $\|f\|_E = \left(\int_0^1 |f'(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ är energinormen.

Svar: Se sats 4.3 i Asadzadeh, eller föreläsningsanteckningarna.

Uppgift 8: Formulera och bevisa Leibniz konvergenskriterium för alternerande serier.

Svar: Se sats 18.13 i ELW.