Uppgift 1 (9p). Låt $\mathcal{P}_3$ vara det linjära rummet bestående av polynom av grad mindre eller lika med 3. För $p \in \mathcal{P}_3$, låt Ap $(= A(p))$ vara funktionen definierad

$$Ap(t) = p(1) + (t-1)p'(1) + \frac{1}{2}(t-1)^2 p''(1)$$

(**A**) Visa att A är en linjär operator från $\mathcal{P}_3$ till $\mathcal{P}_3$. *(3p)*

(**B**) Välj en lämplig bas för $\mathcal{P}_3$, och bestäm matrisen för A med avseende på denna bas. *(3p)*

(**C**) Finn alla *polynom* $p \in \mathcal{P}_3$ som löser ekvationen

$$Ap = 1.$$ *(3p)*

Lösning.

(**A**) Då Ap är ett polynom av grad mindre eller lika med 2 för en godtycklig två gångar deriverbar funktion p, så A avbildar $\mathcal{P}_3$ till $\mathcal{P}_3$. Enligt definitionen så är A linjär om

(i) $A(ap) = aA(p)$ för all $a \in \mathbb{R}$ och $p \in \mathcal{P}_3$.

(ii) $A(p+q) = A(p) + A(q)$ för alla $p, q \in \mathcal{P}_3$.

eller ekvivalent med (i) + (ii):

(iii) $A(ap+q) = aA(p) + A(q)$ för all $a \in \mathbb{R}$ och $p, q \in \mathcal{P}_3$.

Visar nu (iii). Låt $a \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathcal{P}_3$ Då har vi

$$\begin{aligned}
A(ap+q)(t) &= a(ap+q)(1) + (t-1)(ap+q)'(1)\frac{1}{2}(t-1)^2(ap+q)''(1) \\
&= a\Big(p(1) + (t-1)p'(1) + \frac{1}{2}(t-1)^2 p''(1)\Big) \\
&\qquad + q(1) + (t-1)q'(1) + \frac{1}{2}(t-1)^2 q''(1) \\
&= aAp(t) + Aq(t) = (aAp + Aq)(t).
\end{aligned}$$

Detta visar att $A(ap+q) = aAp + Aq$, så $A\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ är linjär.

(**B**) Som bas för $\mathcal{P}_3$ kan vi välja $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$, där $p_k(t) = (t-1)^k$, dvs

$$p_0(t) = 1, \qquad p_1(t) = t-1, \qquad p_2(t) = (t-1)^2, \qquad p_3(t) = (t-1)^3.$$

Notera att Ap är Taylor-polynomet av grad 2 till p, så $Ap = p$ om p är et poynom av grad mindre eller lika med 2. Vi har då

$$\begin{aligned}
Ap_0(t) &= p_0(t) \\
Ap_1(t) &= p_1(t) \\
Ap_2(t) &= p_2(t) \\
Ap_3(t) &= \frac{1}{2}(t-1)^2 \underbrace{p_3''(1)}_{=0} = 0.
\end{aligned}$$

Detta ger följande matris for A:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(**C**) Löser först $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, där $\boldsymbol{b}$ er representationen av den konstanta funktionen $1 = p_0$, som ger $\boldsymbol{b} = (1, 0, 0, 0)$. Systemet som vi löser är alltså

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och då $\mathbf{A}$ är redan på diagonal form innsees omedelbart att lösningen är

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} \quad \text{för godtyckliga } c \in \mathbb{R}.$$

Polynomen som lösar $Ap = 0$ är då

$$\begin{aligned} p(t) &= x_0 p_0(t) + x_1 p_1(t) + x_2 p_2(t) + x_3 p_3(t) \\ &= p_0(t) + c p_3(t), \\ &= 1 + c(t-1)^3, \qquad c \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Uppgift 2 (9p). Låt $\mathcal{P}_n$ vara rummet av polynom av grad $\leq n$, och låt

(1) $$(p, q) = p(0)q(0) + \int_0^\infty p'(x)q'(x)e^{-x}\,dx$$

(**A**) Formulera definitionen för en inre produkt (skalärprodukt). Visa att (1) definierar en inre produkt på $\mathcal{P}_n$ för alla $n \geq 0$ (här är det tillräckligt att visa positivitetsvillkoren). *(3p)*

(**B**) Använd Gram-Schmidt metoden för att bestämma en ortogonal bas (med avseende på (1)) för $\mathcal{P}_2$. Följande ekvation kan användas.

$$\int_0^\infty x^m e^{-x}\,dx = m! \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$ *(3p)*

(**C**) Beräkna polynomet $p \in \mathcal{P}_2$ som minimerar avståndet til $f(x) = 1 + x^3$ med avseende på den inre produkten (1). Alltså, betäm $p \in \mathcal{P}_2$ så att

$$\|f - p\| \leq \|f - q\| \qquad \forall q \in \mathcal{P}_2,$$

där normen bestäms av den inre produkten: $\|q\| = \sqrt{(q, q)}$. *(3p)*

Lösning.

(**A**) Enligt definitionen är (p, q) et inre produkt om följande är uppfyld:

(i) $(p, q) = (q, p)$ för alla $p, q \in \mathcal{P}_2$

(ii) $(ap, q) = a(p, q)$ för alla $a \in \mathbb{R}$ och alla $p, q \in \mathcal{P}_2$

(iii) $(p_1 + p_2, q) = (p_1, q) + (p_2, q)$ för alla $p_1, p_2, q \in \mathcal{P}_2$

(iv) $(p, p) \geq 0$ för alla $p \in \mathcal{P}_2$ och $(p, p) = 0$ endast om $p = 0$.

Det är klart att (i)–(iii) gäller, så det står kvar att visa (iv). Låt $p \in \mathcal{P}_2$. Vi har

$$(p, p) = p(0)^2 + \int_0^\infty p'(x)^2\,dx \geq 0.$$

För $(p, p) = 0$ krävs $p'(x) = 0$ för alla x, så p måste vara konstant, och $p(0) = 0$, så $p(x) = p(0) = 0$ för alla x. Alltså, $p = 0$.

(**B**) Väljer en bas $\{p_0, p_1, p_2\}$ för $\mathcal{P}_3$, definierad som

$$p_0(x) = 1, \qquad p_1(x) = x, \qquad p_2(x) = x^2.$$

En ortogonal bas $\{b_0, b_1, b_2\}$ bestäms genom att ortogonalisera basen $\{p_0, p_1, p_2\}$ med Gram-Schmidt. Vi börjar med $b_0(x) = p_0(x) = 1$, och beräknar

$$(b_0, b_0) = (1, 1) = 1 \cdot 1 + 0 = 1.$$
$$(b_0, p_1) = (1, x) = 1 \cdot 0 + 0 = 0.$$

Detta ger

$$b_1(x) = p_1(x) - \frac{(p_1, b_0)}{(b_0, b_0)} b_0(x) = p_1(x) = x.$$

Fär att beräkna b_2 behövs

$$(b_1, b_1) = (x, x) = 0 \cdot 0 + 0! = 1$$
$$(b_0, p_2) = (1, x^2) = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 0 = 0$$
$$(b_1, p_2) = (x, x^2) = 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1! = 2,$$

vilket ger

$$\begin{aligned} b_2(x) &= p_2(x) - \frac{(p_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1(x) - \frac{(p_2, b_0)}{(b_0, b_0)} b_0(x) \\ &= p_2(x) - 2p_1(x) = x^2 - 2x. \end{aligned}$$

Vår ortogonala bas för $\mathcal{P}_2$ är $\{b_0, b_1, b_2\}$ där

$$b_0(x) = 1, \qquad b_1(x) = x, \qquad b_2(x) = x^2 - 2x.$$

Denna basen är *inte* ortnormal, ty

$$(b_2, b_2) = 0 + \int_0^\infty (2x - 2)^2 \, dx = 4 \cdot 2! - 8 \cdot 1! + 4 \cdot 0! = 4.$$

(C) Avståndet minimeras av den ortogonala projektionen av f på $\mathcal{P}_2$. Vi bestämmer projektionen med den ortogonala bases från (b). Låt p vara projektionen av f. Vi har då

(*) $$p = \frac{(b_0, f)}{(b_0, b_0)} b_0 + \frac{(b_1, f)}{(b_1, b_1)} b_1 + \frac{(b_2, f)}{(b_2, b_2)} b_2$$

Vi behöver beräkna

$$(b_0, f) = (1, 1 + x^3) = 1 + 0$$
$$(b_1, f) = (x, 1 + x^3) = 0 + 3 \cdot 2! = 6$$
$$(b_2, f) = (x^2 - 2x, 1 + x^3) = (x^2, x^3) - 2(x, x^3) = 0 + 6 \cdot 3! - 12 = 24.$$

och vi har $(b_2, b_2) = 4$ från (b). Innsättning i (*) ger nu

$$p(x) = 1 + 6b_1(x) + \frac{24}{4} b_2(x) = 1 - 6x + 6x^2.$$

Uppgift 3 (8p). Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar.

(A) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\arctan k}{\pi}\right)^k$ *(2p)*

(C) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ *(2p)*

(B) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ *(2p)*

(D) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k}{(\ln \ln k)^{\ln k}}$ *(2p)*

Lösning.

(A) Använder jämförelseskriteriet. Låt $a_k = (\arctan(k)/\pi)^k$ och låt $b_k = 1/2^k$. Då arctan är en begränsad funktion sådan att $0 < \arctan k <$

$\pi/2$ för alle $k > 0$,

$$0 < a_k = \left(\frac{\arctan k}{\pi}\right)^k < \left(\frac{\pi/2}{\pi}\right)^k = \frac{1}{2^k} = b_k$$

Serien konvergerar enligt jämförelseskriteriet då serien $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergerar.

Rotkriteriet fungerar också på denna serien. Till eksempel,

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{\arctan k}{\pi} \to \frac{1}{2} \text{ när } k \to \infty,$$

vilket visar at serien komvergerar.

(**B**) Serien är positiv, ty $\ln(1+\frac{1}{k}) > \ln(1) = 0$. Vi har

$$a_k = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = -\ln(k) + \ln(k+1).$$

Partialsummorna blir då

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ &= \underbrace{\ln 2 - \ln 2 + \ln 3 - \ln 3 \cdots + \ln n - \ln n}_{=0} + \ln(n+1) \end{aligned}$$

så $s_n = \ln(n+1) \to \infty$ när $n \to \infty$. Serien divergerar.

Kvot- och rotkriteriet ger ingen information om denna serien (båda gränsvärden är 1). Integraltesten kan användas då $a_{k+1} < a_k$, men det är inte så lätt att hitta primitiven. Istället kan vi använda partialintegration:

$$\begin{aligned} \int_1^n \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx &= \left[x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right]_{x=1}^{x=n} + \int_1^n \frac{1}{x+1}\, dx \\ &= \underbrace{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\to 1} - \ln(2) + \ln(n+1) - \ln 2 \to \infty \end{aligned}$$

när $n \to \infty$, vilket visar divergens. En tredje lösning är att jämföra med den divergenta serien $b_k = 1/k$:

$$\frac{a_k}{b_k} = k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k}_{\to e}\right) \to 1$$

när $n \to \infty$, vilket visar divergens ty $\sum_k b_k = \sum_k 1/k$ divergerar.

(**C**) Använder kvotkriteriet. Med $a_k = (k!)^2/(2k)!$, har vi

$$\begin{aligned} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{((k+1)!)^2(2k)!}{(k!)^2(2(k+1))!} \\ &= \frac{(k!(k+1))^2(2k)!}{(k!)^2(2k)!(2k+1)(2k+2)} \\ &= \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)} \longrightarrow \frac{1}{4} \quad \text{när} \quad k \to \infty. \end{aligned}$$

Serien konvergerar enligt kvotkriteriet ty gränsen $\lim_{k\to\infty} a_{k+1}/a_k$ existerar och är mindre enn 1.

Jämförelsekrieteriet kan också användas. Till exempel,

$$a_k = \frac{(k!)^2}{(2k)!} = \frac{k!}{(k+1)(k+1)\cdots(2k)}$$
$$= \frac{1}{k+1}\frac{2}{k+2}\underbrace{\frac{3}{k+3}\cdots\frac{k}{2k}}_{<1} < \frac{1}{k+1}\frac{2}{k+2} < \frac{2}{k^2}$$

vilket visar at serien konvergerar vid jämförelse med den konvergenta serien $\sum_k b_k = \sum_k 1/k^2$.

(**D**) Funktionen $\ln x$ är växande på $(0,\infty)$ och $\ln x \to \infty$ när $x \to \infty$. Det finns då $N \in \mathbb{N}$ så att $\ln\ln k \geq e^3$ när $k \geq N$. Låt

$$a_k = \frac{k}{(\ln\ln k)^{\ln k}} < \frac{k}{e^{3\ln k}} = \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}$$

där olikheten gäller för $k \geq N$. Då a_k är positiv innsees att $\sum_{k=3}^{\infty} a_k$ konvergerar enligt jämförelse med den konvergenta serien $\sum_{k=3}^{\infty} 1/k^2$.

Uppgift 4 (4p). Bestäm för vilka x följande serie konvergerar.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}(1-3x)^n.$$

Lösning. Serien är en potensserie, på standardformen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)$, med

$$a_n = \frac{n}{n+1}(-3)^n \qquad \text{och} \qquad x_0 = 1/3.$$

Bestämmer först konvergensradien för serien med rotkriteriet:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n3^n}{n+1}} = 3\sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} \longrightarrow 3 \quad \text{när} \quad n \longrightarrow \infty$$

som ger konvergensradien $R = 1/3$. Serient är sentrerad i $x = x_0 = 1/3$, och konvergerar då för alla x in intervall

$$(x_0 - R,\, x_0 + R) = (0,\, 2/3)$$

Det står kvar att avgöra om serien konvergar i gränspunkterna $x = 0$ och $x = 3/2$. För $x = 0$ och $x = 2/3$ får vi seriene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \qquad \text{och} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

som båda divergar då $\frac{n}{n+1} \to 1 \neq 0$ när $n \to \infty$. Serien konvergerar alltså om och endast om $x \in (0, 2/3)$.

Uppgift 5 (6p). Beräkna gränsen

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{e^x}{n}}\, dx.$$

Lösning. Låt f_n vara integranden

$$f_n(x) = \sqrt{1 + \frac{e^x}{n}},$$

och låt
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1.$$
Vill visa att f_n konvergar likformigt mot f.

Låt $x \in [0,1]$. Enligt Taylor's sats gäller (för $y \geq 0$)
$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2\sqrt{1+\theta y}}$$
för något $\theta \in (0,1)$ beroende på y. Detta ger (med $y = e^x/n$)
$$0 < f_n(x) - f(x) = \frac{e^x}{2n\sqrt{1+\theta\frac{e^x}{n}}} < \frac{e}{2n}$$
och
$$\max_{x\in[0,1]} \Big| f(x) - f_n(x) \Big| < \frac{e}{2n} \to 0,$$
vilket visar att $f_n \to f$ likformigt.

Då konvergensen är likformig kan vi byta om ordningen på integralen och gränsen:
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sqrt{1+\frac{e^x}{n}}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1.$$

Uppgift 6 (6p). Antag $f \in C^2([a,b])$ och låt πf vara den linjära interpolanten
$$\pi f(x) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b).$$
Härled följande felestimat.
$$|f(x) - \pi f(x)| \leq C(b-a)^2 \max_{a\leq\xi\leq b} |f''(\xi)| \qquad \forall x \in [a,b],$$
där C är en konstant oberoende av a, b och f.

Lösning. Se kurslitteraturen

Uppgift 7 (2p). Betrakta integralen

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\, dx. \tag{2}$$

Formulera sammansatta trapetsregeln med n (likformiga) delintervaller för integralet (2). Bestäm punkter och vikter, du behöver inte beräkna integralen.

Lösning. Den sammansatta trapetsregeln med n delintervall kan skrivas

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{k=0}^{n} f(x_k) w_k,$$

där

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k, \qquad k = 0, \dots, n$$

$$w_k = \begin{cases} \dfrac{b-a}{2n} & k = 0 \text{ eller } k = n \\ \dfrac{b-a}{n} & 0 < k < n \end{cases}$$

För (2) har vi $a = -1$, $b = 1$ och $b - a = 2$. Detta ger

$$x_k = -1 + \frac{2}{n}k = \frac{2k-n}{n}, \qquad k = 0, \dots, n$$

$$w_k = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & k = 0 \text{ eller } k = n \\ \dfrac{2}{n} & 0 < k < n \end{cases}$$

Uppgift 8 (10p). Betrakta följande randvärdesproblem

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{in } (0,1) \\ u'(0) = 1 \\ u'(1) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

där $f \in L^2([0,1])$. En motsvarande variationsformulering är:
Finn $u \in V$ så att

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\, dx = \int_0^1 f(x)v(x)\, dx - v(1) \qquad \forall v \in V, \tag{4}$$

där V är följande rum av testfunktioner,

$$V = \left\{ v \in C([0,1]) : \int_0^1 |v'(x)|^2 + |v(x)|^2\, dx < \infty \right\}.$$

(**A**) Härled variationsformuleringen (4) från randvärdesproblemet (3). *(3p)*
(**B**) Har randvärdesproblemet (3) entydiga lösningar? Motivera ditt svar. *(1p)*
(**C**) Antag att variationsproblemet (4) har lösningar för ett givet f. Visa att f uppfyller

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 1.$$ *(2p)*

Antag att randvärdesproblement (3) skall lösas med finita element metoden. Vi låter $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ vara en partition av intervallet $[0,1]$, och definierar $\{\phi_i\}_{i=0}^n$ som den vanliga CG_1 (kontinuerliga och styckvis linjära) basen sådan att

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Styvhetsmatrisen $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n+1\times n+1}$ och lastvektorn $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n+1}$ har värden

$$A_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) = \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_j'(x)\,dx$$
$$b_i = L(\phi_i) = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)\,dx - \phi_i(0).$$

FEM-lösnigen bestäms genom att lösa det linjära systemet

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{b}.$$

(**D**) Bestäm nollrummet och värderummet till styvhetsmatrisen $\boldsymbol{A}$. *(4p)*

Lösning. **NOTERA**: Det är et fel i uppgiften, det ska vara $v(0)$ istället för $v(1)$ i variationsformuleringen!

(**A**) Multiplisera differensialekvationen med $v \in V$ och integrera över intervallen $[0,1]$:

$$(*) \qquad \int_0^1 -u''v\,dx = \int_0^1 fv\,dx.$$

Använder partialintegration på vänster sida av likhetstecknet

$$\begin{aligned}\int_0^1 -u''v\,dx &= \int_0^1 u'v'\,dx - \Big[u'v\Big]_0^1 \\ &= \int_0^1 u'v'\,dx - \underbrace{u'(1)}_{=0}v(1) + \underbrace{u'(0)}_{=1}v(0) \\ &= \int_0^1 u'v'\,dx + v(0).\end{aligned}$$

Här används randvillkoren $u'(0) = 1$ och $u'(0) = 0$. Insättning i ($*$) ger nu

$$\underbrace{\int_0^1 u'v'\,dx}_{=a(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 f(x)v(x)\,dx - v(0),}_{=L(v)}$$

där sista termen har flyttats över från vänstersidan.

(**B**) Antag att u är en lösning till randvärdesproblemet (3) (för en given funktion f). Det inses lätt att även $u + c$ är en lösning för varje konstant c (notera att randvilkoren är av type Neumann). Problemet har *inte* entydiga lösningar!

(**C**) Antag att u är lösning till variationsformuleringen (4) för en given funtion f. Då gäller

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx - v(0)$$

för alla $v \in V$. Om vi väljer v till att vara den konstanta funktionen $v(x) = 1$ (som är i rummet V) har vi

$$0 = \int_0^1 u'(x)\cdot 0\,dx = a(u,1) = L(1) = \int_0^1 f(x)\,dx - 1,$$

alltså

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1.$$

(D) Låt $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ och

$$u = \xi_0\phi_0 + \cdots + \xi_n\phi_n.$$

Vi vet att $\xi_0 = \xi_1 = \cdots = \xi_n = 1$ om och endast om $u(x) = 1$ för alla $x \in [0, 1]$.

Bestämmer först nollrummet till **A**. Antag att $\boldsymbol{\xi}$ är i nollrummet till $\boldsymbol{A}$. Vi har då

$$0 = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} A_{ij}\xi_j\xi_j = \int_0^1 |u'(x)|\,dx,$$

så u är konstant. Omvänd inses lätt att $\boldsymbol{\xi}$ är i nollrummet till $\boldsymbol{A}$ om u är konstant (jämför med deluppgift **B**). Vi har då

$$N(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{\xi}_{\in}\mathbb{R}^{n+1} : \xi_0 = \xi_1 = \cdots = \xi_n\} = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right\}$$

Bestämmer nu värderummet $V(\boldsymbol{A})$ till $\boldsymbol{A}$. Om $\boldsymbol{b}$ är i $V(\boldsymbol{A})$, så finns $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ så att $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{b}$, i.e.

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi})_i = a(u, \phi_i) = L(\phi_i) = b_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

där $u = \xi_0\phi_0 + \cdots + \xi_n\phi_n$. Speciellt gäller

$$\sum_{i=0}^{n} b_i = \sum_{i=0}^{n} L(\phi_i) = L\Big(\sum_{i=0}^{n} \phi_i\Big) = L(1) = a(u, 1) = 0.$$

(Jämför med deluppgift **C**.) Enligt dimensionssatsen är $\dim N(\boldsymbol{A}) + \dim V(\boldsymbol{A}) = n+1$, så $\dim V(\boldsymbol{A}) = n$. Värderummet till $\boldsymbol{A}$ måste vara

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{A}) &= \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n+1} : \xi_0 + \cdots + \xi_n = 0\} \\ &= \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\-1\end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}\end{aligned}$$

Uppgift 9 (6p). Betrakta följanda underrum av $\mathbb{R}^{n\times n}$.

$$U = \{\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times n} : M_{ij} = 0 \text{ om } i > j\}$$
$$V = \{\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times n} : \boldsymbol{M}^T = -\boldsymbol{M}\}$$

Med andra ord, matriserna i U är på trappstegsform och matriserna i V är skevsymmetriska. Visa att

$$\mathbb{R}^{n\times n} = U \oplus V.$$

Lösning. Vi vet att $\mathbb{R}^{n\times n} = U \oplus V$ om och endast om $\mathbb{R}^{n\times n} = U + V$ och $U \cap V = \{\boldsymbol{0}\}$.

Visar först $U \cap V = \{\boldsymbol{0}\}$. Låt $\boldsymbol{M} \in U \cap V$. Vi har

$$M_{ij} = 0 \quad \text{för alla } i > j$$

ty $\boldsymbol{M} \in U$, så det står kvar att visa att $M_{ij} = 0$ för $u \le j$. Då $\boldsymbol{M} \in V$ har vi

$$\begin{aligned} M_{ij} &= -M_{ji} = 0 \qquad \text{om } i > j \\ M_{ii} &= -M_{ii}. \end{aligned}$$

Från sista ekvationen följer $M_{ii} = 0$. Vi har visat $M_{ij} = 0$ för alla i, j, så $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$ och $U \cap V = \{\boldsymbol{0}\}$.

Visar nu att $\mathbb{R}^{n\times n} = U + V$. Låt $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, och låt $\boldsymbol{M}' \in U$ vara matrisen

$$M'_{ij} = \begin{cases} M_{ij} & i \le j \\ 0 & i > j. \end{cases}$$

Vi har

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M} &= \boldsymbol{M}' + (\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}') \\ &= \underbrace{\boldsymbol{M}' + (\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}')^T}_{=\boldsymbol{M}_U} + \underbrace{(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}') - (\boldsymbol{M} - \boldsymbol{M}')^T}_{=\boldsymbol{M}_V} \end{aligned}$$

Vi har $\boldsymbol{M}_V^T = -\boldsymbol{M}_V$, så $\boldsymbol{M}_V \in V$. För $\boldsymbol{M}_U$ gäller

$$(*) \qquad (M_U)_{ij} = M'_{ij} + (M - M')_{ji} = \begin{cases} M_{ij} + M_{ji} & i < j \\ M_{ii} & i = j \\ 0 & i > j \end{cases}$$

vilket visar $\boldsymbol{M}_U \in U$. Ekvation $(*)$ visar nu att varje $\boldsymbol{M}$ kan skrivas som en summa av en matris från U och en matris från V, alltså $\mathbb{R}^{n\times n} = V + U$. Beviset är nu klart.

(*Skissa av alternativ lösning:* Visa att $U \cap V = \{\boldsymbol{0}\}$, $\dim U = \frac{1}{2}n(n+1)$ och $\dim V = \frac{1}{2}n(n-1)$. Det följer att $\dim U + \dim V = n^2 = \dim \mathbb{R}^{n\times n}$ så $U + V = \mathbb{R}^{n\times n}$.)