Matematiska vetenskaper
Chalmers
Johan Björklund

Datum: 2017-06-03
Hjälpmedel: Skrivdon.
Telefonvakt: Caroline Granfeldt

Tid: 08:30-12:30

Tel.: ankn 5325

Tentamen i TMA226

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Tentan har maximalt 60 poäng, därtill kommer poäng från redovisningsuppgifter (max 3 poäng).

1. **8p**

Lösning:a) $dimW = 4$ (via dimensionssatsen, $dimW + dim(N(f)) = dimV$.
b) Konvergensradien är 2 (syns t.ex. genom kvotformeln, kvoten är $\frac{1}{2}$, så radien är 2).
c) Normen är $\sqrt{13} = \sqrt{<(-1,2),(-1,2)>} = \sqrt{1^2 + 3\cdot 2^2}$.
d)

$$\int_0^1 \sin^3(2\pi x)dx \approx \frac{1}{6}\left(\sin(0)^3 + 4\sin(\pi)^3 + \sin^3(2\pi)\right) = 0$$

2. **9p**

Lösning: a) Falskt, tag t.ex. $a_k = 0, b_k = k$.
b) Falskt, tag t.ex. $v = w$ i något lämpligt vektorrum.
c) Sant, om serien konvergerar går termerna mot 0.
d) Sant. Om en potensserie konvergerar i $x = a$ så måste konvergensradien minst vara a. Då konvergerar den för $|x| < |a|$. Speciellt så är $|\frac{a}{2}| < |a|$.
e) Falskt, exempelvis så är matriser linjära funktioner och de kommuterar inte. Ett explicit exempel kan vara (för $V = \mathbb{R}^2$) $f(x,y) = (2x,y), g(x,y) = (y,x)$
f) Falskt, Den tredje funktionen uppfyller inte randvillkoret.

3. **7p**

Lösning: Vektorn $x - \cos x$ är uppenbart linjärt beroende av de övriga. Vi undersöker $f(x) = ax + b\cos x + cx^3 = 0$. Då $x = 0$ så har vi $b = 0$. Vi kan exempelvis undersöka $f'(x) = 3cx^2 + a = 0$ då $x = 0$ för att få fram $a = 0$. Sedan så räcker det med att undersöka $f(1) = c = 0$ för att få även c till 0 och alltså linjärt oberoende. Då har vi alltså en bas bestående av $x, x^3, \cos x$. Detta ger att dimensionen är 3. Dock är basen inte ortogonal. Vi ser snabbt att $\cos x$ är ortogonal mot de två övriga (udda funktion integrerat på symmetriskt intervall blir 0). För att ortogonalisera x, x^3 kan vi exempelvis använda projektion/Gram-Schmidt. Detta ger $e_1 = \cos x, e_2 = x, e_3 = x^3 - \frac{3}{5}\pi^2 x$.

4. **8p**

Lösning: a) Divergent, jämför med (halva) harmoniska ($\frac{1}{2k} < \frac{k^2+1}{k^3+1}$).
b) Konvergent via Leibnitz alternerande test.
c) Divergent då termer går mot 1 (syns då *cos*-termen går mot 1 och $sinh/h$ går mot 1 för $1/k = h$ då h går mot 0).
d) Konvergent, summan av b) (som var konvergent) och $\frac{1}{k^{1.5}}$ som är konvergent då $1.5 > 1$.

5. **6p**

Lösning: Då nollpolynomet är med i varje linjärt underrum så måste $a = 0$. Vi ser då att kravet innebär att vi har polynom av grad högst 2. Andra kravet, $bp(c) = 0$ kan vi dela upp i två fall. Om $b = 0$ så gäller det alltid $(0 = 0)$, och vi har dimension 3 på rummet (en bas är $x^2, x, 1$. Om $b \neq 0$ så kan vi dela med b och få $p(c) = 0$. Detta ger ett underrum oavsett c-värde (då två polynom med rot i c har en summa som har rot i c osv).Underrummet har dim2, en bas kan vara $(x-c), (x-c)^2$.

6. **8p**

Se tidigare tentor för liknande uppgifter/kommer senare.

7. **6p**

Lösning: Vi noterar att konvergenscentrum är i $x = 2$. Om vi sätter $y = x - 2$ så får vi en vanlig potensserie. Kvotformeln ger $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = |\frac{n+1}{2n+1}|$ som går mot $\frac{1}{2}$ så konvergensradien är 2. Vi har kvar att undersöka $y = \pm 2$. Vi noterar att $|a_n(\pm 2)^n| = \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n-2}{2n-3} \cdot \frac{2n-4}{2n-5} \cdot \ldots \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{1} > 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Speciellt så går den inte mot 0 så vi har varken konvergens i $y = 2$ eller $y = -2$. Slutsatsen är alltså att den konvergerar om och endast om $0 < x < 4$.

8. **8p**

Lösning: Antag att a_k går mot A. Då kan vi för varje $\epsilon' > 0$ hitta ett N' så att om $n > N'$ så är $|a_n - A| < \epsilon'$. Låt $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$. Då har vi ett sådant N' och sätter sedan $N = N'$. Antag att $m > N, n > N$. Då har vi $|a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| \leq \epsilon' + \epsilon' = \epsilon$ vilket skulle bevisas.

Som en extra kommentar så är omvändningen, varje Cauchyföljd konvergerar, också sann för reella tal, men man får anstränga sig mer för att visa det.