MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen i Matematisk fördjupning för Kf, TMA226, 2016-04-09, TID(8.30-12.30)
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Anders Martinsson, ankn 5325

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För godkänt krävs minst 24 poäng sammanlagt.

---

1. Låt V beteckna vektorrummet av alla polynom (med reella koefficienter) av grad högst 4 på intervallet $[0, 1]$ med den vanliga punktvisa additionen och multiplikationen med reella tal. Låt p_2 beteckna polynomet x^2. Visa att

$$U = \{p \in V : pp_2 \in V\}$$

är underrum till V samt bestäm dess dimension.

(7p)

2. Låt V vara samma reella vektorrum som i uppgift 1 med skalärprodukten

$$\langle p, \tilde{p} \rangle = \Sigma_{k=0}^{4} \, p(\frac{k}{4})\tilde{p}(\frac{k}{4}), \quad p, \tilde{p} \in V.$$

Att $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definierar en skalärprodukt behöver inte visas. Låt W beteckna det underrum i V som spänns av p_0 och p_1, där $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$. Bestäm en ON-bas för W samt bestäm ortogonalprojektionen av $p_2(x) = x^2$ på W.

(7p)

3. Härled variationsformulering och finita element-formulering, samt beräkna styvhets- och konvektionsmatris och högerledsvektor för den styckvis linjära finita element-approximationen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -u''(x) + 3u'(x) = 1, & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0, 1]$ med steglängd $h = 1/4$. Formulera det resulterande linjära ekvationssystemet (lösningen behöver ej beräknas). Beräkningen av integralerna i matriserna behöver ej redovisas i detalj om resultatet är känt.

(8p)

4. Är serien $\Sigma_{k=2}^{\infty} a_k$, där

$$a_k = \ln(\frac{k+1}{k-1}), \quad k = 2, 3, 4, \ldots,$$

konvergent eller divergent?

(5p)

5. Sätt

$$a_k = \frac{1}{\ln(k+1)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

För vilka reella tal x är serien

$$\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent?

(9p)

6. Visa att

$$\lim_{x \to 1} \Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{kx^2}{k^3 + x^2} = \Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3 + 1}.$$

Motivera väl!!!

(8p)

7. Låt $u \in H_0^1(0,1)$ vara lösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

och $U \in V_h^0$ motsvarande styckvis linjära finita element-approximation på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0,1]$ med steglängd h, där

$$V_h^0 = \{\varphi : \varphi \text{ är kontinuerlig och styckvis linjär på } \mathcal{T}_h, \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}.$$

Visa att

$$\|u - U\|_E \leq \|u - \varphi\|_E, \qquad \forall \varphi \in V_h^0,$$

där $\|f\|_E = \left(\int_0^1 |f'(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ är energinormen.

(8p)

8. Formulera och bevisa integralkriteriet för positiva serier.

(8p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan hos föreläsaren kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! PK