Matematiska vetenskaper
Chalmers
Johan Björklund

Datum: 2017-10-07 Tid: 8:30-12:30
Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare.
Telefonvakt: Maximilian Thaller Tel.: ankn 5325

Tentamen i TMA226

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att räkningar och resonemang blir lätta att följa. Motivera dina svar. Tentan har maximalt 60 poäng, därtill kommer poäng från redovisningsuppgifter (max 3 poäng). Betygsgränserna är 24/36/48.

1. På denna uppgift ska enbart svar ges. Två poäng per deluppgift.

   a) Låt f vara en linjär avbildning från V till W så att dim $V = 9$, dim $W = 3$ och f är surjektiv. Vad är dimensionen för $f:s$ nollrum?

   b) Beräkna konvergensradien för potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$.

   c) Ge en bas för vektorrummet av polynom i x av grad högst 1 med egenskapen att $p(1) = 0$.

   d) Använd den enkla Trapezoidregeln för att approximera integralen

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx$$

8p

2. Varje påstående ska besvaras med sant eller falskt. Rätt svar ger $1.5p$, fel svar ger $-1.5p$ (inget svar ger $0p$). Man kan inte få mindre än 0 poäng på hela uppgiften.

   a) Om a_k är en övre begränsad talföljd och b_k är en nedre begränsad talföljd så är $c_k = a_k + b_k$ både övre och undre begränsad.

   b) Om f och g är linjära avbildningar från V till W så är $f + g$ en linjär avbildning från V till W.

   c) Om både $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ är konvergenta så är $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$.

   d) Det finns potensserier som konvergerar för alla värden på x.

   e) Låt V vara vektorrummet som består av alla funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Då bildar funktioner $f(x)$ sådana att $f(3) = 4$ ett linjärt underrum.

   f) Det linjära polynomet som interpolerar en funktion f vid punkterna $\{a, b\}$ med en lagrangisk interpolationsbas $\{\lambda_a(x), \lambda_b(x)\}$ kan vara annorlunda än polynomet som ges med den kanoniska basen $\{1, x\}$.

9p

3. Vi vet att rummet av alla funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ bildar ett vektorrum. Låt M vara underrummet så att $M = Span(\sin^2 x + \cos^2 x, \sin x, \cos x, 1 + \cos x, x, e^x)$. Bestäm $dimM$ och ge en bas för M.

7p

4. Bestäm vilka av följande serier som konvergerar.

   a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+\cos k}{k^4+\sin k}$
   b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
   c) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$
   d) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln k \cos(\pi k)}$

8p

5. Bestäm konvergensradie och konvergens på randen för följande potensserier:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(-2)^n n}$
   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

   Uttryck följande potensserier som en rationell funktion.

   c) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n}$
   d) $\sum_{n=0}^{\infty} (1+2^n) x^n$

6p

6. Härled variationsformulering och finita element-formulering, samt beräkna styvhets och högerledsvektor för den styckvis linjära finita element-approximationen till randvärdesproblem

$$\begin{cases} -u'' = 3; \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0,1]$ med steglängd $h = 1/3$. Formulera det resulterande linjära ekvationssystemet (lösningen behöver ej beräknas).

8p

7. Låt V vara vektorrummet som består av polynom i x. Låt M vara den delmängd av polynom så att $\lim_{x\to\infty} p(x+a) - p(x) = b$. För vilka värden på a, b är M ett linjärt underrum till V? För varje sådant par, ge dimensionen för underrummet.

6p

8. Antag att potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ har konvergensradie $R > 0$. Visa att potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$ också har konvergensradie R.

8p