Matematiska vetenskaper
Chalmers
Johan Björklund

Datum: 2017-10-07 Tid: 8:30-12:30
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Maximilian Thaller Tel.: ankn 5325

Tentamen i TMA226

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Tentan har maximalt 60 poäng, därtill kommer poäng från redovisningsuppgifter (max 3 poäng). Betygsgränserna är 24/36/48.

1. På denna uppgift ska enbart svar ges. Två poäng per deluppgift.

   a) Låt f vara en linjär avbildning från V till W så att dim $V = 9$, dim $W = 3$ och f är surjektiv. Vad är dimensionen för f : s nollrum?

   b) Beräkna konvergensradien för potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$.

   c) Ge en bas för vektorrummet av polynom i x av grad högst 1 med egenskapen att $p(1) = 0$.

   d) Använd den enkla Trapezoidregeln för att approximera integralen

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx$$

8p

Svar: a) 6 via dimensionssatsen.
b) $\frac{1}{2}$ via exempelvis kvotformeln
c) $x - 1$ är en bas (rummet är 1-dimensionellt)
d)

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx \approx \frac{1}{2}\left((-1)^2 + (1)^2\right) = 1$$

2. Varje påstående ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger 1.5p, fel svar ger $-1.5p$ (inget svar ger 0p). Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   a) Om a_k är en övre begränsad talföljd och b_k är en nedre begränsad talföljd så är $c_k = a_k + b_k$ både övre och undre begränsad.

   b) Om f och g är linjära avbildningar från V till W så är $f + g$ en linjär avbildning från V till W.

   c) Om både $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ är konvergenta så är $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$.

   d) Det finns potensserier som konvergerar för alla värden på x.

   e) Låt V vara vektorrummet som består av alla funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Då bildar funktioner $f(x)$ sådana att $f(3) = 4$ ett linjärt underrum.

   f) Det linjära polynomet som interpolerar en funktion f vid punkterna $\{a, b\}$ med en lagrangisk interpolationsbas $\{\lambda_a(x), \lambda_b(x)\}$ kan vara annorlunda än polynomet som ges med den kanoniska basen $\{1, x\}$.

9p

Svar: a) Falskt, ta t.ex. $a_k = 0, b_k = k$
b) Sant.
c) Falskt, motexempel från ändliga summor, $(1+1)^2 \neq 1^2 + 1^2$.
d) Sant, exempelvis summan av $\frac{x^k}{k!}$. Ett tråkigare exempel är $\sum 0x^n = 0$.
e) Falskt, nollvektorn är inte med.
f) False. They are the same polynomial with a different representation.

3. Vi vet att rummet av alla funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ bildar ett vektorrum. Låt M vara underrummet så att $M = Span(\sin^2 x + \cos^2 x, \sin x, \cos x, 1 + \cos x, x, e^x)$. Bestäm $dimM$ och ge en bas för M.

7p

Svar:Dim M=5 (vi kan slänga bort $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$ då den är linjärt beroende). Övriga bildar en bas (lin. ob. kan visas genom exempelvis kolla gränsvärden vid division med e^x, x för att få bort de termerna, sedan kan man använda derivata och koll i punkter för resten).

4. Bestäm vilka av följande serier som konvergerar.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+\cos k}{k^4+\sin k}$
b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
c) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$
d) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k \cos(\pi k)}$

8p

Svar:a) konvergent, via t.ex. jämförelse
b) konvergent (teleskoperande serie, summa 1)
c) divergent med integraltest.
d) divergent via jämförelse med c)

5. Bestäm konvergensradie och konvergens på randen för följande potensserier:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(-2)^n n}$
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Uttryck följande potensserier som en rationell funktion.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n}$
d) $\sum_{n=0}^{\infty} (1+2^n) x^n$

6p

Svar:a) Konvergensradie 2, konvergent vid $x = 2$, divergent då $x = -2$ vi kvotformel
b) konvergerar för alla x, kvotformel (oändlig konvergensradie).
c $\frac{1}{1-3x^2}$
d $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-2x} = \frac{2-3x}{1-3x+2x^2}$

6. Härled variationsformulering och finita element-formulering, samt beräkna styvhets och högerledsvektor för den styckvis linjära finita element-approximationen till randvärdesproblem

$$\begin{cases} -u'' = 3; \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0,1]$ med steglängd $h = 1/3$. Formulera det resulterande linjära ekvationssystemet (lösningen behöver ej beräknas).

8p

Svar: Variationsformulering: Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1(0,1)$ och integrera över intervallet $[0,1]$. Partialintegration ger

$$-\left[u'(x)v(x)\right]_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx = 3\int_0^1 v(x)dx.$$

Med insättning av randdata $v(0) = v(1) = 0$ fås variationsformuleringen:
Hitta $u \in H_0^1(0,1)$ så att

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = 3\int_0^1 v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1(0,1)$$

Motsvarande finita element-problem är:
Hitta $U \in V_h^0 = \{\varphi :\ \varphi$ är kontinuerlig och styckvis linjär på $\mathcal{T}_h, \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$ så att

$$\int_0^1 U'(x)\varphi'(x)dx = 3\int_0^1 \varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in V_h^0.$$

Vi ansätter $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ där

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 3x, & x \in [0,1/3) \\ 2-3x, & x \in [1/3,2/3) \\ 0, & x \in [2/3,1] \end{cases} \quad \text{och} \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1/3) \\ 3x-1, & x \in [1/3,2/3) \\ 3-3x, & x \in [2/3,1] \end{cases}$$

är hattfunktionerna svarande mot nodpunkterna $x_j = j/3,\ j = 1,2$.

Vi sätter $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ i finita element-problem och väljer testfunktioner $\varphi = \varphi_i$, $i = 1,2$. Vi får då ekvationessystemet

$$\left(\begin{bmatrix} \int_0^1 (\varphi_1')^2 dx & \int_0^1 \varphi_1'\varphi_2' dx \\ \int_0^1 \varphi_2'\varphi_1' dx & \int_0^1 (\varphi_2')^2 dx \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} \int_0^1 \varphi_1 dx \\ \int_0^1 \varphi_2 dx \end{bmatrix}$$

Beräkning av matriselementen ger

$$\left(\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{bmatrix} = 3h\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}$$

eller, med $h = 1/3$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1 \\ \xi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}$$

7. Låt V vara vektorrummet som består av polynom i x. Låt M vara den delmängd av polynom så att $\lim_{x\to\infty} p(x+a) - p(x) = b$. För vilka värden på a, b är M ett linjärt underrum till V? För varje sådant par, ge dimensionen för underrummet.

6p

Svar:Nollvektorn måste vara med, så alltså så måste $\lim_{x\to\infty} 0-0=0=b$. För att det ska finnas hopp om att vara ett delrum så måste alltså $b=0$. $p(x+a)-p(x)$ är ett polynom, och de enda polynomen som har ett gränsvärde som konvergerar mot oänligheten är de konstanta polynomen. Alltså så måste vi ha $p(x+a)-p(x)=0$. Två möjligheter finns. Om $a=0$ så gäller det alltid och $M=V$. Då har vi oändlig dimension ($1, x, x^2, ...$ är lin.ob. vektorer i rummmet). Om $a \neq 0$ så är det lite lurigare. Antag att $p(x+a)-p(x)=0$ Undersök polynomet $p(x)-p(0)=g(x)$. Uppenbarligen så gäller också att $g(x+a)-g(x)=0$. Vi har dessutom $g(0)=0$. Då har vi $0=g(a)=g(2a)=...=g(na)=....$ Alltså så har $g(x)$ oändligt många rötter. Det enda polynomet med oändligt många rötter är nollpolynomet, så då har vi $p(x)=p(0)$, och vi ser att M består av konstanta polynom. Alltså så är M 1-dimensionellt (bas $p(x)=1$).

8. Antag att potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ har konvergensradie $R>0$. Visa att potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$ också har konvergensradie R.

8p

Låt $p(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Vi vet att inom konvergensradien så existerar $p'(x)$ och vi har $p'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ med samma konvergensradie. Då måste även $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$ konvergerar för varje $|x|<R$ då det bara skiljer på en multiplikation med x (som för varje givet x bara innebär multiplikation med konstant). Går också att visa på andra sätt, exempelvis genom att använda att termerna går mot 0 inuti konvergensradien.