Matematik Chalmers

Tentamen i TMA226 matematik fördjupning Kf1, 2016–10-08; KL 8:30-12:30

Telefon: Adam Malik: ankn 5325
Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa.
OBS! Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng.
Uppgifter (1, 2, 3, 5, 7, 8) ger 6 poäng var, uppfigterna (4, 6) ger 7 poäng var. Totalt 50 poäng.
Betygsgränser, **3**: 20-29p, **4**: 30-39p och **5**: 40p- Lösningar/Granskning: Se Hemsidan.

---

1. Betraka den linjära avbildningen F från $\mathcal{P}_2$ till $\mathcal{P}_3$ definierad av $F(p(t)) = p(t) + tp(t)$. Bestäm avbildingssmatrisen M samt dimentionerna för värderummet: $dimV(F)$ och nollrummet: $dimN(F)$ för F.

2. Betrakta Mängden av alla n-dimensionella kolonnvekrorer $V = \mathbb{R}^{n\times 1}$ med räknelagar $A \oplus B = A + B$ och för $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \odot A = A^{\alpha}$.

a) Visa att $(V, \oplus, \odot)$ är inte ett linjärt rum.

b) Om vi definierar om produkt operatoren som $\alpha \odot' A = (1 + \alpha)A$, gäller det då att $(V, \oplus, \odot')$ bildar ett linjärt rum?

3. Genomför VF och FEM proceduren och bestäm styvhet-, konvektion- och mass-matris, samt lastvektorn för den styckvis linjära finitelementapproximationen till randvärdesproblemet.

$$-u'' + 2u' + u = 4, \quad 0 < x < 1, \qquad u(0) = 0, \quad u'(1) = 3,$$

i partitionen $\mathcal{T}_h : x_0 = 0,\ x_1 = 1/2,\ x_2 = 1, (h = 1/2)$ av intervallet $[0, 1]$.

Obs! Alla matriselementen skall beräknas.

4. Bevisa en a priori feluppskattning för $cG(1)$-finitelementlösning av randvärdesproblemet

$$-u''(x) + bu'(x) + u(x) = f(x), \quad x \in I := [0, 1]; \qquad u(0) = u(1) = 0, \qquad b > 0,$$

i energinormen: $||v||_E$ med $||v||_E^2 = ||v||_{L_2(I)}^2 + ||v'||_{L_2(I)}^2$. För vilka b värden är felet optimalt?

5. a) Beräkna $S(x)$, summan av serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(x^{\frac{1}{2k+1}} - x^{\frac{1}{2k-1}} \right).$$

b) Undersök om $S(x)$ är kontinuerlig på $\mathbb{R}$ (för alla $x \in \mathbb{R}$).

6. För vilka reella x konvergerar potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!} x^n$?

Ledning: Stirlings formel: $n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, som gäller för stora n kan användas i en av ändpukterna.

7. Visa dimensionssatsen, dvs att

$$\dim\ N(A) + \dim\ V(A) = n,$$

där A är en (reell) $m \times n$-matris.

8. Vissa att för den linjära interpolanten $\pi_1 f$ av en två gånger deriverbar funktion f på intervallet $[a, b]$ finns en konstant C så att

$$\|\pi_1 f - f\|_{L_\infty(a,b)} \le C(b - a)^2 \|f''\|_{L_\infty(a,b)}.$$

LYCKA TILL!

MA

VOID!

TMA226 matematik fördjupning Kf1, 2016–10-08; KL 8:30-12:30. Lösningar.

---

1. Matrisen för F i staddardbaserna $\{1, t, t^2\}$ i $\mathcal{P}_2$ och $\{1, t, t^2, t^3\}$ i $\mathcal{P}_3$ får vi genom att studera vad avbildningen ger på baselementen dvs: $F(1) = 1 + t$, $F(t) = t + t^2$, $F(t^2) = t^2 + t^3$. Vi avläser koordinaterna för dessa avbildningsvärden i basen för $\mathcal{P}_3$ och får kolonnerna i matrisen. Detta ger

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Det är uppenbart att det endast är nollpolynomet som avbildas på nollpolynomet, så nollpolynomet har dimension 0. Värderummet är alla polynom på formen $(1 + t)p(t)$ där $p(t) \in \mathcal{P}_2$ och $\dim \mathcal{P}_2 = 3$. Det följer att Värderummet för F också har dimension 3. Speciellt gäller att $rang(M) = 3$ och då gäller $\dim V(F) = 3$ och $\dim N(F) = 0$.

2. a) Enligt förtsättningar har vi att för alla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$(\alpha + \beta) \odot \mathbf{x} = \mathbf{x}^{\alpha+\beta} = (x_1^{\alpha+\beta}, \ldots, x_n^{\alpha+\beta})^T,$$

medan

$$\alpha \odot \mathbf{x} + \beta \odot \mathbf{x} = \mathbf{x}^\alpha + \mathbf{x}^\beta = (x_1^\alpha + x_1^\beta, \ldots, x_n^\alpha + x_n^\beta)^T.$$

Allså gäller inte räknelagen:

$$(\alpha + \beta) \odot \mathbf{x} = \alpha \odot \mathbf{x} + \beta \odot \mathbf{x}.$$

b) Vi kollar igen samma räknelag:

$$(\alpha + \beta) \odot' \mathbf{x} = (1 + \alpha + \beta)\mathbf{x} = ((1 + \alpha + \beta)x_1, \ldots, ((1 + \alpha + \beta)x_n)^T$$

och

$$\begin{aligned} \alpha \odot' \mathbf{x} + \beta \odot' \mathbf{x} =& (1 + \alpha)\mathbf{x} + (1 + \beta)\mathbf{x} \\ &= ((1 + \alpha)x_1, \ldots, (1 + \alpha)x_n) + ((1 + \beta)x_1, \ldots, (1 + \beta)x_n)^T \\ &= ((2 + \alpha + \beta)x_1, \ldots, (2 + \alpha + \beta)x_n)^T. \end{aligned}$$

Alltså även i detta fallet

$$(\alpha + \beta) \odot' \mathbf{x} \neq \alpha \odot' \mathbf{x} + \beta \odot' \mathbf{x}$$

3. Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1 = \{v : ||v|| + ||v'|| < \infty,\ v(0) = 0\}$ och integrera över $I = [0, 1]$,

$$\int_0^1 u'v'\,dx - [u'(x)v(x)]_0^1 + 2\int_0^1 u'v\,dx + \int_0^1 uv\,dx = 4\int_0^1 v\,dx, \qquad \forall v \in H_0^1.$$

Gemon att sätta in randdata får vi variationsformuleringen: Finn $u \in H_0^1$ så att

$$\text{(VF)} \qquad \int_0^1 u'v'\,dx + 2\int_0^1 u'v\,dx + \int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 v\,dx + u'(1)v(1) = 4\int_0^1 v\,dx + 3v(1), \qquad \forall v \in H_0^1.$$

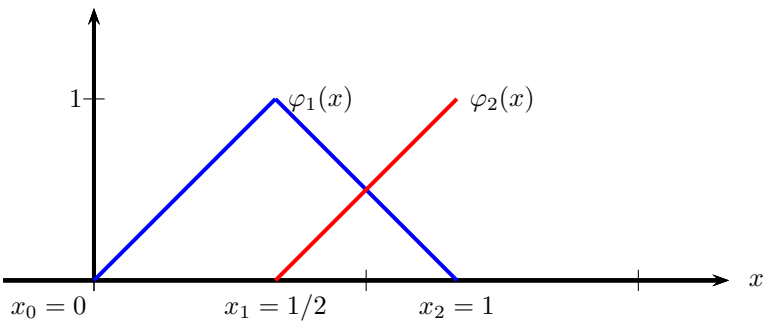
Motsvarande finitelementmetoden är: Finn $U \in V_h^0 = \{w : w$ är kontinuerlig styckvis linjär på $\mathcal{T}_h,\ w(0) = 0\}$ så att

$$\text{(FEM)} \qquad \int_0^1 U'v'\,dx + 2\int_0^1 U'v\,dx = 4\int_0^1 v\,dx + 3v(1), \qquad \forall v \in V_h^0.$$

Vi har att $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ där

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1/2 \\ 1 - 2x & 1/2 \le x \le 1 \end{cases} \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le 1/2 \\ 2x - 1 & 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

är basfunktioner på paritionen $\mathcal{T}_h$ och $\xi_1 = U(x_1)$ och $\xi_2 = U(x_2)$.



Vi sätter in $U(x) = \xi_1\varphi_1(x) + \xi_2\varphi_2(x)$ i FEM, och "testar" mot bas funktioner i V_h^0: $v = \varphi_i(x)$, $i = 1, 2$. Vi får en 2×2 linjär ekvationssystem för ξ_1 och ξ_2 på formen $A\xi = \mathbf{b}$, med $A = S + 2K + M$, där S, K och M är styvhets- konvektions- och mass-matrier och $\mathbf{b}$ är lastvektor, dvs

$$A = \left[\begin{pmatrix} \int_0^1 {\varphi_1'}^2 & \int_0^1 \varphi_1'\varphi_2' \\ \int_0^1 \varphi_2'\varphi_1' & \int_0^1 {\varphi_2'}^2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1\varphi_1' & \int_0^1 \varphi_1\varphi_2' \\ \int_0^1 \varphi_2\varphi_1' & \int_0^1 \varphi_2\varphi_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1\varphi_1 & \int_0^1 \varphi_1\varphi_2 \\ \int_0^1 \varphi_2\varphi_1 & \int_0^1 \varphi_2\varphi_2 \end{pmatrix} \right]$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = 4 \begin{pmatrix} \int_0^1 \varphi_1 \\ \int_0^1 \varphi_2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \varphi_1(1) \\ \varphi_2(1) \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vi räknar fram numeriska formen av den slutgiltiga linjära ekvationssystemet för φ_1 och φ_2 och får

$$A = \left[\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + \frac{h}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

vilket slutligen ger, med $h = 1/2$ att i ekvationen $A\xi = \mathbf{b}$, dvs $(S + 2K + M)\xi = \mathbf{b}$ vi har att

$$S = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad 2K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

4. Multiplicera ekvationen med en testfunktion $v \in H_0^1 = \{v : ||v||_E < \infty,\ v(0) = v(1) = 0\}$, patialintegrera över I och använd randdata för att får *variationsformulering*: Finn $u \in H_0^1(I)$ så att

$$\int_I (u'v' + bu'v + uv) = \int_I fv, \quad \forall v \in H_0^1(I). \tag{1}$$

En *Finitelement Metod* med $cG(1)$ kan formuleras som: Finn $U \in V_h^0$ så att

$$\int_I (U'v' + bU'v + Uv) = \int_I fv, \quad \forall v \in V_h^0 \subset H_0^1(I), \tag{2}$$

där

$$V_h^0 = \{v : v \text{ styckvis linjär och kontinuerlig i en partition av } I,\ v(0) = v(1) = 0\}.$$

Låt $e = u - U$, då (1)-(2) ger att

$$\int_I (e'v' + be'v + ev) = 0, \quad \forall v \in V_h^0, \qquad \text{(Galerkin Ortogonalitet)}. \tag{3}$$

Observera att $e(0) = e(1) = 0 \Longrightarrow$

$$\int_I e'e = \frac{1}{2} \int_I \frac{d}{dx}(e^2) = \frac{1}{2}(e^2)|_0^1 = 0. \tag{4}$$

A priori feluppskattning: Vi använder (3) och (4) och skriver

$$\begin{aligned}
\|e\|_{H_0^1} &= \|e'\|^2_{L_2(I)} + \|e\|^2_{L_2(I)} = \int_I (e'e' + ee) = \{(4)\} = \int_I (e'e' + be'e + ee) \\
&= \int_I \Big(e'(u-U)' + be'(u-U) + e(u-U) \Big) = \{v = \pi_h u - U \text{ i } (3)\} \\
&= \int_I \Big(e'(u-\pi_h u)' + be'(u-\pi_h u) + e(u-\pi_h u) \Big) \quad \le \{\text{enligt C-S}\} \le \\
&\le \|(u-\pi_h u)'\| \|e'\| + b\|u-\pi_h u\| \|e'\| + \|u-\pi_h u\| \|e\| \\
&\le \{\|(u-\pi_h u)'\| + (1+b)\|u-\pi_h u\|\} \|e\|_{H^1} \le C_i \{\|hu''\| + (1+b)\|h^2 u''\|\} \|e\|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Alltså har vi följande a priori feluppskattning:

$$\|e\|_{H_0^1} \le C_i \{\|hu''\| + (1+b)\|h^2 u''\|\}.$$

Felet är minimalt om $b \equiv 0$.

5. Sätt $S_n(x) =$ summan av de n första parantesen. Då är

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= (x^{1/3} - x) + (x^{1/5} - x^{1/3}) + \ldots + (x^{\frac{1}{2n-1}} - x^{\frac{1}{2n-3}}) + (x^{\frac{1}{2n+1}} - x^{\frac{1}{2n-1}}) \\
&= x^{\frac{1}{2n+1}} - x.
\end{aligned}$$

I) Om $x > 0$,

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \Big(x^{\frac{1}{2n+1}} - x \Big) = 1 - x.$$

II) Om $x < 0$,

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \Big(-|x|^{\frac{1}{2n+1}} - x \Big) = -1 - x.$$

III) Om $x = 0$; $S_n(x) = 0 \Longrightarrow S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0$.
Alltså a)

$$S(x) = \begin{cases} -1 - x, & \text{om } x < 0, \\ 0, & \text{om } x = 0, \\ 1 - x, & \text{om } x > 0. \end{cases}$$

b) $\lim_{x\to 0^-} S(x) = -1 \ne 1 = \lim_{x\to 0^+} S(x)$, dvs $S(x)$ är diskontinuerlig för $x = 0$.

6. Låt

$$a_n = \frac{n^{2n}}{(2n)!} \quad \text{då är} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{2n} \cdot \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}.$$

DVS

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \Big[\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n\Big]^2 \cdot \frac{n+1}{4n+2} \;\to\; \frac{e^2}{4}, \qquad \text{då} \quad n \to \infty.$$

Därför konvergerar $\sum_{n=1}^\infty a_n x^n$ då $|x| < \frac{4}{e^2}$ och
divergerar $\sum_{n=1}^\infty a_n x^n$ då $|x| > \frac{4}{e^2}$.
För att undersöka konvergens då $|x| = \frac{4}{e^2}$ använder vi Stirlings formel med $n \mapsto 2n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}}{\frac{n^n}{n!} e^n} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{4\pi n}}}{\frac{n^{2n}}{(2n)!} \frac{4}{e^2}^n} = 1.$$

Jämförelse på gränsvärdesformen ger då att

$$\sum_{n=1}^\infty a_n x^n \quad \text{är divergent för} \quad x = \frac{4}{e^2}, \quad \text{ty då} \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{divergerar.}$$

För $x = -\frac{4}{e^2}$ alternerar följden $a_n x^n$ samt går den mot 0 då $n \to \infty$ (den är asymptotisk ekvivalent med $\frac{(-1)^n}{\sqrt{4\pi n}}$). Vi ska nu vissa att

$$|a_n x^n| > |a_{n+1} x^{n+1}| \qquad \text{för } x = -\frac{4}{e^2},$$

och därmed enligt Leibnitz kriterium att

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big(-\frac{4}{e^2}\Big),$$

är konvergent. Men enligt ovan är

$$\Big|\frac{4a_{n+1}}{a_n}\Big| = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{2n}\Big(1+\frac{1}{2n+1}\Big).$$

Men

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{2n}\Big(1+\frac{1}{2n+1}\Big) < e^2 \quad \text{om} \quad 2n\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) + \ln\Big(1+\frac{1}{2n+1}\Big) < 2,$$

vilket i sin tur följer ifall

$$\ln(1+x) < x - \frac{1}{4}x^2, \qquad x \in (0,1].$$

Ty då

$$2n\ln\Big((1+\frac{1}{n}\Big) + \ln\Big(1+\frac{1}{2n+1}\Big) < 2n\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{n}\Big)^2\Big) + \frac{1}{2n+1} = 2 + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} < 2.$$

För att see att

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{4}x^2 < 0, \qquad x \in (0,1],$$

utnyttjar vi medelvärdessatsen enligt vilken

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(\xi)(x-0), \qquad \text{för någor} \quad \xi \in (0,x).$$

Men

$$f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi} - 1 + \frac{\xi}{2} = \xi(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+\xi}) < 0, \quad \xi \in (0,1).$$

Svar: Potensserien konvergerar presis då $x \in \Big[-\frac{4}{e^2}, \frac{4}{e^2}\Big)$.

7,8. se kurslitteratur.

MA