MATEMATIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

Matematisk fördjupning, TMA226

Tentamen: 2019-08-22, 08.30–12.30
Telefonvakt: Andreas Petersson, 5325
Hjälpmedel: Inga
Betygsgränser: 24 poäng – 3, 36 poäng – 4, 48 poäng – 5
Examinator: Fredrik Ohlsson, 031-772 5305 (Tobias Gebäck, 031-772 3547)
Observera: Beräkningar skall motiveras och redovisas utförligt. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringar som ger poäng, endast svar ger inga poäng.

---

1. Låt $V = \mathbb{P}_n$ vara vektorrummet av polynom av grad högst $n \in \mathbb{N}$ på $\mathbb{R}$ med de vanliga punktvisa operationerna och låt $q(t) = t^k$ med $k \in \mathbb{N}$. Visa att

$$W_{n,k} = \{p \in V : pq \in V\}$$

utgör ett underrum av V och bestäm $\dim W_{n,k}$ som en funktion av n och k.

(7p)

2. Låt $V = \mathbb{P}_2$ vara vektorrummet av polynom av grad högst 2 på $[0, 1]$ med de vanliga punktvisa operationerna och låt $U = \mathbb{P}_1$ vara underrummet av V bestående av alla polynom av grad högst 1. Visa att

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\,\mathrm{d}t \quad , \quad \forall p, q \in V$$

definierar en skalärprodukt på V och bestäm en ON-bas för U samt projektionen av $v(t) = t^2 \in V$ på U med avseende på denna skalärprodukt.

(8p)

3. Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = 2x, & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Härled *variationsformulering* och *finita element-formulering*, samt beräkna *styvhets- och massmatris* samt *högerledsvektor* för den styckvis linjära finita element-approximationen till randvärdesproblemet på en likformig partition $\mathcal{T}_h$ av intervallet $[0, 1]$ med steglängd $h = 1/4$.

Formulera slutligen det resulterande *linjära ekvationssystemet* (lösningen behöver ej beräknas). Beräkningen av integralerna i styvhets- och massmatriserna behöver ej heller redovisas i detalj om resultatet är känt.

(7p)

4. Bestäm för vilka $\alpha \in \mathbb{R}$ serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(\ln \left(\frac{k+1}{k-1} \right) - \frac{\alpha}{k} \right)$$

är konvergent respektive divergent. (Tips: Serieutvecklingen $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + \mathcal{O}(x^4)$ kan vara användbar).

(7p)

5. Avgör för vilka $x \in \mathbb{R}$ som serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \sqrt{\frac{4k+1}{k^2-1}} x^k$$

är absolut konvergent, betingat konvergent respektive divergent.

(8p)

6. Beräkna

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{e^{\sqrt{x}/n}} \, \mathrm{d}x \, .$$

Motivera ditt svar väl!

(7p)

7. Formulera och bevisa integralkriteriet för positiva serier.

(8p)

8. Låt A vara styvhetsmatrisen i en finita element-formulering med styckvis linjär approximation på en likformig partition av intervallet $[0,1]$ med steglängd h. Visa att A är *inverterbar* genom att först visa att den är positivt definit och sedan att varje positivt definit matris är inverterbar.

(8p)

Lycka till!
Fredrik & Tobias