MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen i Matematisk fördjupning för Kf, TMA226, 2015-05-30,
TID(8.30-12.30)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Gustav Kettil, 0703-088304

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Låt V beteckna vektorrummet av alla polynom (med reella koefficienter) av grad högst 4 på intervallet $[0,1]$ med den vanliga punktvisa additionen och multiplikationen med reella tal. Låt q beteckna polynomet x^2. Visa att

$$M = \{p \in V : pq \in V\}$$

är ett underrum till V samt bestäm dimensionen för detta underrum.

(6p)

2. Låt V vara samma reella vektorrum som i uppgift 1. Sätt

$$\langle p, \tilde{p} \rangle = \Sigma_{k=0}^{4}\, p(\frac{k}{4})\tilde{p}(\frac{k}{4}), \quad p, \tilde{p} \in V.$$

Visa att $\langle p, p \rangle = 0$ medför att p är nollelementet i V. Bestäm en ON-bas för underrummet M i uppgift 1 med anseende på denna skalärprodukt[1] $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(8p)

3. Härled variationsformulering och finita element-formulering, samt beräkna styvhets- och konvektionsmatris och högerledsvektor för den styckvis linjära finita element-approximationen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -4u''(x) + u'(x) = 1, & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0,1]$ med steglängd $h = 1/3$. Formulera det resulterande linjära ekvationssystemet (lösningen behöver ej beräknas). Beräkningen av integralerna i matriserna behöver ej redovisas i detalj om resultatet är känt.

(8p)

[1] Det behöver inte visas att $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definierar en skalärprodukt på V.

4. Är serien $\Sigma_{k=0}^{\infty} a_k$, där

$$a_k = \int_{k+1}^{k+2} \frac{\ln x}{x}\, dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

konvergent eller divergent?

(5p)

5. Sätt

$$a_k = (-1)^k \frac{\ln k}{k^2}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

För vilka reella tal x är serien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent?

(9p)

6. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^n - 1) \cos(nx)\, dx.$$

Motivera väl!!!

(8p)

7. Låt $u \in H_0^1(0,1)$ vara lösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

och $U \in V_h^0$ motsvarande styckvis linjära finita element-approximation på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0,1]$ med steglängd h, där

$$V_h^0 = \{\varphi : \varphi \text{ är kontinuerlig och styckvis linjär på } \mathcal{T}_h, \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}.$$

Visa att

$$\|u - U\|_E \le \|u - \varphi\|_E, \qquad \forall \varphi \in V_h^0,$$

där $\|f\|_E = \left(\int_0^1 |f'(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ är energinormen.

(8p)

8. Formulera och bevisa Leibniz konvergenskriterium för alternerande serier.

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK