Matematiska vetenskaper | Datum: 2017-06-03 | Tid: 08:30-12:30
Chalmers | Hjälpmedel: Skrivdon.
Johan Björklund | Telefonvakt: Caroline Granfeldt | Tel.: ankn 5325

Tentamen i TMA226

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Tentan har maximalt 60 poäng, därtill kommer poäng från redovisningsuppgifter (max 3 poäng). Betygsgränserna är 24/36/48.

1. På denna uppgift ska enbart svar ges. Två poäng per deluppgift.

   a) Låt f vara en linjär avbildning från vektorrummet V till vektorrummet W så att $\dim V = 7$ och f är surjektiv. Dessutom så vet vi f:s nollrum har dimension 3. Vad är dimensionen för W?

   b) Beräkna konvergensradien för potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$.

   c) Vi definierar en skalärprodukt på $\mathbb{R}^2$ så att $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + 3x_2y_2$. Beräkna normen av vektorn $(-1, 2)$ med avseende på denna skalärprodukt.

   d) Använd Simpsons enkla regel för att beräkna integralen

   $$\int_0^1 \sin^3(2\pi x)dx$$

8p

2. Varje påstående ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger $1.5p$, fel svar ger $-1.5p$ (inget svar ger $0p$). Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   a) Om talföjden a_k är begränsad ovanifrån och talföljden b_k är begränsad underifrån så måste talföljden $c_k = a_k + b_k$ vara begränsad både underifrån och ovanifrån.

   b) Om vektorn v är ortogonal mot u och u är ortogonal mot w så är v ortogonal mot w.

   c) Om serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar mot A så kan vi bestämma vad talföljden a_k går mot när k går mot ∞.

   d) Om en potensserie (centrerad i 0) konvergerar för $x = a$ så konvergerar den även för $x = \frac{a}{2}$.

   e) Antag att f och g är två linjära funktioner från vektorrummet V till V. Då är $f(g(x)) = g(f(x))$ för alla x.

   f) Funktionerna $f(x) = -x^2 + 1$, $g(x) = \sin(\pi x)$ och $h(x) = x$ tillhör testrummet $H_0^1([-1, 1]) = \{\int_{-1}^{1} |v(x)|dx + \int_{-1}^{1} |v'(x)|dx < \infty; v(-1) = v(1) = 0\}$.

9p

3. Vi vet att rummet av kontinuerliga funktioner f från intervallet $[-\pi, \pi]$ till $\mathbb{R}$ bildar ett vektorrum. Vi definierar skalärprodukten $< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. Ge dimensionen för och en ortogonal (dock ej nödvändigtvis normerad) bas för underrummet som spänns upp av vektorerna $x, \cos x, x^3$ och $x - \cos x$.

7p

4. Bestäm vilka av följande serier som konvergerar.

   a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+k}{k^3+1}$

   b) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}$

   c) $\sum_{k=1}^{\infty} k \sin\left(\frac{1}{k}\right) \cos\left(\frac{1}{k}\right)$

   d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^k k}{k\sqrt{k}}$

8p

5. Låt V vara vektorrummet som består av polynom i x och låt a, b, c vara reella tal. Låt M vara en delmängd i V bestående av de polynom $p(x)$ så att $\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{x^3} = a$ och $bp(c) = 0$. För vilka värden på a, b, c bildar M ett underrum? Ange för varje sådan taltrippel a, b, c underrummets dimension.

6p

6. Härled variationsformulering och finita element-formulering, samt beräkna styvhets och massmatris och högerledsvektor för den styckvis linjära finita element-approximationen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -2u'' + u' = 2; \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

   på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0, 1]$ med steglängd $h = 1/3$. Formulera det resulterande linjära ekvationssystemet (lösningen behöver ej beräknas).

8p

7. Givet ett udda heltal n så definierar vi $n!!$ (kallad semifakultet) som $n!! = n(n-2)(n-4)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3\cdot 1$ (det är alltså skillnad på $n!!$ och $(n!)!$). Exempelvis så är $7!! = 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1 = 105$. Bestäm för vilka x som följande serie konvergerar.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-2)^n}{(2n-1)!!}$$

6p

8. Vi säger att en talföljd a_k är en Cauchyföljd om det för varje $\epsilon > 0$ existerar ett N så att om $n > N$ och $m > N$ så är $|a_n - a_m| < \epsilon$. Visa att varje konvergent talföljd är en Cauchyföljd.

8p