MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen i Matematisk fördjupning för Kf, TMA226, 2014-06-02, TID(8.30-12.30)

Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Jakob Hultgren, 0703-088304

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Låt V beteckna vektorrummet av alla polynom av grad högst 3 på $\mathbb{R}$ med reella koefficienter och med den vanliga punktvisa additionen och multiplikationen med reella tal. Avgör för vilka positiva heltal n som

$$U = \{p \in V : (p(-1))^n = p(1)\}$$

bildar ett underrum i V.

(5p)

2. Låt V vara som i föregående uppgift och låt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ beteckna den avbildning som ges av

$$\langle p, q \rangle = \Sigma_{k=0}^{3}\, p(k)q(k) \quad p, q \in V.$$

Visa att denna avbildning definierar en skalärprodukt på V. Låt vidare W beteckna underrummet i V (med skalärprodukten ovan) bestående av alla polynom av grad högst 1. Bestäm en ON-bas för W. Utgå t.ex. från $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ och använd Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod.

(9p)

3. Härled variationsformulering och finita element-formulering, samt beräkna styvhets- och massmatris och högerledsvektor för den styckvis linjära finita element-approximationen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -2u''(x) + \dfrac{1}{2}u(x) = 1, & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0,1]$ med steglängd $h = 1/4$. Formulera det resulterande linjära ekvationssystemet (lösningen behöver ej beräknas). Beräkningen av integralerna i matriserna behöver ej redovisas i detalj om resultatet är känt.

(8p)

4. Bestäm för vilka $a > 0$ som den positiva serien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} a^{\ln k}$$

konvergerar.

(7p)

5. För vilka reella tal x är serien

$$\Sigma_{k=2}^{\infty} \frac{3^k}{k \ln k} x^k$$

absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent?

(8p)

6. Visa att funktionsserien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} x^k e^{-kx}$$

är likformigt konvergent på $[0, \infty)$.

(7p)

7. Visa att för den linjära interpolanten $\pi_1 f$ av en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion f på intervallet $[a, b]$ finns en konstant C så att

$$\|\pi_1 f - f\|_{L^\infty(a,b)} \leq C(b-a)^2 \|f''\|_{L^\infty(a,b)}.$$

(8p)

8. Formulera och bevisa integralkriteriet för positiva serier.

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK