Matematik Chalmers

Tentamen i TMA226 matematik fordjupning Kf1, 2016–05–28; KL 8:30-12:30

Telefon: Mohammad Asadzadeh: ankn 3517
Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
OBS! Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng.
Udda uppgifter (1, 3, 5, 7) ger 8 poäng var, och jämna uppgifter 7 poäng var: totalt 60 poäng.
Betygsgränser, **3**: 24-35p, **4**: 36-47p och **5**: 48p- Lösningar/Granskning: Se Hemsidan.

---

1. Låt $(x_i, c_i),\ i = 0, \dots, n$ vara $n+1$ par av punkter x_i och givna tal c_i. Visa att det finns exakt ett polynom p av grad högst n så att

$$p(x_i) = c_i, \qquad i = 0, \dots, n.$$

2. Mängderna $\mathcal{N}_A := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : A\mathbf{x} = 0\}$ och $\mathcal{R}_A := \{A\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$ är linjära rum där

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Bestäm baser i $\mathcal{N}_A$ och $\mathcal{R}_A$.

3. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$-\frac{1}{3}u''(x) + 2u'(x) = 6, \quad x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Dela in intervallet $[0,1]$ i tre lika delintervall och beräkna för hand styvhetsmatrisen, konvektionsmatrisen och lastvektorn för den styckvis linjära finita element lösningen U. Lös sedan ekationssystemet för att bestämma approximative värdena $\xi_1 = u_h(1/3)$ och $\xi_2 = u_h(2/3)$.

4. Visa en a *priori* feluppskattning för den styckvis linjära Galerkin approximationen till problemet

$$-u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

i energinormen $||v||_E$ med $||v||_E^2 = ||v||_{L_2(I)}^2 + ||v'||_{L_2(I)}^2$.

5. För vilka reella x konvergerar serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k \Big(\frac{x}{2}\Big)^{3k} = -\Big(\frac{x}{2}\Big)^3 + 2\Big(\frac{x}{2}\Big)^6 - 3\Big(\frac{x}{2}\Big)^9 + \dots ?$$

6. Visa att funktionserien

$$\sum_{K=1}^{\infty} x e^{-k^{3/2} x}$$

är likformig konvergent på $[0, \infty)$.

7. Visa dimensionssatsen, dvs

$$\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{V}(A) = n$$

där A är en (reell) $m \times n$-matris.

8. Visa följande linjära interpolationsfeluppskattning för en funktion $f \in C^2(a,b)$.

$$||\pi_1 f - f||_{L_\infty(a,b)} \le (b-a)^2 ||f''||_{L_\infty(a,b)},$$

där $||w||_{L_\infty(a,b)} = \max_{a \le x \le b} |f(x)|$ (max-normen).

LYCKA TILL!

MA

VOID!

TMA226 matematik fordjupning Kf1, 2016–05–28; KL 8:30-12:30. Lösningar.

---

1. Sätt
$$p_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}, \quad i=0,\dots,n$$
Då gäller att $p_i \in \mathcal{P}_n$ och

(1)
$$p_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$
Polynomen är linjärt oberoende, ty antag att
$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j p_j(x) = 0, \qquad \forall x.$$
Då fås speciellt för $x = x_i$ att
$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j p_j(x_i) = \lambda_i = 0, \qquad i=0,\dots,n,$$
vilket bevisar påståendet. Eftersom $\mathcal{P}_n$ är $(n+1)$-dimensionellt, så utgör alla de $n+1$ elementen p_j en bas för $\mathcal{P}_n$. Av (1) följer också att
$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j\, p_j(x)$$
uppfyller $p(x_i) = c_i$ för $i = 0,\dots,n$. Polynomet p är entydigt bestämt. Ty om det finns ett annat polynom $q \in \mathcal{P}_n$ sådant att $g(x_i) = c_i$ för $i=0,\dots,n$. Då är $p-q$ ett polynom an grad högst n med $n+1$ olika nollställen. Alltså är $p-q$ nollpolynomet, dvs $p=q$

2. Lös
$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0:$$
Gemon att subtrahera rad 1 från rad 3 i A får vi
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = (RE) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (RE) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ -t \\ t \end{bmatrix}.$$
Alltså får vi en bas för
$$\mathcal{N}_A : \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Genom att subtrahera 2 ggr kolonn 1 från kolonn 3 får vi att
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = (KE) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (KE) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Eftersom
$$\alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(0,1,1) = 0 \Longleftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$
så är
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{linjärt oberoende.}$$

De bildar en bas i $\mathcal{R}_A$. SVAR:

$$\text{Bas i} \quad \mathcal{N}_A : \quad \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{bas i} \quad \mathcal{R}_A : \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \text{och} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

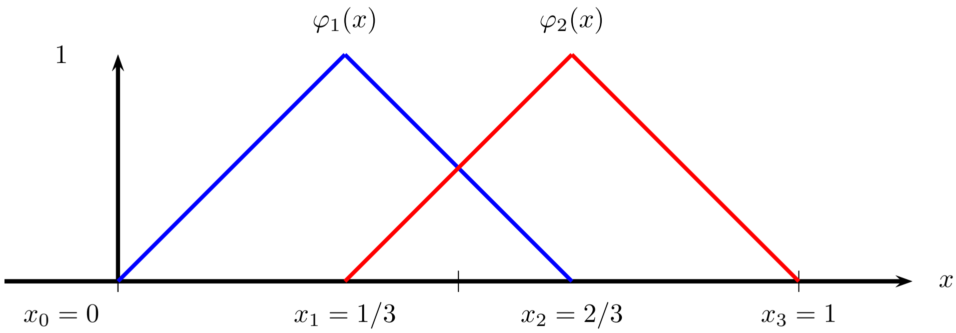
3. Lösning: Med dem givna homogena randdata och partitionen $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$, $x_3 = 1$, har vi med endast två bas funktioner:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \le x \le 1/3, \\ 3(2/3 - x), & 1/3 \le x \le 2/3, \end{cases}$$

och

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 3(x - 1/3), & 1/3 \le x \le 2/3, \\ 3(1 - x), & 2/3 \le x \le 1. \end{cases}$$

Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in V^0 := \{v : ||v|| + ||v'|| < \infty,\ v(0) = v(1) = 0\}$



och integrera över $I = [0, 1]$. Efter partiell integration får vi variationsformuleringen: Finn $u \in V^0$ så att

$$\frac{1}{3}\int_0^1 u'v'\,dx + 2\int_0^1 u'v\,dx = 6\int_0^1 v\,dx, \qquad \forall v \in V^0.$$

Motsvarande finita elementformulering är:
Finn $U \in V_h^0 = \{v \in V^0 : v \text{ är kontinuerlig styckvis linjär på } \mathcal{T}_h\}$ så att

$$\text{(FEM)} \qquad \frac{1}{3}\int_0^1 U'v'\,dx + 2\int_0^1 U'v\,dx = 6\int_0^1 v \qquad \forall v \in V_h^0.$$

Vi har att $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ är basfunktioner på paritionen $\mathcal{T}_h$, $\xi_1 = U(x_1)$ och $\xi_2 = U(x_2)$. Vi sätter in $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$, $v = \varphi_1(x)$ respektive $v = \varphi_2(x)$ i (FEM) och får ett 2×2 linjärt ekvationssystem för ξ_1 och ξ_2 som $M\xi = 6b$, där $M = \frac{1}{3}S + 2K$ med styvhatsmatris

$$S = \begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1'^{\,2} & \int_0^1 \varphi_2'\varphi_1' \\ \int_0^1 \varphi_1'\varphi_2' & \int_0^1 \varphi_2'^{\,2} \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

Kovektionsmatrix

$$K = \begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1'\varphi_1 & \int_0^1 \varphi_2'\varphi_1 \\ \int_0^1 \varphi_1'\varphi_2 & \int_0^1 \varphi_2'\varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \text{och lastvektor} \quad b = \begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1 \\ \int_0^1 \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Därför är

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Och vi får

$$M\mathbf{x} = 6\,b \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \Longrightarrow \xi_1 = 1,\ \xi_1 = 2.$$

4. Varitionsformuleringen blir (efter partiell integration)

$$(VF) \qquad \int_0^1 u'v'\,dx + \int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 fv\,dx, \qquad \forall v \in H_0^1.$$

Låt nu

$$V_h^0 =: \{v:\ v \text{ linjär, styckvis kontinuerlig och } v(0) = v(1) = 0\} \subset H_0^1.$$

Finit element formulering: Finn $U \in V_h^0$ så att

$$(FEM) \qquad \int_0^1 U'v'\,dx + \int_0^1 Uv\,dx = \int_0^1 fv\,dx, \qquad \forall v \in V_h^0.$$

Nu (VF)-(FEM) ger <u>Galerkin ortogonalitet:</u>

$$(G\perp) \qquad \int_0^1 (u-U)'v'\,dx + \int_0^1 (u-U)v\,dx = 0, \qquad \forall v \in V_h^0.$$

Relevant norm för uppskattning av felet $e = u - U$, blir då energinormen:

$$\|e\|_E := \Big(\int_0^1 (e')^2\,dx + \int_0^1 e^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Då har vi med $v \in V_h^0$ att

$$\begin{aligned}
\|e\|_E^2 =& \|(u-U)'\|^2 + \|u-U\|^2 \\
=& \int_0^1 (u-U)'(u-v+v-U)'\,dx + \int_0^1 (u-U)(u-v+v-U)\,dx \\
=& \int_0^1 (u-U)'(u-v)'\,dx + \int_0^1 (u-U)(u-v)\,dx \\
&+ \int_0^1 (u-U)'(v-U)'\,dx + \int_0^1 (u-U)(v-U)\,dx \{\text{denna rad } =0 \text{ pga } G\perp\} \\
=& \int_0^1 (u-U)'(u-v)'\,dx + \int_0^1 (u-U)(u-v)\,dx \\
\le& \{\text{Cauchy-Schwartz}\} \le \|(u-U)'\|\|(u-v)'\| + \|u-U\|\|u-v\| \\
\le& \frac{1}{2}\|(u-U)'\|^2 + \frac{1}{2}\|(u-v)'\|^2 + \frac{1}{2}\|u-U\|^2 + \frac{1}{2}\|u-v\|^2.
\end{aligned}$$

Alltså

$$\|e\|_E^2 = \|(u-U)'\|^2 + \|u-U\|^2 \le \|(u-v)'\|^2 + \|u-v\|^2, \quad \forall v \in V_h^0.$$

Välj nu $v = \pi_h u$. $\pi_h u$ är den linjära interpolanten av u. Genom att använda feluppskattningar för interpolanten får vi

$$\begin{aligned}
\|e\|_E^2 &\le \|(u-\pi_h u)'\|^2 + \|u-\pi_h u\|^2 \\
&\le C_i^2\|hu''\|^2 + C_i^2\|hu'\|^2 \le \Big(C_i\|hu''\| + C_i\|hu'\|\Big)^2.
\end{aligned}$$

Alltså vi har följande a priori feluppskattning:

$$\|e\|_E \le C_i\Big(\|hu''\| + \|hu'\|\Big) = \mathcal{O}(h).$$

5. Eftersom $a_k = (-1)^k k(x/2)^{3k}$, har vi att

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)(x/2)^{3n+3}}{(-1)^n n(x/2)^{3n}}\right| = \left|\frac{n+1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^3\right| = \frac{n+1}{n}\left|\frac{x}{2}\right|.$$

Värför

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\left|\frac{x}{2}\right| = \left|\frac{x}{2}\right|,$$

och den ginva serien konvergerar för $|x/2|^3 < 1$ och divergerar för $|x/2|^3 > 1$. Alltså serien konvergerar för alla x i intervallet

$$-2 < x < 2,$$

och divergerar utanför (för $|x| > 2$). Slutligen för att bestämma seriens uppförande för $x = \pm 2$, we observerar att allmänna termen är då $\pm(-1)^k k$, och eftersom $\pm(-1)^k k$ går inte mot 0, då $k \to \infty$ så divergerar serien i båda ändpukterna.

6. Sätt $f_k(x) = xe^{-k^{3/2}x}$. Vi noterar att

$$0 \le f_k(x) \le \frac{1}{k^{3/2}}, \qquad x \in [0,\infty)$$

eftersom $\frac{d}{dx}f_k(x) = e^{-k^{3/2}x}(1 - k^{3/2}x)$. Sätt t.ex. $a_k = \frac{1}{k^{3/2}}$. Det gäller att

1. $\left|f_k(x)\right| \le a_k$ för $x \in [0,\infty)$ och $k = 1,2,3,\ldots$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1} \frac{1}{k^{3/2}}$ som konvergerar.

Weierstrass M-sats ger att funktionsserien är likformig konvergent på $[0,\infty)$.

MA