Matematiska vetenskaper
Chalmers
Johan Björklund

Datum: 2017-08-21 Tid: 08:30-12:30
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Gustav Kettil Tel.: ankn 5325

Tentamen i TMA226

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Tentan har maximalt 60 poäng, därtill kommer poäng från redovisningsuppgifter (max 3 poäng). Betygsgränserna är 24/36/48.

1. På denna uppgift ska enbart svar ges. Två poäng per deluppgift.

   a) Låt f vara en linjär avbildning från V till W så att dim $W = 5$ och f är surjektiv. Dessutom så vet vi att $dim(N(f)) = 2$ (dvs dimensionen av nollrummet). Vad är dimensionen för V?

   b) Beräkna konvergensradien för potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

   c) Vi definierar en skalärprodukt på $\mathbb{R}^2$ så att $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + x_2y_2$. Beräkna normen av vektorn $(-2, 1)$.

   d) Använd "composite Midpoint rule" i två delinterval för att approximera integralen
   $$\int_{-1}^{1} x^2 dx.$$

8p

SVAR: a) 7 (Dimensionssatsen ger 5+2=7).
b) Konvergensradien är 1 (ges t.ex. av kvotformeln)
c) $3 = \sqrt{2 \cdot (-2)^2 + 1^2}$.
d)
$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = \int_{-1}^{0} x^2 dx + \int_{0}^{1} x^2 dx \approx (-0.5)^2 + (0.5)^2 = 0.5$$

2. Varje påstående ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger $1.5p$, fel svar ger $-1.5p$ (inget svar ger $0p$). Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   a) Om talföljderna a_k och b_k båda är nedifrån begränsade så är talföljden $c_k = a_k+b_k$ också det.

   b) Om M är en linje i vektorrummet R^2 så är M ett linjärt underrum till R^2.

   c) Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergenta (och $b_k > 0$) så är $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k}$ konvergent.

   d) Om en potensserie (centrerad i 0) konvergerar för $x = 3$ så konvergerar den även för $x = -2$.

   e) Om $a_k > b_k > 0$ och $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är divergent så är $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent.

   f) Två polynom av grad exakt n i x är lika om de antar samma värde i $n + 1$ olika punkter.

9p

SVAR:a) Sant (om $a_k > A$ och $b_k > B$ så är $a_k + b_k > A + B$)
b) Falskt. Ta t.ex. linjen $y + x = 1$ som motexempel. Den innehåller inte nollvektorn $(0, 0)$.
c) Falskt. Ta t.ex $a_k = b_k = \frac{1}{k^2}$ som motexempel.
d) Sant.
e) Falskt. Ta t.ex $a_k = k^2$, $b_k = \frac{1}{k^2}$ som motexempel.
f) Sant. $n + 1$ villkor räcker för att bestämma koefficienterna för ett $n-$te gradspolynom.

3. Låt $\mathbb{R}^2$ ha skalärprodukten $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + y_1x_2 + 5x_2y_2$. Visa att det verkligen är en skalärprodukt och ge en ON bas för $\mathbb{R}^2$ med avseende på denna skalärprodukt.

7p

Svar: Skalärprodukt visas genom att kontrollera kraven för skalärprodukt, dvs

$$< ax, y >= a < x, y >$$

$$< x + y, w >=< x, w > + < y, w >$$

$$< x, y >=< y, x >$$

$$< x, x >\geq 0$$

samt $< x, x >= 0$ om och endast om $x = 0$. Ett exempel på ON-bas är $(1, 0)$ och $\frac{1}{4}(1, -1)$. Kan konstrueras med t.ex. Gram-Schmidt utgående från (ej ON) basen $(1, 0), (0, 1)$.

4. Bestäm vilka av följande serier som konvergerar.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k - k}{2e^k + k}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^{1.1}}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{\sin k}{k})^k$

8p

Svar:a) divergent (gränsvärdet för termen går mot $\frac{1}{2}$).
b) Konvergent visas via exempelvis kvottest.
c) Konvergent. Kan ses på olika sätt. Exempelvis så gäller att $0 < \frac{\ln k}{k^{1.1}} = \frac{\ln k}{k^{0.05}} \cdot \frac{1}{k^{1.05}} \leq \frac{1}{k^{1.05}}$ när k är stort.
d) Absolutkonvergent och alltså konvergent då $0 < |\frac{\sin k}{k}|^k \leq |\frac{1}{k}|^k \leq \frac{1}{2^k}$.

5. Låt V vara vektorrummet som består av funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. För vilka positiva heltal n bildar delmängden M_n som består av funktioner f så att $f(x)^n = f(x^n)$ ett linjärt underrum?

6p

Svar:Om $n = 1$ så är det ett underrum (då $f(x)^1 = f(x^1)$) alltid gäller, och vi då har $V = M_1$. Om $n \geq 2$ så kan vi undersöka funktionen $g(x) = x$. Uppenbarligen så tillhör g delmängden M då $g(x^n) = x^n = g(x)^n$. Låt oss anta att M_n nu är ett underrum. Om M_n är ett underrum så ska också $2g(x) = 2x = h(x)$ ligga i M_n. Då har vi $2x^n = h(x^n) = h(x)^n = 2^n x^n$. Då detta gäller för alla x så gäller det speciellt för $x = 1$ och vi har $2^n = 2$ vilket uppenbart är falskt då $n \geq 2$. Alltså så är M_n endast ett underrum då $n = 1$.

6. Härled variationsformulering och finita element-formulering, samt beräkna styvhets och massmatris och högerledsvektor för den styckvis linjära finita element-approximationen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -u'' + 6u = 1; \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0, 1]$ med steglängd $h = 1/3$. Formulera det resulterande linjära ekvationssystemet (lösningen behöver ej beräknas).

8p

Svar: Variationsformulering: Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in V_0 := \{v : \int_0^1 (v(x)^2 + v'(x)^2)dx < \infty;\ v(0) = v(1) = 0\}$ och integrera över intervallet $[0, 1]$. Partialintegration ger

$$-\left[u'(x)v(x)\right]_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + 6\int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 v(x)dx.$$

Med insättning av randdata $v(0) = v(1) = 0$ fås variationsformuleringen:
Hitta $u \in V := \{v : \int_0^1 (v(x)^2 + v'(x)^2)dx < \infty;\ v(0) = v(1) = 0\}$ så att

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + 6\int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 v(x)dx, \quad \forall v \in V_0$$

Motsvarande finita element-problem är:
Hitta $U \in V_h = \{\varphi :\ \varphi$ är kontinuerlig och styckvis linjär på $\mathcal{T}_h, \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$ så att

$$\int_0^1 U'(x)\varphi'(x)dx + 6\int_0^1 U(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in V_h^0.$$

Vi ansätter $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ där

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 3x, & x \in [0, 1/3) \\ 2 - 3x, & x \in [1/3, 2/3) \\ 0, & x \in [2/3, 1] \end{cases}, \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1/3) \\ 3x - 1, & x \in [1/3, 2/3) \\ 3 - 3x, & x \in [2/3, 1] \end{cases}$$

är hattfunktionerna svarande mot nodpunkterna $x_j = j/3,\ j = 1, 2$.

Vi sätter $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ i finita element-problem och väljer testfunktioner $\varphi = \varphi_i$, $i = 1, 2$. Vi får då ekvationessystemet

$$\left(\begin{bmatrix} \int_0^1 (\varphi_1')^2 dx & \int_0^1 \varphi_1'\varphi_2' dx \\ \int_0^1 \varphi_2'\varphi_1' dx & \int_0^1 (\varphi_2')^2 dx \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} \int_0^1 \varphi_1\varphi_1 dx & \int_0^1 \varphi_1\varphi_2 dx \\ \int_0^1 \varphi_2\varphi_1 dx & \int_0^1 \varphi_2\varphi_2 dx \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 \varphi_1 dx \\ \int_0^1 \varphi_2 dx \end{bmatrix}$$

Beräkning av matriselementen ger

$$\left(\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 6\frac{h}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = h\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

eller, med $h = 1/3$

$$\begin{bmatrix} 22 & -8 \\ -8 & 22 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

7. Låt vektorrummet V bestå av alla linjära funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$. Bestäm V:s dimension och ge en bas för vektorrummet.

6p

Svar: Linjära funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$ kan beskrivas som $1 \times n$ matriser. Uppenbarligen så bildar sådana matriser ett vektorrum av dimension n och en bas ges av de linjära funktionerna h_i så att $h_i(e_i) = 1$, $h_i(e_j) = 0$ då $i \neq j$.

8. Lös ekvationen $\frac{3}{(1-x)} + \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{3}{(1-x)^3} + ... = 3x + 8$.

8p

Svar: Vi adderar 3 till båda sidor. Då får vi $3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-x)^n} = 3x+11$. Vänsterledet är en geometrisk serie som då konvergerar (sålänger $\frac{1}{|1-x|} < 1$) till $3\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = 3\frac{1-x}{1-x-1} = 3\frac{x-1}{x} = 3 - \frac{3}{x}$. Då har vi $3 - \frac{3}{x} = 3x + 11$. Multiplikation med x och förenkling ger $0 = 3x^2 + 8x - 3$. Rötterna är $x = -3$ samt $x = \frac{1}{3}$. Roten $x = \frac{1}{3}$ är en falsk rot (då serien inte konvergerar för detta värde). Alltså så måste vi ha $x = -3$ som enda lösning.