Matematisk fördjupning, TMA226, Lösningsförslag, 2019-06-08

1. För att $W_a = \{p \in V : p(1) = a\}$ skall utgöra underrum krävs att $p + q \in W_a$ och $\alpha p \in W_a$, för godtyckliga $p, q \in W_a$ och $\alpha \in \mathbb{R}$. Detta ger villkoren

$$\begin{cases} (\alpha p)(1) = \alpha p(1) = \alpha a = a \\ (p+q)(1) = p(1) + q(1) = 2a = a \end{cases}$$

med den entydiga lösningen $a = 0$.

För $a = 0$ är $W_0 = \{p \in V : p(1) = 0\}$ och för $p \in W_0$ är alltså $p(1) = a_0 + a_1 + a_2 = 0$

$$\Rightarrow \quad p(t) = -(a_1 + a_2) + a_1 t + a_2 t^2 = a_1(t-1) + a_2(t^2 - 1)\,.$$

$\therefore$ $W_0 = \text{Span}\{t-1, t^2-1\}$. Dessutom gäller med $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ att

$$\alpha(t-1) + \beta(t^2-1) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$

$\therefore$ $\{t-1, t^2-1\}$ linjärt oberoende. Alltså är $\{t-1, t^2-1\}$ bas för W_0 $\Rightarrow$ $\dim W_0 = 2$.

Svar: $a = 0$ och $\dim W_0 = 2$.

2. Vi noterar att $F(x) = x^2$ är jämn funktion

$$\Rightarrow \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx\, dx = 0 \quad , \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

För övriga Fourierkoefficienter har vi

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos kx\, dx = \{PI\} = \underbrace{\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{k}x^2 \sin kx\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{2}{k}x \sin kx\, dx = \{PI\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{k^2}x\cos kx\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2}{k^2}\cos kx\, dx = \frac{4}{k^2}\cos \pi k - \underbrace{\frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{k^3}\sin kx\right]_0^{\pi}}_{=0}$$

$$= \frac{4(-1)^k}{k^2} \quad , \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Alltså ges Fourierapproximationen av ordning n av

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\cos kx\,. \end{aligned}$$

Vi har då $f_0 = \frac{\pi^2}{3}$ och avståndet från f_0 till f ges av

$$||f - f_0|| = \left[\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^2 - \frac{\pi^2}{3}\right)^2 dx\right]^{1/2} = \left[\frac{8\pi^5}{45}\right]^{1/2} = \frac{2\sqrt{2}\pi^{5/2}}{3\sqrt{5}}$$

Fourierserien för f är

$$f \sim \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \cos kx\,.$$

Eftersom $f(x) = x^2$ är kontinuerlig på $[-\pi, \pi]$ och särskilt i $x = 0$ konvergerar Fourierserien i $x = 0$ med summa

$$f(0) = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}\,.$$

Svar: Fourierappriximationen är $f_n = \dfrac{\pi^2}{3} - 4\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \cos kx$, avståndet mellan f och f_0 är $||f - f_0|| = \dfrac{2\sqrt{2}\pi^{5/2}}{3\sqrt{5}}$ och $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

3. *Variationsformulering*: Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1(0,1)$ och integrera över intervallet $[0,1]$. Partialintegration ger

$$-\left[u'(x)v(x)\right]_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + 2\int_0^1 u'(x)v(x)dx = \int_0^1 \sin(\pi x)v(x)dx.$$

Med insättning av randdata $v(0) = v(1) = 0$ fås variationsformuleringen:
Hitta $u \in H_0^1(0,1)$ så att

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + 2\int_0^1 u'(x)v(x)dx = \int_0^1 \sin(\pi x)v(x)dx, \qquad \forall v \in H_0^1(0,1)$$

Motsvarande *finita element-problem* för en styckvis linjär finita element-approximation är:

Hitta $U \in V_h^0 = \{\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} : \varphi$ är kontinuerlig och styckvis linjär på $\mathcal{T}_h$, och $\varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$ så att

$$\int_0^1 U'(x)\varphi'(x)dx + 2\int_0^1 U'(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 \sin(\pi x)\varphi(x)dx, \qquad \forall \varphi \in V_h^0. \qquad (1)$$

Diskretisering: Vi ansätter $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x) + \xi_2\varphi_3(x)$ där

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{j-1}), & x \in [x_{j-1}, x_j) \\ \frac{1}{h}(x_j - x), & x \in [x_j, x_{j+1})\,, \\ 0, & \text{annars} \end{cases} \qquad j = 1,2,3$$

är hattfunktionerna svarande mot nodpunkterna $x_j = j/4$, $j = 1,2,3$.

Vi sätter in $U(x) = \xi_1\varphi_1(x)+\xi_2\varphi_2(x)+\xi_3\varphi_3(x)$ i (1) och väljer testfunktioner $\varphi = \varphi_i$, $i = 1, 2, 3$. Vi får då ekvationssystemet

$$(A + 2C)\,\xi = b,$$

där A är styvhetsmatrisen med element $A_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'\varphi_j' dx$, $i, j = 1, 2, 3$, och C är konvektionsmatrisen med element $C_{ij} = \int_0^1 \varphi_j'\varphi_i dx$, $i, j = 1, 2, 3$. b är högerledsvektorn med element $b_i = \int_0^1 \sin(\pi x)\varphi_i(x)dx$, $i = 1, 2, 3$ och $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ är lösningsvektorn.

För att beräkna b_i approximativt använder vi trapetsformeln på delintervallen $[x_{i-1}, x_i]$ och $[x_i, x_{i+1}]$ och får

$$\begin{aligned}
b_i &= \int_0^1 \sin(\pi x)\varphi_i(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin(\pi x)\frac{x - x_{i-1}}{h}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin(\pi x)\frac{x_{i+1} - x}{h}dx \\
&\approx \frac{h}{2}\Big(\sin(\pi x_{i-1})\frac{x_{i-1} - x_{i-1}}{h} + \sin(\pi x_i)\frac{x_i - x_{i-1}}{h}\Big) \\
&\qquad + \frac{h}{2}\left(\sin(\pi x_i)\frac{x_{i+1} - x_i}{h} + \sin(\pi x_{i+1})\frac{x_{i+1} - x_{i+1}}{h}\right) \\
&= h\sin(\pi x_i) = h\sin(\pi hi)
\end{aligned}$$

för $i = 1, 2, 3$.

Beräkning av matriselementen ger då (enligt kursboken)

$$\left(\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 2\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = h\begin{bmatrix} \sin(\pi h) \\ \sin(2\pi h) \\ \sin(3\pi h) \end{bmatrix},$$

eller, med $h = 1/4$,

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -5 & 8 & -3 \\ 0 & -5 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4\sqrt{2} \\ 1/4 \\ 1/4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(Lösningen är $\xi \approx (0.0598, 0.1004, 0.0849)^T$.)

4. Vi har $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} a_k$ med $a_k = \ln\left(\cos\frac{\pi}{k}\right)$. Serieutveckling ger

$$\cos\frac{\pi}{k} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{k}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right)$$

och

$$\begin{aligned}
a_k &= \ln\left(\cos\frac{\pi}{k}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{k}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right)\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{k}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{k}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right)\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^6}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{k}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right)
\end{aligned}$$

Notera $a_k = \ln\left(\cos\frac{\pi}{k}\right) < 0$ för $k = 3, 4, \ldots$ Studera den positiva serien $\sum_{k=3}^{\infty} b_k$ med

$$b_k = -a_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{k}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right).$$

Låt $c_k = \frac{1}{k^2}$. Då har vi att

$$\frac{b_k}{c_k} = \frac{\pi^2}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{2} > 0$$

Eftersom $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ är konvergent följer då från jämförelsekriteriet på gränsvärdesform att $\sum_{k=3}^{\infty} -\ln\left(\cos\frac{\pi}{k}\right)$ är konvergent. Därmed är också $\sum_{k=3}^{\infty} \ln\left(\cos\frac{\pi}{k}\right)$ konvergent. ■

5. Med $a_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}$ har vi

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}} = \underbrace{\frac{(k+2)-k}{(k+1)-(k-1)}}_{=1} \frac{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}}$$
$$= \frac{\sqrt{1+1/k}+\sqrt{1-1/k}}{\sqrt{1+2/k}+\sqrt{1}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

Enligt kvotformeln är då konvergensradien $R = 1$, d.v.s. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ absolut konvergent för $|x| < 1$ och divergent för $|x| > 1$. Återstår att undersöka $x = \pm 1$.

<u>$x = 1$:</u> $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}_{=b_k>0}$

$$b_k = \sqrt{k+1}-\sqrt{k-1} = \frac{(k+1)-(k-1)}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}} = \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}}$$
$$\geq \frac{2}{2\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{k+k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{k}} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots$$

Eftersom $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$ är divergent följer då från jämförelsekriteriet att $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ också är divergent.

<u>$x = -1$:</u> $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}_{=b_k>0}(-1)^k$

$$b_k = \sqrt{k+1}-\sqrt{k-1} = \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

och följden $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ är avtagande. Leibniz konvergenskriterium ger då att den alternerande serien $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(-1)^k$ konvergerar.

Svar: Absolut konvergent för $|x| < 1$, betingat konvergent för $x = -1$ och divergent för övriga x (d.v.s. $|x| > 1$ och $x = 1$).

6. Vi har

$$|f_k(x)| = k\left|\sin\frac{x}{k}\right| e^{-kx} \leq ke^{-kx} \leq ke^{-k} \quad \forall x \in [1, \infty)$$

eftersom e^{-kx} monotont avtagande på $[1, \infty)$ för alla $k = 1, 2, \ldots$ Vi studerar därför serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ med $a_k = ke^{-k}$.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+1}{k}\frac{e^k}{e^{k+1}} = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{k}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} < 1\,.$$

Kvorkriteriet medför då att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar. Alltså gäller

i) $|f_k(x)| \leq a_k$ för alla $x \in [1, \infty)$ och $k = 1, 2, \ldots$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar

Weierstrass Majorantsats medför då att funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} k \sin\left(\frac{x}{k}\right) e^{-kx}$ är likformigt konvergent på $[1, \infty)$. ∎

7. Se sats 1.10 i Gustafsson & Holmåker.

8. Se sats 3.11 i Asadzadeh, eller föreläsningsanteckningarna.