TMA226 Matematisk fördjupning, Kf lp4 2014/2015
Peter Kumlin
Mathematics
Chalmers & GU

Lösningsförslag till tentamen för TMA226 den 9/4 2016

Uppgift 1: Låt V beteckna vektorrummet av alla polynom (med reella koefficienter) av grad högst 4 på intervallet $[0,1]$ med den vanliga punktvisa additionen och multiplikationen med reella tal. Låt p_2 beteckna polynomet x^2. Visa att

$$U = \{p \in V : pp_2 \in V\}$$

är underrum till V samt bestäm dess dimension.

Lösning: Vi noterar att $\text{grad}\,(pq) = \text{grad}\, p + \text{grad}\, q$ för varje par av polynom p och q. Av detta följer att

$$U = \{p \in V : \text{grad}\, p \leq 2\}$$

och alla polynom av grad högst 2 bildar ett vektorrum med den vanliga additionen och multiplikationen med reella tal. Alltså är U ett underrum till V. Vidare är $\dim U = 3$. (Detta är ett känt faktum och behöver ej bevisas. Om man önskar göra det kan man t.ex. visa att polynomen $1, x, x^2$ bildar en bas för U)

Svar: $\dim U = 3$

Uppgift 2: Låt V vara samma reella vektorrum som i uppgift 1 med skalärprodukten

$$\langle p, \tilde{p} \rangle = \Sigma_{k=0}^{4}\, p(\frac{k}{4})\tilde{p}(\frac{k}{4}), \quad p, \tilde{p} \in V.$$

Att $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definierar en skalärprodukt behöver inte visas. Låt W beteckna det underrum i V som spänns av p_0 och p_1, där $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$. Bestäm en ON-bas för W samt bestäm ortogonalprojektionen av $p_2(x) = x^2$ på W.

Lösning: (Att $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definierar en skalärprodukt följer av att för $p \in V$ gäller att

$$\langle p, p \rangle = \Sigma_{k=0}^{4}\, p(\frac{k}{4})^2 = 0$$

medför att polynomet p har (åtminstone) fem distinkta nollställen. Men ett polynom $p \neq \mathbb{0}$ i V kan ha högst 4 distinkta nollställen. Alltså gäller $p = \mathbb{0}$). För att bestämma en ON-bas för W utgår vi t.ex. från basen $1, x$, dvs p_0, p_1, för W och applicerar Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod på denna.

Sätt $\tilde{p}_1(x) = 1$. Vi har $\langle \tilde{p}_1(x), \tilde{p}_1(x) \rangle = 5$. Sätt $e_1(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Sätt $\tilde{p}_2(x) = x - \langle x, e_1(x) \rangle e_1(x)$. Liten kalkyl ger $\tilde{p}_2(x) = x - \frac{1}{2}$ och $\langle \tilde{p}_2(x), \tilde{p}_2(x) \rangle = \frac{5}{8}$. Sätt $e_2(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}(x - \frac{1}{2})$.

Ortogonalprojektionen u på W av p_2 ges av

$$u = \langle p_2, e_1\rangle e_1 + \langle p_2, e_2\rangle e_2.$$

En liten kalkyl ger

$$\langle p_2, e_1\rangle = \frac{3}{8}\sqrt{5},\ \langle p_2, e_2\rangle = \frac{\sqrt{2}\sqrt{5}}{4}.$$

Svar: t.ex. $e_1(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ och $e_2(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}(x - \frac{1}{2})$.
$u = x - \frac{1}{8}$

Uppgift 3: Härled variationsformulering och finita element-formulering, samt beräkna styvhets- och konvektionsmatris och högerledsvektor för den styckvis linjära finita element-approximationen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -u''(x) + 3u'(x) = 1, & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0,1]$ med steglängd $h = 1/4$. Formulera det resulterande linjära ekvationssystemet (lösningen behöver ej beräknas). Beräkningen av integralerna i matriserna behöver ej redovisas i detalj om resultatet är känt.

Lösning: Variationsformulering: Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1(0,1)$ och integrera över intervallet $[0,1]$. Partialintegration i första termen ger

$$-\left[u'(x)v(x)\right]_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + 3\int_0^1 u'(x)v(x)dx = \int_0^1 v(x)dx.$$

Med insättning av randdata $v(0) = v(1) = 0$ fås variationsformuleringen:
Hitta $u \in H_0^1(0,1)$ så att

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + 3\int_0^1 u'(x)v(x)dx = \int_0^1 v(x)dx, \qquad \forall v \in H_0^1(0,1)$$

Motsvarande finita element-problem är:

Hitta $U \in V_h^0 = \{\varphi : \varphi$ är kontinuerlig och styckvis linjär på $\mathcal{T}_h, \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$ så att

$$\int_0^1 U'(x)\varphi'(x)dx + 3\int_0^1 U'(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)dx, \qquad \forall \varphi \in V_h^0. \tag{1}$$

Vi ansätter $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x) + \xi_2\varphi_3(x)$ där

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{j-1}), & x \in [x_{j-1}, x_j) \\ \frac{1}{h}(x_j - x), & x \in [x_j, x_{j+1})\,, \qquad j = 1,2,3 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

är hattfunktionerna svarande mot nodpunkterna $x_j = j/4$, $j = 1, 2, 3$.

Vi sätter in $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x) + \xi_3\varphi_3(x)$ i (**??**) och väljer testfunktioner $\varphi = \varphi_i$, $i = 1, 2, 3$. Vi får då ekvationssystemet

$$(A + 3C)\,\xi = b,$$

där A är styvhetsmatrisen med element $A_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'\varphi_j' dx$, $i, j = 1, 2, 3$, och C är konvektionsmatrisen med element $C_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'\varphi_j dx$, $i, j = 1, 2, 3$. b är högerledsvektorn med element $b_j = \int_0^1 \varphi_j dx$, $j = 1, 2, 3$ och $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ är lösningsvektorn.

Beräkning av matriselementen ger

$$\left(\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = h\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

eller, med $h = 1/4$,

$$\begin{bmatrix} 8 & -5/2 & 0 \\ -11/2 & 8 & -5/2 \\ 0 & -11/2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

(Lösningen är $\xi \approx (0.0655, 0.1096, 0.1066)^T$.)

Svar: –

Uppgift 4: Är serien $\Sigma_{k=2}^{\infty} a_k$, där

$$a_k = \ln(\frac{k+1}{k-1}), \quad k = 2, 3, 4, \dots,$$

konvergent eller divergent?

Lösning: Serien $\Sigma_{k=0}^{\infty} a_k$ är en positiv serie där $a_k = \ln(\frac{1+\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{k}}) \to 0$ då $k \to \infty$. Speciellt noterar vi att

$$a_k = \ln(1 + \frac{1}{k}) - \ln(1 - \frac{1}{k}) = \frac{2}{k} + \mathcal{O}(\frac{1}{k^2})$$

där vi har utnyttjat Taylorutvecklingarna

$$\ln(1 + \frac{1}{k}) = \frac{1}{k} + \mathcal{O}(\frac{1}{k^2})$$

$$\ln(1 - \frac{1}{k}) = -\frac{1}{k} + \mathcal{O}(\frac{1}{k^2}.)$$

Det gäller vidare att serien $\Sigma_k \frac{1}{k}$ divergerar och då

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{\frac{1}{k}} \in (0, \infty)$$

fås att serien $\Sigma_{k=0}^{\infty} a_k$ divergerar.

Svar: divergent

Uppgift 5: Sätt

$$a_k = \frac{1}{\ln(k+1)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

För vilka reella tal x är serien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent?

Lösning:
Steg 1: Beräkna konvergensradien R för potensserien
Vi noterar att

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\ln(k+1)} \to 1, \ k \to \infty$$

enligt instängningsregeln då $1 < \ln(k+1) < k$ för stora k och $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$.
Alltså gäller

$$R = \frac{1}{1} = 1.$$

Av detta följer att potensserien är absolutkonvergent för $|x| < 1$ och divergent för $|x| > 1$.
Steg 2: Studera konvergensen för $x = \pm 1$
$x = 1$: Här observeras att $\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k+1)}$ divergerar enligt jämförelsekriteriet då $\Sigma_k \frac{1}{k}$ divergerar och $k > \ln(k+1)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.
$x = -1$: Serien $\Sigma_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln(k+1)}$ är inte absolutkonvergent (se $x = 1$–fallet) men väl konvergent enligt Leibniz konvergenskriterium då $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ är en avtagande följd som konvergerar mot 0. Potensserien är alltså betingat konvergent för $x = -1$.

Svar: absolutkonvergent för $|x| < 1$ betingat konvergent för $x = -1$ och divergent för övrigt.

Uppgift 6: Visa att

$$\lim_{x\to 1} \Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{kx^2}{k^3 + x^2} = \Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3 + 1}.$$

Motivera väl!!!

Lösning: Sätt $a_k(x) = \frac{kx^2}{k^3+x^2}$ för $x \in [0, 2]$ och $k = 1, 2, 3, \ldots$ (Intervallet $[0, 2]$ kan ersättas med godtyckligt interval som har 1 som en inre punkt). Eftersom $|a_k(x)| \le \frac{4}{k^2}$ för $x \in [0, 2]$ och $k = 1, 2, 3, \ldots$ och $\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$ konvergerar följer att $\Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{kx^2}{k^3+x^2}$ konvergerar likformigt på $[0, 2]$. Vidare är alla $a_k(x)$ kontinuerliga på intervallet $[0, 2]$ varför

$$\lim_{x\to 1} \Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{kx^2}{k^3 + x^2} = \Sigma_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to 1} \frac{kx^2}{k^3 + x^2} = \Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3 + 1}.$$

Svar: —

Uppgift 7: Låt $u \in H_0^1(0, 1)$ vara lösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

och $U \in V_h^0$ motsvarande styckvis linjära finita element-approximation på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0,1]$ med steglängd h, där

$$V_h^0 = \{\varphi : \varphi \text{ är kontinuerlig och styckvis linjär på } \mathcal{T}_h, \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}.$$

Visa att

$$\|u - U\|_E \leq \|u - \varphi\|_E, \qquad \forall \varphi \in V_h^0,$$

där $\|f\|_E = \left(\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2}$ är energinormen.

Lösning: Se sats 4.3 i Asadzadeh, eller föreläsningsanteckningarna.

Svar: —

Uppgift 8: Formulera och bevisa integralkriteriet för positiva serier.

Lösning: Se sats 18.6 i ELW.

Svar: —