Matematisk fördjupning, TMA226, Lösningsförslag, 2019-10-12

1. Eftersom U_k är icke-tom mängd utgör U_k underrum av $\mathbb{R}^4$ omm $u+v \in U_k$ och $\alpha u \in U_k$, för godtyckliga $u, v \in U_k$ och $\alpha \in \mathbb{R}$. Med

$$u = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ b_1+k \\ a_1+b_1+c_1 \\ c_1-a_1 \end{bmatrix} \quad , \quad v = \begin{bmatrix} a_2+b_2 \\ b_2+k \\ a_2+b_2+c_2 \\ c_2-a_2 \end{bmatrix}$$

har vi

$$u+v = \begin{bmatrix} (a_1+a_2)+(b_1+b_2) \\ (b_1+b_2)+2k \\ (a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2) \\ (c_1+c_2)-(a_1+a_2) \end{bmatrix} \quad , \quad \alpha u = \begin{bmatrix} (\alpha a)+(\alpha b) \\ (\alpha b)+\alpha k \\ (\alpha a)+(\alpha b)+(\alpha c) \\ (\alpha c)-(\alpha a) \end{bmatrix}$$

vilket medför att $u+v \in U_k$ och $\alpha u \in U_k$ omm $k=0$.

För $k=0$ har vi

$$U_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a+b \\ b \\ a+b+c \\ c-a \end{bmatrix} ; a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$$

med

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vidare gäller att

$$[v_1\, v_2\, v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ linjärt oberoende $\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ bas för $U_0 \Rightarrow \dim U_0 = 3$.

Svar: U_k underrum av $\mathbb{R}^4$ för $k=0$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ bas för U_0 och $\dim U_0 = 3$.

2. Vi noterar att $f(x) = |x|$ är jämn funktion. Alltså ges Fourierkoefficienterna av

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi} = \pi$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos kx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\, dx = \{PI\} \\ &= \frac{2}{\pi}\underbrace{\left[\frac{x}{k}\sin kx\right]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{k}\sin kx\, dx = -\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{k^2}\cos kx\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi k^2}\left(\cos(k\pi)-1\right) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi k^2} & , \quad k = 2m-1 \\ 0 & , \quad k = 2m \end{cases} \quad , \quad m = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\sin kx\,dx = 0 \quad , \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Projektionen av f på $\mathcal{F}_2$ ges av

$$\begin{aligned}
f_2 &= \frac{\langle |x|, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} + \frac{\langle |x|, \sin x\rangle}{\langle \sin x, \sin x\rangle}\sin x + \frac{\langle |x|, \cos x\rangle}{\langle \cos x, \cos x\rangle}\cos x \\
&+ \frac{\langle |x|, \sin 2x\rangle}{\langle \sin 2x, \sin 2x\rangle}\sin 2x + \frac{\langle |x|, \cos 2x\rangle}{\langle \cos 2x, \cos 2x\rangle}\cos 2x \\
&= \frac{a_0}{2} + b_1 \sin x + a_1 \cos x + b_2 \sin 2x + a_2 \cos 2x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x\,.
\end{aligned}$$

Avståndet i kvadrat mellan f och f_2 blir då

$$\begin{aligned}
||f - f_2||^2 &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(|x| - \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\cos x\right)^2 dx \\
&= 2\int_0^{\pi}\left(x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4} + \frac{16}{\pi^2}\cos^2 x + \frac{8}{\pi}x\cos x - 4\cos x\right) dx \\
&= \frac{\pi^3}{6} - \frac{16}{\pi}
\end{aligned}$$

där vi återigen använt att integranden är en jämn funktion och att

$$\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = \{PI\} = \underbrace{[x\sin x]_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi}\sin x\,dx = [\cos x]_0^{\pi} = -2$$

$$\int_0^{\pi}\cos x\,dx = [\sin x]_0^{\pi} = 0\,.$$

Slutligen ges Fourierserien för f av

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k \sin kx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\left((2k-1)x\right)\,.$$

Eftersom $f(x) = |x|$ är kontinuerlig på $[-\pi, \pi]$ och särskilt i $x = 0$ konvergerar Fourierserien i $x = 0$ med summa

$$f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

Svar: Projektionen av f på $\mathcal{F}_2$ är $f_2 = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\cos x$, avståndet mellan f och f_2 är $||f - f_0|| = \sqrt{\dfrac{\pi^3}{6} - \dfrac{16}{\pi}}$ och $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

3. *Variationsformulering*: Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1(0,1)$ och integrera över intervallet $[0,1]$. Partialintegration ger

$$-\left[u'(x)v(x)\right]_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + 2\int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 (2-x)v(x)dx.$$

Med insättning av randdata $v(0) = v(1) = 0$ fås variationsformuleringen:
Hitta $u \in H_0^1(0,1)$ så att

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx + 2\int_0^1 u(x)v(x)dx = \int_0^1 (2-x)v(x)dx, \qquad \forall v \in H_0^1(0,1)$$

Motsvarande *finita element-problem* för en styckvis linjär finita element-approximation är:

Hitta $U \in V_h^0 = \{\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} : \varphi$ är kontinuerlig och styckvis linjär på $\mathcal{T}_h$, och $\varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$ så att

$$\int_0^1 U'(x)\varphi'(x)dx + 2\int_0^1 U(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 (2-x)\varphi(x)dx, \qquad \forall \varphi \in V_h^0. \qquad (1)$$

Diskretisering: Vi ansätter $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x) + \xi_2\varphi_3(x)$ där

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - x_{j-1}), & x \in [x_{j-1}, x_j) \\ \frac{1}{h}(x_{j+1} - x), & x \in [x_j, x_{j+1}) \\ 0, & \text{annars} \end{cases}, \qquad j = 1,2,3$$

är hattfunktionerna svarande mot nodpunkterna $x_j = j/4$, $j = 1,2,3$.

Vi sätter in $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x) + \xi_3\varphi_3(x)$ i (1) och väljer testfunktioner $\varphi = \varphi_i$, $i = 1,2,3$. Vi får då ekvationssystemet

$$(A + 2M)\,\xi = b,$$

där A är styvhetsmatrisen med element $A_{ij} = \int_0^1 \varphi_i'\varphi_j'dx$, $i,j = 1,2,3$, och M är massmatrisen med element $M_{ij} = \int_0^1 \varphi_j\varphi_i dx$, $i,j = 1,2,3$. b är högerledsvektorn med element $b_i = \int_0^1 (2-x)\varphi_i(x)dx$, $i = 1,2,3$ och $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ är lösningsvektorn.

Elementen b_i ges av

$$\begin{aligned}
b_i &= \int_0^1 (2-x)\varphi_i(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (2-x)\frac{x - x_{i-1}}{h}dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} (2-x)\frac{x_{i+1} - x}{h}dx \\
&= \left[\frac{2-x}{h}\frac{1}{2}(x - x_{i-1})^2\right]_{x_{i-1}}^{x_i} + \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{2}(x - x_{i-1})^2 dx + \left[\frac{2-x}{h} \cdot \frac{(-1)}{2}(x_{i+1} - x)^2\right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
&\qquad + \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(-1)}{2}(x_{i+1} - x)^2 dx \\
&= \frac{h}{2}(2 - x_i) + \frac{1}{6h}\left[(x - x_{i-1})^3\right]_{x_{i-1}}^{x_i} + \frac{h}{2}(2 - x_i) + \frac{1}{6h}\left[(x_{i+1} - x)^3\right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
&= h(2 - x_i) + \frac{h^2}{6} - \frac{h^2}{6} = h(2 - x_i) = h(2 - ih)
\end{aligned}$$

för $i = 1, 2, 3$.

Beräkning av matriselementen ger då (enligt kursboken)

$$\left(\frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 2\frac{h}{6}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = h\begin{bmatrix} 2-h \\ 2-2h \\ 2-3h \end{bmatrix},$$

eller, med $h = 1/4$,

$$\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 100 & -47 & 0 \\ -47 & 100 & -47 \\ 0 & -47 & 100 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/16 \\ 3/8 \\ 5/16 \end{bmatrix}$$

(Lösningen är $\xi \approx (0.1260\ 0.1564\ 0.1110)^T$.)

4. Vi noterar först att $a_n > 0$ för $n \geq 2$. Låt

$$f(x) = (x-1)^2 + 1\,,\ x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2(x-1)$$

Alltså gäller $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ samt $f'(x) < 0\,,\ x < 1$ och $f'(x) > 0\,,\ x > 1$, och följaktligen är $f(1) = 1$ ett globalt minimum för $f(x)$. Eftersom $a_{n+1} = f(a_n)$ gäller då att följden $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ är nedåt begränsad, $a_n \geq 1$, men ej uppåt begränsad.

Betrakta nu för $n \geq 2$

$$a_{n+1} - a_n = (a_n - 1)^2 + 1 - a_n = a_n^2 - 3a_n + 2 = (a_n - 2)(a_n - 1)$$

Alltså gäller att

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = 0 & , \quad a_n = 1, 2 \\ a_{n+1} - a_n < 0 & , \quad 1 < a_n < 2 \\ a_{n+1} - a_n > 0 & , \quad a_n > 2 \end{cases}$$

Eftersom $a_{n+1} - a_n < 0$ för $1 < a_n < 2$ och följden också begränsas nedåt av $a_n \geq 1$ avgörs alltså konvergensegenskaperna av a_2. Från $a_2 = f(b) = (b-1)^2 + 1$ följer

$$\begin{cases} a_2 = 1 & \Leftrightarrow \quad b = 1 \\ 1 < a_2 < 2 & \Leftrightarrow \quad 0 < |b-1| < 1 \\ a_2 = 2 & \Leftrightarrow \quad b = 0, 2 \\ a_2 > 2 & \Leftrightarrow \quad b < 0\,,\ b > 2 \end{cases}$$

Vi har alltså följande möjliga fall för olika värden på b:

$\underline{b = 1:}$ $\{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \{1, 1, 1, \ldots\}$ konvergent med gränsvärde $a = 1$.

$\underline{0 < |b-1| < 1:}$ $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ konvergent ty avtagande och nedåt begränsad. Gränsvärdet a ges av $a = (a-1)^2 + 1 \Rightarrow a = 1$.

$\underline{b = 0, 2:}$ $\{a_n\}_{n=2}^{\infty} = \{2, 2, 2, \ldots\}$ konvergent med gränsvärde $a = 2$.

$\underline{b < 0\,,\ b > 2:}$ $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ divergent ty växande men ej uppåt begränsad.

Svar: Följden $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerar för $b \in [0, 2]$ med gränsvärde $a = 1$ för $b \in (0, 2)$ och gränsvärde $a = 2$ för $b = 0, 2$.

5. Med $a_k = \frac{1}{\ln(k+1)}$ har vi (för $k \geq 2$)

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\ln(k+2)}{\ln(k+1)} = \frac{\ln k + \ln\left(1+\frac{2}{k}\right)}{\ln k + \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{\ln k}\ln\left(1+\frac{2}{k}\right)}{1 + \frac{1}{\ln k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$$

Enligt kvotformeln är då konvergensradien $R = 1$, d.v.s. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ absolut konvergent för $|x| < 1$ och divergent för $|x| > 1$. Återstår att undersöka $x = \pm 1$.

$\underline{x = 1:}$ $\quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\ln(k+1)}}_{=b_k>0}$

Vi har

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(k+1)}{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists m \in \mathbb{N} : k > \ln(k+1)\,,\ \forall k \geq m$$

$$\Rightarrow \quad b_k = \frac{1}{\ln(k+1)} > \frac{1}{k}\,,\ \forall k \geq m$$

Eftersom $\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k}$ är divergent följer då från jämförelsekriteriet för positiva serier att $\sum_{k=m}^{\infty} b_k$ också är divergent.

$\underline{x = -1:}$ $\quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \underbrace{\frac{1}{\ln(k+1)}}_{=b_k>0}$

Eftersom $\ln(k+1)$ är växande och $\ln(k+1) \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ gäller att följden $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ är avtagande med $b_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Leibniz konvergenskriterium ger då att den alternerande serien $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ konvergerar.

Svar: Absolut konvergent för $|x| < 1$, betingat konvergent för $x = -1$ och divergent för övriga x (d.v.s. $|x| > 1$ och $x = 1$).

6. Vi har $f_k(x) = \frac{1}{x^2} e^{-k/x}\,,\ x > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{df_k}{dx} = \frac{1}{x^3}\left(\frac{k}{x} - 2\right) e^{-k/x}$

Alltså gäller $\frac{df_k}{dx} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k}{2}$ samt $f_k \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ samt $f_k \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

$\Rightarrow f_k\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{4}{k^2} e^{-2}$ globalt max på $(0, \infty)$ för $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\Rightarrow \quad |f_k(x)| \leq \frac{4}{k^2} e^{-2} < \frac{4}{k^2} \quad \forall x \in (0, \infty)\,,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Med $a_k = \frac{4}{k^2}$ konvergerar serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Alltså gäller

i) $|f_k(x)| \leq a_k$ för alla $x \in (0,\infty)$ och $k = 1, 2, \ldots$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar

Weierstrass Majorantsats medför då $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} e^{-k/x}$ likformigt konvergent på $(0,\infty)$

$\Rightarrow f(x)$ kontinuerlig på $(0,\infty)$ ty $f_k(x)$ kontinuerlig på $(0,\infty)$ för $k = 1, 2, 3, \ldots$ ■

7. Se lemma 2.2 och sats 2.7 i Gustafsson & Holmåker.

8. Se sats 19.11 i Eriksson, Larsson & Wahde.