Uppgift 1 (9p). Låt $\mathcal{P}_3$ vara det linjära rummet bestående av polynom av grad mindra eller lika med 3. För $p \in \mathcal{P}_3$, låt Ap $(= A(p))$ vara funktionen definierad som

$$Ap(t) = \frac{p(1+t) + p(1-t)}{2}.$$

(a) Visa at A är en linjär operator från $\mathcal{P}_3$ till $\mathcal{P}_3$. *(3p)*

(b) Välj en bas för $\mathcal{P}_3$, och bestäm matrisen för A med avseende på denna basen. *(3p)*

(c) Finn alla lösningar $p \in \mathcal{P}_3$ till ekvationen

$$Ap = 0.$$ *(3p)*

Lösning.

(a) Om p är ett polynom av grad mindre eller lika med 3, så måste uppenbarligen $Ap(x)$ vara ett polynom av grad mindre eller lika med 3, så A avbildar $\mathcal{P}_3$ till $\mathcal{P}_3$. A är en linjär operator om

(i) $A(ap) = aA(p)$ för all $a \in \mathbb{R}$

(ii) $A(p+q) = A(p) + A(q)$ för alla $p, q \in \mathcal{P}_3$.

Låt $a \in \mathbb{R}$. Då har vi

$$A(ap)(t) = \frac{ap(1+t) + ap(1-t)}{2} = a\left(\frac{p(1+t) + p(1-t)}{2}\right) = aAp(t)$$

vilket visar at (i) gäller. Nu låt $p, q \in \mathcal{P}_2$. Vi har

$$\begin{aligned} A(p+q)(t) &= \frac{(p+q)(1+t) + (p+q)(1-t)}{2} \\ &= \frac{p(1+t) + q(1+t) + p(1-t) + q(1-t)}{2} \\ &= \frac{p(1+t) + p(1+t)}{2} + \frac{q(1-t) + q(1-t)}{2} = Ap(t) + Aq(t). \end{aligned}$$

som visar at (ii) gäller. Då båda (i) och (ii) gäller för alla $a \in \mathbb{R}$ och $p, q \in \mathcal{P}_3$, så är $A\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ linjär.

(b) Som bas för $\mathcal{P}_3$ kan vi välja $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$, där $p_k(t) = (t-1)^k$, dvs

$$p_0(t) = 1, \qquad p_1(t) = t-1, \qquad p_2(t) = (t-1)^2, \qquad p_3(t) = (t-1)^3.$$

Vi har då $p_k(1+t) = (1+t-1)^k = t^k$ och $p_k(1-t) = (-t)^k$

$$\begin{aligned} Ap_0(t) &= \frac{1+1}{2} = 1 = p_0(t) \\ Ap_1(t) &= \frac{t-t}{2} = 0 \\ Ap_2(t) &= \frac{t^2+t^2}{2} = t^2 = p_2(t) + 2p_1(t) + p_0(t) \\ Ap_3(t) &= \frac{t-t}{2} = 0 \end{aligned}$$

Detta ger följande matris for A:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Löser först $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ för att bestämma nollrummet til $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lösningen er $x_0 = x_2 = 0$, x_1 och x_3 är fria. Alltså

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \quad \text{för godtyckliga } a, b \in \mathbb{R}.$$

Lösningarna till $Ap = 0$ är då

$$\begin{aligned} p(t) &= x_0 p_0(t) + x_1 p_1(t) + x_2 p_2(t) + x_3 p_3(t) \\ &= a(t-1) + b(t-1)^3, \quad a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Uppgift 2 (9p). Låt $\mathcal{P}_n$ vara rummet av polynom av grad mindra eller lika med n, och låt

$$(p, q) = \frac{1}{2}\big(p(1) - p(0)\big)\big(q(1) - q(0)\big) + \frac{1}{2}\big(p(2) - p(1)\big)\big(q(2) - q(1)\big) + p(2)q(2). \tag{1}$$

(a) Formulera definitionen för ett innre produkt (skalärprodukt). Visa att (1) definierar en innre produkt på $\mathcal{P}_n$ när $n \leq 2$ (visa positivitetsvillkoren). *(3p)*

(b) Använd Gram-Schmidt metoden för att bestämma en ortogonal bas (med avseeende på (1)) för $\mathcal{P}_2$. *(3p)*

(c) Finn bästa approximation till $f(x) = \cos(\pi x/2)$ in $\mathcal{P}_2$ med avseende på den innre produkten (1). Alltså, betäm $p \in \mathcal{P}_2$ så att

$$(f - p, f - p) \leq (f - q, f - q) \qquad \forall q \in \mathcal{P}_2. \qquad \textit{(3p)}$$

Lösning.

(a) Enligt definitionen är (p, q) et innre produkt om följande är uppfyld:

(i) $(p, q) = (q, p)$ för alla $p, q \in \mathcal{P}_2$

(ii) $(ap, q) = a(p, q)$ för alla $a \in \mathbb{R}$ och alla $p, q \in \mathcal{P}_2$

(iii) $(p_1 + p_2, q) = (p_1, q) + (p_2, q)$ för alla $p_1, p_2, q \in \mathcal{P}_2$

(iv) $(p, p) \geq 0$ för alla $p \in \mathcal{P}_2$ och $(p, p) = 0$ endast om $p = 0$.

Det är klart att (i)–(iii) gäller, så det står kvar att visa (iv). Låt $p \in \mathcal{P}_2$. Vi har

$$(p, p) = \frac{1}{2}|p(1) - p(0)|^2 + \frac{1}{2}|p(2) - p(1)|^2 + |p(2)|^2 \geq 0.$$

För $(p, p) = 0$ krävs $p(2) = 0$, $p(2) = p(1)$ och $p(1) = p(0)$. Alltså, $p(2) = p(1) = p(0) = 0$, så p är et polynom av grad ≤ 2 med 3 rötter. Den enda möjligheten är $p = 0$.

(b) Väljer en bas $\{p_0, p_1, p_2\}$ för $\mathcal{P}_3$, definierad som

$$p_0(x) = 1, \qquad p_2(x) = x, \qquad p_2(x) = x^2.$$

En ortogonal bas $\{b_0, b_1, b_2\}$ bestämms genom att ortogonalisera basen $\{p_0, p_1, p_2\}$ med Gram-Schmidt. Vi börjar med $b_0(x) = p_0(x) = 1$, och beräknar

$$(b_0, b_0) = (1, 1) = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1.$$
$$(b_0, p_1) = (1, x) = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 2.$$

Detta ger

$$b_1(x) = p_1(x) - \frac{(p_1, b_0)}{(b_0, b_0)} b_0(x) = p_1(x) - 2p_0(x) = x - 2,$$

och vi beräknar (med $b_1(0) = -2$, $b_1(1) = -1$, $b_1(2) = 0$)

$$(b_1, b_1) = (x - 2, x - 2) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$$
$$(b_0, p_2) = (1, x^2) = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 4$$
$$(b_1, p_2) = (x - 2, x^2) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 = 2,$$

vilket ger

$$\begin{aligned} b_2(x) &= p_2(x) - \frac{(p_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1(x) - \frac{(p_2, b_0)}{(b_0, b_0)} b_0(x) \\ &= p_2(x) - 2p_1(x) - 4p_0(x) - 2 = x^2 - 2x. \end{aligned}$$

Vår ortogonala bas för $\mathcal{P}_2$ är $\{b_0, b_1, b_2\}$ där

$$b_0(x) = 1, \qquad b_1(x) = x - 2, \qquad b_2(x) = x^2 - 2x.$$

Denna basen är även ortnormal, ty

$$(b_2, b_2) = \frac{1}{2} \cdot -1 \cdot -1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1.$$

(c) Bästa approximation p till funktionen f löser ekvationen

$$(p - f, q) = 0 \quad \forall q \in \mathcal{P}_2.$$

Då det innre produktet bara beror på funktionernas värden i punkterna $x = 0$, $x = 1$ och $x = 3$, så måste p vara polynomet som tar samma värden som f i dessa punkter. Alltså,

$$p(0) = \cos(0) = 1, \qquad p(1) = \cos(\pi/2) = 0, \qquad p(2) = \cos(\pi) = -1.$$

Det enda polynomet av grad ≤ 2 som upfyller detta är

$$p(x) = 1 - x.$$

Uppgift 3 (10p). Betrakta följande randvärdesproblem

$$(2) \qquad \begin{cases} -(\alpha u')' = f & \text{in } (0, 1) \\ u(0) = 0 \\ \alpha(1)u'(1) = 2 \end{cases}$$

där $f \in L^2([0, 1])$ och

$$\alpha(x) = 1 + x^2.$$

Motsvarande variationsformulering är:
Finn $u \in V$ så att

$$(3) \qquad \int_0^1 \alpha(x)u'(x)v'(x)\, dx = \int_0^1 f(x)v(x)\, dx + 2v(1) \qquad \forall v \in V,$$

där V er följande rum av testfunktioner,

$$V = \left\{ v \in C([0,1]) : \int_0^1 |v'(x)|^2 + |v(x)|^2 \, dx < \infty \quad \text{och} \quad v(0) = 0 \right\}.$$

(a) Härled variationsformuleringen (3) från randvärdesproblemet (2). *(3p)*

(b) Visa att en lösning till randvärdesproblemet (2) är entydig. *(3p)*

(c) Låt u_h vara den numeriska FEM-lösningen till (3) när vi användar kontinuerliga och styckvis linjära funktioner med avseende på en likformig partition av intervallet $[0,1]$. Härled en a priori feluppskattning i normen

$$\|u\|_E = \sqrt{\int_0^1 \alpha(x)|u'(x)|^2 \, dx} \qquad \text{(4p)}$$

Lösning.

(a) Multiplisera differensialekvationen med $v \in V$ och integrera över intervallen $[0,1]$:

$$(*) \qquad \int_0^1 -(\alpha u')' v \, dx = \int_0^1 f v \, dx.$$

Använder partialintegration på vänster sida av likhetstecknet

$$\begin{aligned} \int_0^1 -(\alpha u')' v \, dx &= \int_0^1 \alpha u' v' \, dx - \Big[\alpha u' v\Big]_0^1 \\ &= \int_0^1 \alpha u' v' \, dx - \underbrace{\alpha(1) u'(1)}_{=2} v(1) + \alpha u'(0) \underbrace{v(0)}_{=0} \\ &= \int_0^1 \alpha u' v' \, dx - 2v(1). \end{aligned}$$

Här används randvillkoret $\alpha(1)u'(1) = 2$, och $v(0) = 0$ ty $v \in V$. Insättning i $(*)$ ger

$$\underbrace{\int_0^1 \alpha u' v' \, dx}_{=a(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 f(x) v(x) \, dx + 2v(1)}_{=L(v)},$$

där sista termen har flyttats över från vänstersidan. Vi vet från randvillkoren att lösningen u uppfyller $u(0) = 0$, så V är et lämpligt val av rum from problemet.

(b) Antag at u och $\tilde{u}$ är två lösningar till randvärdesproblemet (2). Då är u och $\tilde{u}$ även lösningar till variationformuleringen (3), och

$$\begin{aligned} a(u, v) &= L(v) \quad \forall v \in V \\ a(\tilde{u}, v) &= L(v) \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Subtraktion ger

$$a(u - \tilde{u}, v) = 0 \quad \forall v \in V.$$

Väljar nu $v = u - \tilde{u}$ som ger ekvationen

$$0 = a(u - \tilde{u}, u - \tilde{u}) = \int_0^1 \alpha(x) \big| u'(x) - \tilde{u}'(x) \big|^2 \, dx$$

Vi har $\alpha(x) = 1 + x^2 \geq 1$, så ekvationen är endast uppfylld om $u - \tilde{u}$ är konstant, och

$$u(x) - \tilde{u}(x) = u(0) - \tilde{u}(0) = 0 - 0 = 0.$$

Alltså är $u(x) = \tilde{u}(x)$ för alla $x \in [0,1]$, så lösningarna är entydiga.

(c) Låt u_h vara lösningen til FEM-problemet:

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall V_h \subset V$$

där V_h består av kontinuerliga och styckvis linjära funktioner på $[0,1]$ med avseende påen likformig partition av intervallen. Vi har da Galerkin-ortogonaliteten

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h,$$

och från detta härleds

$$(**) \qquad a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \quad \forall v_h \in V_h.$$

Enligt definitionen av energinormed $\|\cdot\|$ har vi

$$\|u - u_h\|^2 = \int_0^1 \alpha(x)\big|u'(x) - u_h'(x)\big|^2\,dx = a(u - u_h, u - u_h).$$

Ekvation (**) och Cauchy-Schwarz olikhet ger

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_E^2 &= a(u - u_h, u - v_h)\\ &= \int_0^1 \alpha(x)\big(u'(x) - u_h'(x)\big)\big(u'(x) - v_h'(x)\big)\,dx\\ &= \int_0^1 \sqrt{\alpha(x)}\big(u'(x) - u_h'(x)\big)\sqrt{\alpha(x}\big(u'(x) - v_h'(x)\big)\,dx\\ &\le \underbrace{\sqrt{\int_0^1 \alpha(x)\big|u'(x) - u_h'(x)\big|^2\,dx}}_{=\|u-u_h\|_E}\sqrt{\int_0^1 \alpha(x)\big|u'(x) - v_h'(x)\big|^2\,dx}\end{aligned}$$

vilket gäller för alle $v_h \in V$. Vi har

$$\begin{aligned}\sqrt{\int_0^1 \alpha(x)\big|u'(x) - v_h'(x)\big|^2\,dx} &= \sqrt{\int_0^1 (1+x^2)\big|u'(x) - v_h'(x)\big|^2\,dx}\\ &\le \sqrt{\int_0^1 2\big|u'(x) - v_h'(x)\big|^2\,dx} = \sqrt{2}\|u' - v_h\|_{L^2}.\end{aligned}$$

och

$$\|u - u_h\|_E \le \sqrt{2}\sqrt{2}\|u - v_h\|_{L^2} \le \sqrt{2}\|u - v_h\|_{H^1} \quad \forall v_h \in V_h.$$

Väljer nu $v = \pi_h u$, där $\pi_h u$ är den styckvis linjära interpolanten av den eksakta lösningen u. Estimatet för interpolationsfelet ger följande felestimat:

$$\|u - u_h\|_E \le \sqrt{2}\|u - \pi_h u\|_{H^1} \le \sqrt{2}Ch\|u''\|_{L^2},$$

där C är konstanten i interpolationsestimatet $\|u - \pi_h u\|_{H^1} \le Ch\|u''\|_{L^2}$ och h är längden på delintervallen in den likformiga partitionen av $[0,1]$.

Uppgift 4 (8p). Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k!}$ *(2p)*

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(1/k)}{k}$ *(2p)*

(c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}$ *(2p)*

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}^{\sqrt{k}}}$ *(2p)*

Lösning.

(a) Använder kvotkriteriet. Med $a_k = e^k/k!$,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{e^{k+1}k!}{(k+1)!e^k} = \frac{e}{k+1} \longrightarrow 0 \quad \text{när} \quad k \longrightarrow \infty.$$

Serien konvergerar enligt kvotkriteriet.

(b) Använder jämförelseskriteriet för gränsvärdet. Med $a_k = \sin(1/k)/k$ och $b_k = 1/k^2$,

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{\sin(1/k)/k}{1/k^2} = \frac{\sin(1/k)}{1/k} \longrightarrow 1 \quad \text{när} \quad k \longrightarrow \infty.$$

Serien konvergerar enligt jämförelseskriteriet för gränsvärdet då serien $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ konvergerar.

(c) Använder integralkriteriet. Med $f(k) = (\ln k)/k$,

$$\int_2^n f(x)\,dx = \int_2^n \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_2^n \frac{d}{dx}\ln\ln x\,dx$$
$$= \ln\ln n - \ln\ln 2 \longrightarrow \infty \quad \text{när} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Serien $\sum_{k=2}^{\infty} f(k)$ divergerar enligt integralkriteriet.

(d) Använder jämförelseskriteriet. För $k \geq 16$,

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k}^{\sqrt{k}}} < \frac{1}{\sqrt{k}^{\sqrt{16}}} = \frac{1}{\sqrt{k}^4} = \frac{1}{k^2}$$

Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar enligt jämförelseskriteriet derför att serien $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ konvergerar.

Uppgift 5 (4p). Bestäm för vilka x följande serie konvergerar.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n \ln n}{n}(x+1)^n.$$

Lösning. Serien är en potensserie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)$,

$$a_n = \frac{2^n \ln n}{n} \quad n \geq 2 \qquad \text{och} \qquad x_0 = -1,$$

och $a_0 = a_1 = 0$. Bestämmer först konvergensradien för serien med rotkriteriet. För $n \geq 2$,

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^n \ln n}{n}} = \frac{2\sqrt[n]{\ln n}}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow 2 \quad \text{när} \quad n \longrightarrow \infty$$

som ger konvergensradien $R = 1/2$. Serient är sentrerad i $x = x_0 = -1$, och konvergerar då för alla x in intervallen

$$(x_0 - R,\, x_0 + R) = (-3/2,\, -1/2)$$

Det står kvar att avgöra om serien konvergar i gränspunkterna $x = -3/2$ och $x = -1/2$. För $x = -1/2$ får vi serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \ln n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

som divergar enligt jämförelse med serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. För $x = -3/2$, får vi serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \ln n}{n} \left(\frac{-1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$

som är alternerande och konvergerar betinget enligt Leibnizkriteriet.

Uppgift 6 (6p). Beräkna gränsen

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n - n\cos(x/n)}{\sqrt{1+x^2}}\, dx.$$

Lösning. Låt f_n vara integranden

$$f_n(x) = \frac{n - n\cos(x/n)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{n}\left(n^2 - n^2 \cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Taylorutvecklingen av $\cos t$ är

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2}\cos\theta t, \quad \text{för något } \theta \in [0,1].$$

Vilket ger

$$n^2 - n^2\cos\left(\frac{x}{n}\right) = n^2 - n^2\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\cos\left(\theta\frac{x}{n}\right)\right) = x^2\cos\left(\theta\frac{x}{n}\right)$$

och

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\underbrace{\cos\left(\theta\frac{x}{n}\right)}_{\to 1 \text{ när } n\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \longrightarrow 0 \quad \text{när} \quad n \longrightarrow \infty,$$

vilket betyder att f_n konvergerar punktvis mot noll. Konvergensen är även likformig, ty

$$\left|f_n(x) - 0\right| = \left|f_n(x)\right| = \frac{1}{n}\cos\left(\theta\frac{x}{n}\right)\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \le \frac{1}{n} \quad \big(x \in [0,1]\big)$$

vilket ger

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\le x\le 1}\left|f_n(x) - f(x)\right| \le \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Därför att $f_n \to f = 0$ likformigt kan vi byte om ordning på integralet och gränsen:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n - n\cos(x/n)}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = 0.$$

Uppgift 7 (2p). Använd Simpsons enkla regel för att approximera integralen

$$\int_0^{\pi/3} (\tan x)^2\, dx.$$

Lösning. Simpsons enkla regel på intervallen $[0, \pi/3]$ har tre kvadraturpunkter med tillhörande vikter:

$$x_0 = 0, \qquad x_1 = \frac{\pi}{6}, \qquad x_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$w_0 = \frac{\pi}{18}, \qquad w_1 = \frac{4\pi}{18}, \qquad w_2 = \frac{\pi}{18}.$$

Vi har $\tan(0) = 0$, $\tan(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$, $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$. Innsättning ger

$$\int_0^{\pi/3} (\tan x)^2 \, dx \approx \sum_{k=0}^{3} w_k (\tan x_k)^2 = \frac{\pi}{18} \cdot 0 + \frac{4\pi}{18} \cdot \frac{1}{3} + \frac{\pi}{18} \cdot 3 = \frac{13\pi}{54}.$$

Uppgift 8 (6p). Låt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ vara två konvergenta och positiva serier så att

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A \qquad \text{och} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B.$$

Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k b_k}$ konvergerar, och

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k b_k} \leq \sqrt{AB}.$$

Lösning. En positive serie konvergerar om och endast om följden av delsummor är begränsad. Serien $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k b_k}$ är positiv, och vi använder Cauchy-Schwarz olikhet för att visa att delsummorna är begränsade:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k b_k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k}.$$

Då $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ båda konvergar är deras delsummor begränsade. Delsumman $\sum_{k=1}^{n} a_k$ är begränsad av A och $\sum_{k=1}^{n} b_k$ är begränsad av B:

$$s_n \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k} \leq \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB},$$

vilket visar att delsummorna s_n är begrensade av $\sqrt{AB}$ oberoende av n. Detta medför att serien $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k b_k}$ konvergerar och $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k b_k} < \sqrt{AB}$.

Uppgift 9 (6p). Formulera och bevisa integralkriteriet för positiva och avtagande serier.

Lösning. Se kurslitteraturen