Matematisk fördjupning, TMA226, Lösningsförslag, 2019-08-22

1. För godtyckligt icke-trivialt polynom $p \in V$ gäller

$$\operatorname{grad}(pq) = \operatorname{grad} p + \operatorname{grad} q = \operatorname{grad} p + k$$

Alltså kan vi uttrycka $W_{n,k}$ som

$$W_{n,k} = \{p \in V : p \neq 0, \operatorname{grad} p \leq n-k\} \cup \{0\}$$

där $0(t) = 0 \in \mathbb{R}\,,\ \forall t \in \mathbb{R}$ är det triviala nollpolynomet. Vi har nu två möjliga fall:

$\underline{n \geq k}$: $W_{n,k} = \mathbb{P}_{n-k}$ vilket är ett vektorrum med samma punktvisa operationer som V och därför ett underrum av V. Dessutom har vi

$$\dim W_{n,k} = \dim \mathbb{P}_{n-k} = n-k+1\,.$$

$\underline{n < k}$: I detta fall är $\{p \in V : p \neq 0, \operatorname{grad} p \leq n-k\} = \emptyset$ vilket medför att $W_{n,k} = \{0\}$ är det triviala vektorrummet som bara innehåller nollpolynomet. Alltså är $W_{n,k}$ ett underrum av V och $\dim W_{n,k} = 0$.

Svar: $W_{n,k} = \begin{cases} n-k+1 & , \quad n \geq k \\ 0 & , \quad n < k \end{cases}$.

2. För att $\langle p,q\rangle$ skall vara skalärprodukt på V måste de definierande egenskaperna var uppfyllda. Låt $p,q,r \in V$ och $\alpha \in \mathbb{R}$ vara godtyckliga

i) $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 q(t)p(t)\mathrm{d}t = \langle q,p\rangle$

ii) $\langle \alpha p,q\rangle = \int_0^1 \alpha p(t)q(t)\mathrm{d}t = \alpha\int_0^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t = \alpha\langle p,q\rangle$

iii) $\langle p+q,r\rangle = \int_0^1 (p+q)(t)r(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 p(t)r(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 q(t)r(t)\mathrm{d}t = \langle p,r\rangle + \langle q,r\rangle$

iv) $(p(t))^2 \geq 0\,\forall t \in [0,1]$ vilket betyder att $\langle p,p\rangle = \int_0^1 (p(t))^2\mathrm{d}t \geq 0$ och $\langle p,p\rangle = 0 \Leftrightarrow p(t) = 0\,\forall t \in [0,1]$

$\therefore$ $\langle p,q\rangle$ definierar skalärprodukt på V.

Vi noterar att $\langle t^m, t^n\rangle = \int_0^1 t^{m+n}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{m+n+1}$ för $m,n \in \mathbb{N}$.

Låt nu $v_1 = 1\,,\ v_2 = t$ vara standardbasen för U. Gram-Schmidt ger då ON-bas

$$e_1' = v_1 = 1 \quad , \quad ||e_1'||^2 = \langle 1,1\rangle = 1$$

$$e_2' = v_2 - \frac{\langle v_2, e_1'\rangle}{||e_1'||^2}e_1' = t - \langle t,1\rangle = t - \frac{1}{2}$$

$$||e_2'||^2 = \langle t-\frac{1}{2}, t-\frac{1}{2}\rangle = \langle t,t\rangle - \langle t,1\rangle + \frac{1}{4}\langle 1,1\rangle = \frac{1}{12}$$

Alltså ges en ON-bas för U av

$$e_1 = \frac{e_1'}{||e_1'||} = 1 \quad , \quad e_2 = \frac{e_2'}{||e_2'||} = \sqrt{3}(2t-1)\,.$$

Slutligen ges ortogonalprojektionen av $v = t^2$ på U av

$$v' = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 = \langle t^2, 1 \rangle + 3(2t-1)\langle t^2, 2t-1 \rangle = t - \frac{1}{6}$$

Svar: En ON-bas för U ges av $e_1 = 1$, $e_2 = \sqrt{3}(2t-1)$ och projektionen av $v = t^2$ på U ges av $v' = t - \frac{1}{6}$.

3. *Variationsformulering*: Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1(0,1)$ och integrera över intervallet $[0,1]$. Partialintegration ger

$$-\left[u'(x)v(x)\right]_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 2xv(x)dx.$$

Med insättning av randdata $v(0) = v(1) = 0$ fås variationsformuleringen:
Hitta $u \in H_0^1(0,1)$ så att

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 2xv(x)dx, \qquad \forall v \in H_0^1(0,1)$$

Motsvarande *finita element-problem* för en styckvis linjär finita element-approximation är:

Hitta $U \in V_h^0 = \{\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} : \varphi$ är kontinuerlig och styckvis linjär på $\mathcal{T}_h$, och $\varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$ så att

$$\int_0^1 U'(x)\varphi'(x)dx + \int_0^1 U(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 2x\varphi(x)dx, \qquad \forall \varphi \in V_h^0. \tag{1}$$

Diskretisering: Vi ansätter $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x) + \xi_2\varphi_3(x)$ där

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{j-1}), & x \in [x_{j-1}, x_j) \\ \frac{1}{h}(x_{j+1} - x), & x \in [x_j, x_{j+1})\,, \qquad j = 1,2,3 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

är hattfunktionerna svarande mot nodpunkterna $x_j = j/4$, $j = 1,2,3$.

Vi sätter in $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x) + \xi_3\varphi_3(x)$ i (1) och väljer testfunktioner $\varphi = \varphi_i$, $i = 1,2,3$. Vi får då ekvationssystemet

$$(A + M)\,\xi = b,$$

där A är styvhetsmatrisen med element $A_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'\varphi_j' dx$, $i,j = 1,2,3$, och M är massmatrisen med element $M_{ij} = \int_0^1 \varphi_j\varphi_i dx$, $i,j = 1,2,3$. b är högerledsvektorn med element $b_i = \int_0^1 2x\varphi_i(x)dx$, $i = 1,2,3$ och $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ är lösningsvektorn.

Elementen b_i ges av

$$\begin{aligned}
b_i &= \int_0^1 2x\varphi_i(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} 2x\frac{x-x_{i-1}}{h}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} 2x\frac{x_{i+1}-x}{h}dx \\
&= \left[\frac{2x}{h}\frac{1}{2}(x-x_{i-1})^2\right]_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{2}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{1}{2}(x-x_{i-1})^2dx + \left[\frac{2x}{h}\cdot\frac{(-1)}{2}(x_{i+1}-x)^2\right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
&\qquad - \frac{2}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{(-1)}{2}(x_{i+1}-x)^2dx \\
&= hx_i - \frac{1}{3h}\left[(x-x_{i-1})^3\right]_{x_{i-1}}^{x_i} + hx_i - \frac{1}{3h}\left[(x_{i+1}-x)^3\right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
&= 2hx_i - \frac{h^2}{3} + \frac{h^2}{3} = 2hx_i = 2h^2 i
\end{aligned}$$

för $i = 1, 2, 3$.

Beräkning av matriselementen ger då (enligt kursboken)

$$\left(\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{h}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = h^2\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix},$$

eller, med $h = 1/4$,

$$\frac{1}{24}\begin{bmatrix} 196 & -95 & 0 \\ -95 & 196 & -95 \\ 0 & -95 & 196 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8 \\ 1/4 \\ 3/8 \end{bmatrix}$$

(Lösningen är $\xi \approx (0.0704\ 0.1137\ 0.1010)^T$.)

4. Vi studerar $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ med $a_k = \ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) - \frac{\alpha}{k}$, där $\alpha \in \mathbb{R}$. Serieutveckling ger

$$\begin{aligned}
a_k &= \ln\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{k}}\right) - \frac{\alpha}{k} = \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) - \frac{\alpha}{k} \\
&= \left\{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}\left(x^4\right)\right\} \\
&= \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right) - \left[-\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right)\right] - \frac{\alpha}{k} \\
&= \frac{2-\alpha}{k} + \frac{2}{3k^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right)
\end{aligned}$$

Dela upp analysen i tre fall:

<u>$\alpha < 2$:</u> $a_k = \frac{2-\alpha}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right) \Rightarrow \exists N > 2 : a_k > 0\,,\ k \geq N \Rightarrow \sum_{k=N}^{\infty} a_k$ positiv serie.

Låt $b_k = \frac{1}{k}$. Då har vi att

$$\frac{a_k}{b_k} = 2 - \alpha + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 2 - \alpha > 0$$

Eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent följer då från jämförelsekriteriet på gränsvärdesform att $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ är divergent.

$\underline{\alpha = 2:}$ $a_k = \frac{2}{3k^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right) \Rightarrow \exists N > 2 : a_k > 0\,,\ k \geq N \Rightarrow \sum_{k=N}^{\infty} a_k$ positiv serie.

Låt $b_k = \frac{1}{k^3}$. Då har vi att

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{2}{3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3} > 0$$

Eftersom $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ är konvergent följer då från jämförelsekriteriet på gränsvärdesform att $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ är konvergent.

$\underline{\alpha > 2:}$ $a_k = \frac{2-\alpha}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right) \Rightarrow \exists N > 2 : a_k < 0\,,\ k \geq N \Rightarrow \sum_{k=N}^{\infty} a_k$ negativ serie.

Samma argument som för $\alpha < 2$ applicerat på den positiva serien $-\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ ger att $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ är divergent.

Svar: Serien $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) - \frac{\alpha}{k}\right)$ konvergerar för $\alpha = 2$ och divergerar för $\alpha \neq 2$.

5. Med $a_k = \sqrt{\frac{4k+1}{k^2-1}}$ har vi

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \sqrt{\frac{(4k+5)(k^2-1)}{(4k+1)((k+1)^2-1)}} = \sqrt{\frac{4k^3 + \mathcal{O}(k)}{4k^3 + \mathcal{O}(k)}} \underset{k\to\infty}{=\longrightarrow} 1$$

Enligt kvotformeln är då konvergensradien $R = 1$, d.v.s. $\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k$ absolut konvergent för $|x| < 1$ och divergent för $|x| > 1$. Återstår att undersöka $x = \pm 1$.

$\underline{x = 1:}$ $\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\sqrt{\frac{4k+1}{k^2-1}}}_{=b_k>0}$

$$b_k = \sqrt{\frac{4k+1}{k^2-1}} \geq \sqrt{\frac{k+1}{k^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{k-1}} \geq \frac{1}{k^{1/2}}$$

Eftersom $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}}$ är divergent följer från jämförelsekriteriet att $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är divergent.

$\underline{x = -1:}$ $\quad \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\sqrt{\frac{4k+1}{k^2-1}}}_{=b_k>0}$

Vi har att

$$b_k = \sqrt{\frac{4k+1}{k^2-1}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

behöver undersöka om följden $\{b_k\}_{k=2}^{\infty}$ är avtagande. Låt därför $f(x) = \frac{4x+1}{x^2-1}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4(x^2-1) - 2x(4x+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x^2-2x-4}{(x^2-1)^2}$$

och alltså har vi $f'(x) < 0$ för $x \geq 2$. Eftersom $\sqrt{x}$ är en monotont växande funktion är följden $\{b_k\}_{k=2}^{\infty}$ därför avtagande. Leibniz konvergenskriterium ger då att den alternerande serien $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} b_k(-1)^k$ konvergerar.

Svar: Absolut konvergent för $|x| < 1$, betingat konvergent för $x = -1$ och divergent för övriga x (d.v.s. $|x| > 1$ och $x = 1$).

6. Med $f_n(x) = \sin(x)e^{-\sqrt{x}/n}$ är gränsfunktionen för följden $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sin(x)e^{-\sqrt{x}/n} = \sin(x)\ \forall x \in [0, \pi/4]\,.$$

Alltså har vi att

$$|f - f_n| = \left|\sin(x) - \sin(x)e^{-\sqrt{x}/n}\right| = \sin(x)\left(1 - e^{-\sqrt{x}/n}\right)$$

är strängt växande på $[0, \pi/4]$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \quad \max_{x\in[0,\pi/4]} |f - f_n| = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(1 - e^{-\sqrt{\pi}/2n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - e^{-\sqrt{\pi}/2n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0 : n > N \Rightarrow |f - f_n| < \varepsilon\ \forall x \in [0, \pi/4]$$

$\therefore$ $f_n \to f$ likformigt på $[0, \pi/4]$.

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/4} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Svar: $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/4} \sin(x)e^{-\sqrt{x}/n}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

7. Se sats 18.6 i Eriksson, Larsson & Wahde.

8. Se föreläsningsanteckningarna, eller separat blad på hemsidan.