MATEMATIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

Matematisk fördjupning, TMA226

Tentamen: 2019-06-08, 14.00–18.00
Telefonvakt: Anna Rehammar, 5325
Hjälpmedel: Inga
Betygsgränser: 24 poäng – 3, 36 poäng – 4, 48 poäng – 5
Examinator: Fredrik Ohlsson, 031-772 5305 (Tobias Gebäck, 031-772 3547)
Observera: Beräkningar skall motiveras och redovisas utförligt. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringar som ger poäng, endast svar ger inga poäng.

---

1. Låt $V = \mathbb{P}_2 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ vara vektorrummet av polynom av grad högst 2 på $\mathbb{R}$ med de vanliga punktvisa operationerna $(p+q)(t) = p(t) + q(t)$ och $(\alpha p)(t) = \alpha p(t)$ för $p, q \in \mathbb{P}_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestäm alla $a \in \mathbb{R}$ så att

$$W_a = \{p \in V : p(1) = a\}$$

utgör ett underrum av V, samt dimensionen av W_a för dessa a.

(7p)

2. Betrakta vektorrummet $V = C[-\pi, \pi]$ med skalärprodukten

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx\,.$$

Bestäm Fourierapproximationen f_n av ordning n för $f(x) = x^2$ samt avståndet mellan vektorerna f_0 och f i V. Använd också Fourierserien med period 2π för f för att beräkna summan till serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots\,.$$

Uttrycken för Fourierkoefficienterna behöver inte härledas.

(7p)

3. Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -u''(x) + 2u'(x) = \sin(\pi x), \qquad x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

Härled *variationsformulering* och *finita element-formulering*, samt beräkna *styvhets- och konvektionsmatris* för den styckvis linjära finita element-approximationen till randvärdesproblemet på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0,1]$ med steglängd $h = 1/4$. Beräkna också *högerledsvektorn* approximativt genom att använda *trapetsformeln* på varje delintervall av längd h.

Formulera slutligen det resulterande *linjära ekvationssystemet* (lösningen behöver ej beräknas). Beräkningen av integralerna i matriserna behöver ej heller redovisas i detalj om resultatet är känt.

(8p)

4. Visa att serien

$$\sum_{k=3}^{\infty} \ln\left(\cos\frac{\pi}{k}\right)$$

är konvergent. (Tips: Serieutvecklingarna $\cos x = 1 - x^2/2 + \mathcal{O}(x^4)$ och $\ln(1+x) = x - x^2/2 + \mathcal{O}(x^3)$ kan vara användbara).

(7p)

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}\right) x^k$$

är absolut konvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(8p)

6. Visa att funktionsserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \sin\left(\frac{x}{k}\right) e^{-kx}$$

är likformigt konvergent på $[1, \infty)$.

(7p)

7. Visa dimensionssatsen, d.v.s. att för $m \times n$-matris $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ gäller

$$\dim N(A) + \dim V(A) = n\,.$$

Det är tillräckligt att genomföra beviset för fallet $0 < \dim N(A) < n$.

(8p)

8. Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\left(a(x)u'(x)\right)' = f(x), & x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

Formulera motsvarande variationsformulering (VF) och minimeringsproblem (MP), samt visa att "(VF) $\Rightarrow$ (MP)", dvs att en lösning till (VF) också är en lösning till (MP).

(8p)

Lycka till!
Fredrik & Tobias