Uppgift 1 (9p). Låt $\mathcal{P}_3$ vara det linjära rummet bestående av polynom av grad mindre eller lika med 3. För $p \in \mathcal{P}_3$, låt Ap $(= A(p))$ vara funktionen definierad

$$Ap(t) = p(1) + (t-1)p'(1) + \frac{1}{2}(t-1)^2 p''(1)$$

(**A**) Visa att A är en linjär operator från $\mathcal{P}_3$ till $\mathcal{P}_3$. *(3p)*

(**B**) Välj en lämplig bas för $\mathcal{P}_3$, och bestäm matrisen för A med avseende på denna bas. *(3p)*

(**C**) Finn alla *polynom* $p \in \mathcal{P}_3$ som löser ekvationen

$$Ap = 1.$$ *(3p)*

Uppgift 2 (9p). Låt $\mathcal{P}_n$ vara rummet av polynom av grad $\leq n$, och låt

$$(p, q) = p(0)q(0) + \int_0^\infty p'(x)q'(x)e^{-x}\,dx \tag{1}$$

(**A**) Formulera definitionen för en inre produkt (skalärprodukt). Visa att (1) definierar en inre produkt på $\mathcal{P}_n$ för alla $n \geq 0$ (här är det tillräckligt att visa positivitetsvillkoren). *(3p)*

(**B**) Använd Gram-Schmidt metoden för att bestämma en ortogonal bas (med avseeende på (1)) för $\mathcal{P}_2$. Följande ekvation kan användas.

$$\int_0^\infty x^m e^{-x}\,dx = m! \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$ *(3p)*

(**C**) Beräkna polynomet $p \in \mathcal{P}_2$ som minimerar avståndet til $f(x) = 1 + x^3$ med avseende på den inre produkten (1). Alltså, betäm $p \in \mathcal{P}_2$ så att

$$\|f - p\| \leq \|f - q\| \qquad \forall q \in \mathcal{P}_2,$$

där normen bestäms av den inre produkten: $\|q\| = \sqrt{(q, q)}$. *(3p)*

Uppgift 3 (8p). Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar.

(**A**) $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \left(\frac{\arctan k}{\pi}\right)^k$ *(2p)*

(**C**) $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ *(2p)*

(**B**) $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ *(2p)*

(**D**) $\displaystyle\sum_{k=3}^\infty \frac{k}{(\ln \ln k)^{\ln k}}$ *(2p)*

Uppgift 4 (4p). Bestäm för vilka x följande serie konvergerar.

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{n}{n+1}(1-3x)^n.$$

Uppgift 5 (6p). Beräkna gränsen

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{e^x}{n}}\,dx.$$

Uppgift 6 (6p). Antag $f \in C^2([a, b])$ och låt πf vara den linjära interpolanten

$$\pi f(x) = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$

Härled följande felestimat.

$$|f(x) - \pi f(x)| \leq C(b-a)^2 \max_{a\leq\xi\leq b}|f''(\xi)| \qquad \forall x \in [a, b],$$

där C är en konstant oberoende av a, b och f.

Uppgift 7 (2p). Betrakta integralen

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\, dx. \tag{2}$$

Formulera sammansatta trapetsregeln med n (likformiga) delintervaller för integralet (2). Bestäm punkter och vikter, du behöver inte beräkna integralen.

Uppgift 8 (10p). Betrakta följande randvärdesproblem

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{in } (0,1) \\ u'(0) = 1 \\ u'(1) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

där $f \in L^2([0,1])$. En motsvarande variationsformulering är:
Finn $u \in V$ så att

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)\, dx = \int_0^1 f(x)v(x)\, dx - v(1) \qquad \forall v \in V, \tag{4}$$

där V är följande rum av testfunktioner,

$$V = \left\{ v \in C([0,1]) : \int_0^1 |v'(x)|^2 + |v(x)|^2\, dx < \infty \right\}.$$

(**A**) Härled variationsformuleringen (4) från randvärdesproblemet (3). *(3p)*

(**B**) Har randvärdesproblemet (3) entydiga lösningar? Motivera ditt svar. *(1p)*

(**C**) Antag att variationsproblemet (4) har lösningar för ett givet f. Visa att f uppfyller

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 1.$$ *(2p)*

Antag att randvärdesproblement (3) skall lösas med finita element metoden. Vi låter $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ vara en partition av intervallet $[0,1]$, och definierar $\{\phi_i\}_{i=0}^n$ som den vanliga CG_1 (kontinuerliga och styckvis linjära) basen sådan att

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Styvhetsmatrisen $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n+1\times n+1}$ och lastvektorn $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n+1}$ har värden

$$A_{ij} = a(\phi_j, \phi_i) = \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_j'(x)\, dx$$
$$b_i = L(\phi_i) = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)\, dx - \phi_i(0).$$

FEM-lösnigen bestäms genom att lösa det linjära systemet

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{b}.$$

(**D**) Bestäm nollrummet och värderummet till styvhetsmatrisen $\boldsymbol{A}$. *(4p)*

Uppgift 9 (6p). Betrakta följanda underrum av $\mathbb{R}^{n\times n}$.

$$U = \{\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times n} : M_{ij} = 0 \text{ om } i > j\}$$
$$V = \{\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times n} : \boldsymbol{M}^T = -\boldsymbol{M}\}$$

Med andra ord, matriserna i U är på trappstegsform och matriserna i V är skevsymmetriska. Visa att

$$\mathbb{R}^{n\times n} = U \oplus V.$$