Uppgift 1 (9p). Låt $\mathcal{P}_3$ vara det linjära rummet bestående av polynom av grad mindra eller lika med 3. För $p \in \mathcal{P}_3$, låt Ap $(= A(p))$ vara funktionen definierad som

$$Ap(t) = \frac{p(1+t) + p(1-t)}{2}.$$

(a) Visa at A är en linjär operator från $\mathcal{P}_3$ till $\mathcal{P}_3$. *(3p)*

(b) Välj en bas för $\mathcal{P}_3$, och bestäm matrisen för A med avseende på denna basen. *(3p)*

(c) Finn alla lösningar $p \in \mathcal{P}_3$ till ekvationen

$$Ap = 0.$$ *(3p)*

Uppgift 2 (9p). Låt $\mathcal{P}_n$ vara rummet av polynom av grad mindra eller lika med n, och låt

(1) $$(p, q) = \frac{1}{2}\big(p(1) - p(0)\big)\big(q(1) - q(0)\big) + \frac{1}{2}\big(p(2) - p(1)\big)\big(q(2) - q(1)\big) + p(2)q(2).$$

(a) Formulera definitionen för ett innre produkt (skalärprodukt). Visa att (1) definierar en innre produkt på $\mathcal{P}_n$ när $n \leq 2$ (visa positivitetsvillkoren). *(3p)*

(b) Använd Gram-Schmidt metoden för att bestämma en ortogonal bas (med avseeende på (1)) för $\mathcal{P}_2$. *(3p)*

(c) Finn bästa approximation till $f(x) = \cos(\pi x/2)$ in $\mathcal{P}_2$ med avseende på den innre produkten (1). Alltså, betäm $p \in \mathcal{P}_2$ så att

$$(f - p, f - p) \leq (f - q, f - q) \qquad \forall q \in \mathcal{P}_2.$$ *(3p)*

Uppgift 3 (10p). Betrakta följande randvärdesproblem

(2) $$\begin{cases} -(\alpha u')' = f & \text{in } (0,1) \\ u(0) = 0 \\ \alpha(1)u'(1) = 2 \end{cases}$$

där $f \in L^2([0,1])$ och

$$\alpha(x) = 1 + x^2.$$

Motsvarande variationsformulering är:
Finn $u \in V$ så att

(3) $$\int_0^1 \alpha(x)u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx + 2v(1) \qquad \forall v \in V,$$

där V er följande rum av testfunktioner,

$$V = \left\{ v \in C([0,1]) : \int_0^1 |v'(x)|^2 + |v(x)|^2\,dx < \infty \quad \text{och} \quad v(0) = 0 \right\}.$$

(a) Härled variationsformuleringen (3) från randvärdesproblemet (2). *(3p)*

(b) Visa att en lösning till randvärdesproblemet (2) är entydig. *(3p)*

(c) Låt u_h vara den numeriska FEM-lösningen till (3) när vi användar kontinuerliga och styckvis linjära funktioner med avseende på en likformig partition av intervallet $[0,1]$. Härled en a priori feluppskattning i normen

$$\|u\|_E = \sqrt{\int_0^1 \alpha(x)|u'(x)|^2\,dx}$$ *(4p)*

Uppgift 4 (8p). Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k!}$ *(2p)*

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(1/k)}{k}$ *(2p)*

(c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ *(2p)*

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}^{\sqrt{k}}}$ *(2p)*

Uppgift 5 (4p). Bestäm för vilka x följande serie konvergerar.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n \ln n}{n}(x+1)^n.$$

Uppgift 6 (6p). Beräkna gränsen

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n - n\cos(x/n)}{\sqrt{1+x^2}}\, dx.$$

Uppgift 7 (2p). Använd Simpsons enkla regel för att approximera integralen

$$\int_0^{\pi/3} (\tan x)^2\, dx.$$

Uppgift 8 (6p). Låt $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ vara två konvergenta och positiva serier så att

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A \qquad \text{och} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B.$$

Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k b_k}$ konvergerar, och

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k b_k} \le \sqrt{AB}.$$

Uppgift 9 (6p). Formulera och bevisa integralkriteriet för positiva och avtagande serier.