Matematiska vetenskaper
Chalmers
Johan Björklund

Datum: 2017-08-21 Tid: 08:30-12:30
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Gustav Kettil Tel.: ankn 5325

Tentamen i TMA226

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Tentan har maximalt 60 poäng, därtill kommer poäng från redovisningsuppgifter (max 3 poäng). Betygsgränserna är 24/36/48.

1. På denna uppgift ska enbart svar ges. Två poäng per deluppgift.

   a) Låt f vara en linjär avbildning från V till W så att $\dim W = 5$ och f är surjektiv. Dessutom så vet vi att $dim(N(f)) = 2$ (dvs dimensionen av nollrummet). Vad är dimensionen för V?

   b) Beräkna konvergensradien för potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

   c) Vi definierar en skalärprodukt på $\mathbb{R}^2$ så att $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + x_2y_2$. Beräkna normen av vektorn $(-2, 1)$.

   d) Använd "composite Midpoint rule" i två delinterval för att approximera integralen
   $$\int_{-1}^{1} x^2 dx.$$

8p

2. Varje påstående ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger $1.5p$, fel svar ger $-1.5p$ (inget svar ger $0p$). Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   a) Om talföljderna a_k och b_k båda är nedifrån begränsade så är talföljden $c_k = a_k + b_k$ också det.

   b) Om M är en linje i vektorrummet R^2 så är M ett linjärt underrum till R^2.

   c) Om $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är konvergenta (och $b_k > 0$) så är $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k}$ konvergent.

   d) Om en potensserie (centrerad i 0) konvergerar för $x = 3$ så konvergerar den även för $x = -2$.

   e) Om $a_k > b_k > 0$ och $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är divergent så är $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent.

   f) Två polynom av grad exakt n i x är lika om de antar samma värde i $n + 1$ olika punkter.

9p

3. Låt $\mathbb{R}^2$ ha skalärprodukten $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + y_1x_2 + 5x_2y_2$. Visa att det verkligen är en skalärprodukt och ge en ON bas för $\mathbb{R}^2$ med avseende på denna skalärprodukt.

7p

4. Bestäm vilka av följande serier som konvergerar.

   a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k - k}{2e^k + k}$

   b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

   c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^{1.1}}$

   d) $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{sink}{k})^k$

8p

5. Låt V vara vektorrummet som består av funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. För vilka positiva heltal n bildar delmängden M_n som består av funktioner f så att $f(x)^n = f(x^n)$ ett linjärt underrum?

6p

6. Härled variationsformulering och finita element-formulering, samt beräkna styvhets och massmatris och högerledsvektor för den styckvis linjära finita element-approximationen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -u'' + 6u = 1; \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0, 1]$ med steglängd $h = 1/3$. Formulera det resulterande linjära ekvationssystemet (lösningen behöver ej beräknas).

8p

7. Låt vektorrummet V bestå av alla linjära funktioner från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}$. Bestäm V:s dimension och ge en bas för vektorrummet.

6p

8. Lös ekvationen $\frac{3}{(1-x)} + \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{3}{(1-x)^3} + \ldots = 3x + 8$.

8p